التحليل العددي

ريتشارد ل. بوردين   ج. دوغلاس فايرس

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

العبيكان
Obeikan

Numerical Analysis

8th Edition

Authors: Richard L. Burden

J. Douglas Faires

ISBN-13: 978-0-534-40499-4

ح مكتبة العبيكان، 1434هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

بوردين، ريتشارد . ل

التحليل العددي./ ريتشارد . ل بوردين؛ ج. دوغلاس فايرس؛ محمد صبحي أبوصالح.- الرياض 1434هـ

870 ص؛ 20.5× 26 سم

ردمك: 4 - 506 - 503 - 603 - 978

1 – التحليل العددي　　أ. فايرس، ج. دوغلاس (مؤلف مشارك)

ب. أبوصالح، محمد صبحي (مترجم)　　ج. العنوان

ديوي: 519.4　　رقم الإيداع: 3229 / 1434

الطبعة العربية الأولى 1435هـ. 2014م

تمت الترجمة والمراجعة بإشراف وزارة التعليم العالي

اللجنة الإشرافية

د. محمد بن عبدالعزيز العوهلي

د. عبدالله بن إبراهيم المهيدب

وبمشاركة منسقي التخصصات (د. محمود بن أحمد منشي، د. ناصر بن صالح المنصور، د. سعيد بن محمد العمودي، د. خالد بن منصور الشعيبي)

الترجمة

أ. د. محمد صبحي أبوصالح

المراجعة العلمية

د. فوزي أحمد الذكير　　أ. د. إبراهيم صالح العليان

التنسيق الإداري والمتابعة

معهد الأمير نايف للبحوث والخدمات الاستشارية، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية

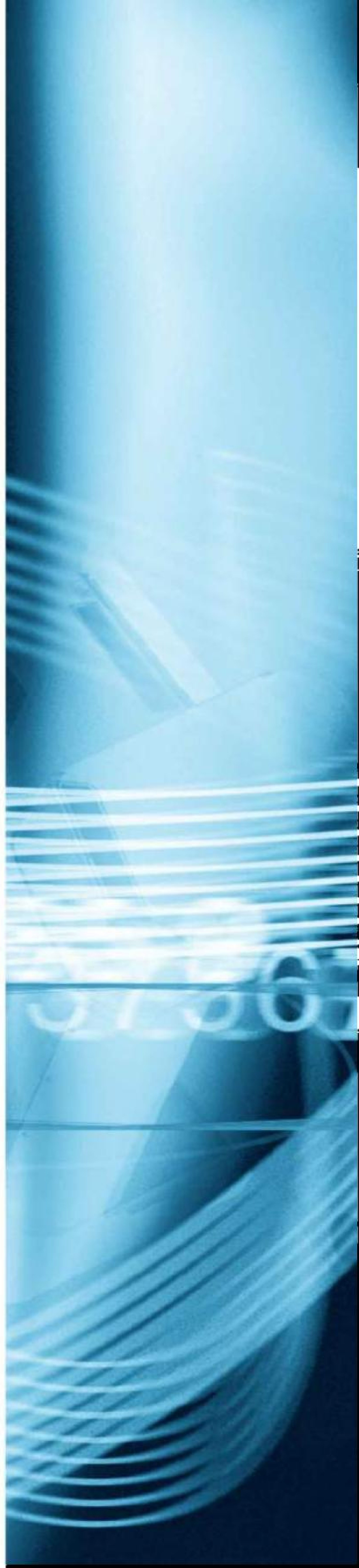
المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية - طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول هاتف: 4808654 فاكس: 4808095 ص.ب: 67622 الرياض 11517

www.obeikanpublishing.com　　http://itunes.apple.com/sa/app/obeikan-store

صفحة فارغة كما هو موضح في النص الأصلي

التحليل العددي

Numerical Analysis



صفحة فارغة كما هو موضح في النص الأصلي

صفحة فارغة كما هو موضح في النص الأصلي

المحتويات

5 مسائل القيمة الابتدائية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية 249

6 الطرائق المباشرة لحل الأنظمة الخطيّة 345

7 أساليب التكرار في جبر المصفوفات 417

8 نظرية التقريب 481

9 تقريب القيم المميزة 547

10 الحلول العددية لأنظمة المعادلات غير الخطية 597

About the Text حول الكتاب

لقد طوّرنا هذا الكتاب لاستخدامه في العديد من المقررات المتتابعة في نظرية طرائق التقريب العددية وتطبيقاتها. لقد صمّمناه بداية لطلبة السنة الثالثة في مستوى تخصصات: الرياضيات والعلوم والهندسة، الذين أنهوا السنة الأولى الجامعية على الأقل من سلسلة التفاضل والتكامل.

إن معرفة الأسس في جبر المصفوفات والصيغ التفاضلية مفيد، ولكننا عرضنا مقدمة للمادة المتعلقة بهذه المواضيع؛ كي لا تكون هذه المقررات متطلبات سابقة للكتاب.

إن الطبعات الأولى من التحليل العددي قد استخدمت في حالات متعددة واسعة. وفي بعض الحالات أُكِّد التحليل الرياضي المتضمّن في تطوير طرائق التقريب عوضًا عن الطرائق نفسها، وفي حالات أخرى كان التأكيد معكوسًا.

لقد استُعمل الكتاب أيضًا مرجعًا رئيسًا لمقررات المستوى الأول من الدراسات العليا في تخصصات الهندسة والحاسوب، وكذلك في مقررات السنة الأولى من التحليل الابتدائي المعطاة في الجامعات العالمية. ولقد أعددنا الكتاب ليناسب مستخدمين عدة من دون التنازل عن هدفنا الأصلي.

لتقديم طرائق تقريب حديثة، بيان كيفية عمل هذه الطرائق بحسب توقعاته ولماذا، ومتى، وتقديم أساس لدراسة متعمقة في التحليل العددي والحساب العلمي.

يحتوي الكتاب على مادة كافية لتغطي سنة دراسية كاملة، ولكننا نتوقع أن كثيرًا من المدرّسين سيستعملون الكتاب مدة فصل دراسي واحد، ويتعلم الطلبة في هذه الحالة كيف يحدّدون أنواع المسائل التي تتطلب طرائق عددية لحلّها، ويرون أمثلة لتنامي الخطأ الذي يمكن أن يحدث عند تطبيق الطرائق العددية. إنهم يتمكنون من تقريب حل المسائل التي لا يمكن إيجاد الحل الصحيح الدقيق لها، ويتعلمون طرائق نمطية لتقدير حدود الخطأ للتقريبات بعدئذ؛ ويكون باقي الكتاب مرجعًا للطرائق التي لا تبحث في المقرر. إن كلا المسارين – مسار لسنة كاملة أو مسار لفصل واحد– متوافقان وهدف الكتاب.

شرِح كل مفهوم في الكتاب بمثال، وتحتوي هذه الطبعة على 2500 تمرين جُرِّب في أثناء التدريس، تتراوح ما بين التطبيقات البسيطة للطرائق والخوارزميات وتعميمات نظريتها وتطويراتها. بالإضافة إلى ذلك، تحتوي مجموعات التمارين العديد من المسائل التطبيقية في مجالات متعددة في الهندسة، العلوم الفيزيائية، الحاسوب، العلوم الحياتية والاجتماعية. وتظهر التطبيقات المختارة ماهية الطرائق العددية ووجوب تطبيقها في مواضيع الحياة الواقعية بوضوح وإيجاز.

لقد تطورت مجموعة من حقائب البرمجيات والأنظمة الجبرية الحاسوبية (CAS)؛ للحصول على حسابات رياضية رمزية.

ويُعد Maple© و Mathematica© من البرامج الشائعة في البيئة الأكاديمية. إن النسخ الطلابية

لهذه الحقائب البرامجية متاحة بأسعار معقولة لمعظم أنظمة الحاسوب. وعلى الرغم من وجود اختلافات جوهرية بين هذه الحقائب من حيث الأداء والثمن، إلا أن استخدامها ممكن لتنفيذ عمليات الجبر والتفاضل والتكامل، وأن امتلاك حقيبة حساب رمزي أمر مفيد في دراسة طرائق التقريب، حيث يسهل التوصل إلى حلول صحيحة باستعمال الحساب الرمزي.

إن نتائج معظم الأمثلة والتمارين التي اخترناها قد تم وضعها باستخدام مسائل يمكن الحصول على إجابات صحيحة لها؛ لأن هذا يتيح متابعة تنفيذ طريقة التقريب، وبالإضافة إلى ذلك فإن تحليل الخطأ لكثير من الطرائق العددية يتطلب الربط بينها. وتتطلب مشتقات عليا أو مشتقات جزئية عليا للدالة عملاً مضنياً غير مفيد في حالة إتقان طرائق التفاضل والتكامل. أما إيجاد المشتقات رمزيًا فيمكن بسهولة، وعادة ما يسمح التبصر البسيط باستخدام الحساب الرمزي بالمساعدة على عملية التحديد أيضًا. ولقد اخترنا Maple حقيبة معيارية؛ بسبب الانتشار الواسع والدعم التقني المساعد الذي يقدمه، ولكن يمكن استخدام Mathematica بديلاً بعد إجراء بعض التعديلات الطفيفة. وقد أضفنا أمثلة وتمارين حيث وجدنا أن CAS قد تكون ذا فائدة كبيرة، وقد ناقشنا طرائق التقريب التي تستخدمها مابل Maple عند عدم قدرته على حل المسألة بدقة.

New for This Edition الجديد في هذه الطبعة

لقد مضى أكثر من 25 عامًا منذ ظهور الطبعة الأولى من هذا الكتاب، الذي ظهر بعد عقد من التقدم المذهل في التقنيات العددية التي حصلت لتعكس تجهيزات الحاسوب الجديدة الواسعة الانتشار. في كل مراجعة من مراجعاتنا لهذا الكتاب أضفنا أساليب جديدة تبقي عرضنا عصريًا. ولم تضف هذه المراجعة بنودًا جديدة؛ وعوضًا عن ذلك حسّنا عرض المادة لنجعل الكتاب أكثر فائدة للمدرس وأكثر متعة للقارئ.

فعلى سبيل المثال أضفنا 200 تمرين تقريبًا، معظمها طبيعية معتادة، لنعطي المدرّس خيارًا أفضل ليعين ما يريده. وقد زدنا في حجم الكتاب قليلاً، مما أتاح لنا إضافة أكثر من 150 تعليقًا مفيدًا في الهوامش.

الشكل الذي قدمنا فيه الطبعة الأولى لا يخلو من الابتكار، ولكنه قابل للجدل إلى حد ما؛ فبدلاً من عرضنا لطرائق التقريب بلغة برمجة محددة (كانت لغة فورتران FORTRAN هي الشائعة حينئذ)، أعطينا خوارزميات تشبه شفرة تؤدي برنامجًا محكم الإنشاء في العديد من اللغات. وبدءًا بالطبعة الثانية، وضعنا كشفًا ببرامج عن لغات محددة في دليل المعلم Instructor's Manual الخاص بالكتاب، وقد ازداد عددها في الطبعات اللاحقة. والآن قد رُمّزت البرامج، وأصبحت متاحة إلكترونيًا في معظم لغات البرمجة الشائعة وصفحات عمل CAS. ولقد أضفنا إلى هذه الطبعة اعتماد Java للخوارزميات، وجميع هذه البرامج متاحة على الموقع الإلكتروني المرافق للكتاب

http://www.as.ysu.edu/~faires/Numerical-Analysis/

وسنضع في الموقع الإلكتروني هذه البرامج المحدثة بحسب تغيرات البرمجيات وتعليقات مستخدمي الكتاب. وسنضيف مادة جديدة أيضًا في الطبعات الجديدة بصيغة PDF التي يمكن أن يحملها المستخدمون. ونأمل أن يطيل هذا في عمر الطبعة الثامنة حيث تبقى المادة مواكبة للعصر.

Supplemental Material المادة المضافة

وكما كان في الطبعات السابقة، فإننا نعطي خوارزمية مفصلة لكل طريقة في الكتاب دون عرض البرنامج. ويمكن أن تُعطى الخوارزميات بصيغة يسهل ترميزها حتى من قبل ذوي الخبرة البرمجية المحدودة.

وقد اخترنا في هذه الطبعة أن نضع البرامج في الموقع الإلكتروني المرافق للكتاب؛ لأن المراجعين اقترحوا أن ذلك أفضل من إرفاق الكتاب بقرص لهذا الغرض.

يوجد لكل خوارزمية برنامج مكتوب في لغات البرمجة: Fortran، باسكال، C، و Java. وبالإضافة إلى ذلك رمّزنا البرامج باستخدام Maple و Mathematica و MATLAB© التي هي حقيبة برامج حاسوبية واسعة الاستخدام في تطبيقات الجبر الخطي. إن هذا يضمن وجود مجموعة من البرامج متاحة لأنظمة الحاسوب الأكثر شيوعًا. وهناك دليل لدراسة الطالب Student Study Guide متوفر مع هذه الطبعة، ويحوي حلولاً مفصلة لكثير من المسائل.

نرجو الاتصال بالمؤلفين إذا كنت مهتمًا بالدليل Guide Brooks/Cole؛ إذ يمكنهم تزويد المدرّسين بدليل المعلم Instructor's Manual الذي يعطي أجوبة وحلولاً للتمارين كلها في الكتاب.

لقد أُعيد توليد نتائج حسابات هذه الطبعة في دليل المعلم باستخدام البرامج على القرص لضمان الموافقة بين أنظمة البرمجة المختلفة.

تؤدي الخوارزميات إلى برامج ذات نتائج صحيحة للأمثلة والتمارين في الكتاب، ولكن لم تجرِ أي محاولة لكتابة برامج مهنية ذات غرض عام. وبالتحديد فإن الخوارزميات لم تُكتب دائمًا بصيغة تؤدي إلى برنامج يكون الأكثر كفاءة بدلالة الزمن أو متطلبات التخزين. وكلما حصل تعارض بين كتابة الخوارزمية الأكثر كفاءة وكتابة خوارزمية مختلفة قليلاً تشرح جوانب الطريقة المهمة شرحًا أفضل، وتُعتمد الكتابة الأخيرة دائمًا.

About the Programs البرامج

لكل خوارزمية – يحتوي موقع المقرر الإلكتروني – برامج -Mathe، Maple، Java، Fortran، C، MATLAB، matica وباسكال، ويوجد لبعض هذه الأنظمة برامج متعددة تعتمد على الطبعة المحدّدة للبرنامج المستخدم. لقد شرِح كل برنامج بمثال يحل مسألة مرتبطة بما في المقرر، وإن هذا يسمح بتطبيق البرنامج بدءًا من اللغة التي تختارها لتشاهد صيغة المدخلات والمخرجات، ويمكن بعدئذ تعديل البرامج المتعلقة بالمسائل الأخرى بإجراء تغييرات طفيفة. إن صيغة المدخلات والمخرجات هي نفسها في أنظمة البرمجة بدرجة متقاربة. وإن هذا يسمح للمدرس الذي يستخدم البرامج أن يناقشها عمومًا من دون الأخذ في الحسبان بنظام البرمجة الخاص الذي يستعمله الطالب.

لقد بُنيت البرامج لتكون قابلة للتطبيق على الحاسوب ذي المواصفات الدنيا. ولتتمكن من استخدام الأنظمة البرمجية، تحتاج إلى البرنامج الحاسوبي المناسب مثل الجامع للغات، Fortran و Pascal و C أو أيّ من أنظمة الجبر الحاسوبية (Mathematica، Maple، و MATLAB). إن تطبيقات Java غريبة إلى حد ما، لذا تحتاج إلى تشغيل البرامج، ويمكن تنزيل Java بحرية من مواقع متعددة، وإن أفضل الطرائق للحصول على Java استخدام أداة بحث لتبحث عن الاسم، ثم تختار موقعًا للتنزيل، ومن ثم تتتبّع تعليمات ذلك الموقع. تظهر جميع البرامج على صورة ملفات ASCLL أو صفحات عمل، ويمكن تغييرها باستخدام أي محرر معالج نصوص ينتج ملف ASCLL ملفًا عاديًّا (وتسمى هذه أيضًا باسم ملفات "نصوص فقط" "Text only")، ولقد تضمنت ملفات البرامج كثيرًا من ملفات "اقرأني" README بحيث يمكن التعامل مع خواص أنظمة البرمجة المختلفة. إن ملفات README تظهر بصيغة ASCLL وعلى شكل ملفات PDF. وحيث طُورت برمجية جديدة، فإنه يتم تحديث الخوارزميات ووضعها في الموقع الإلكتروني المرافق للكتاب.

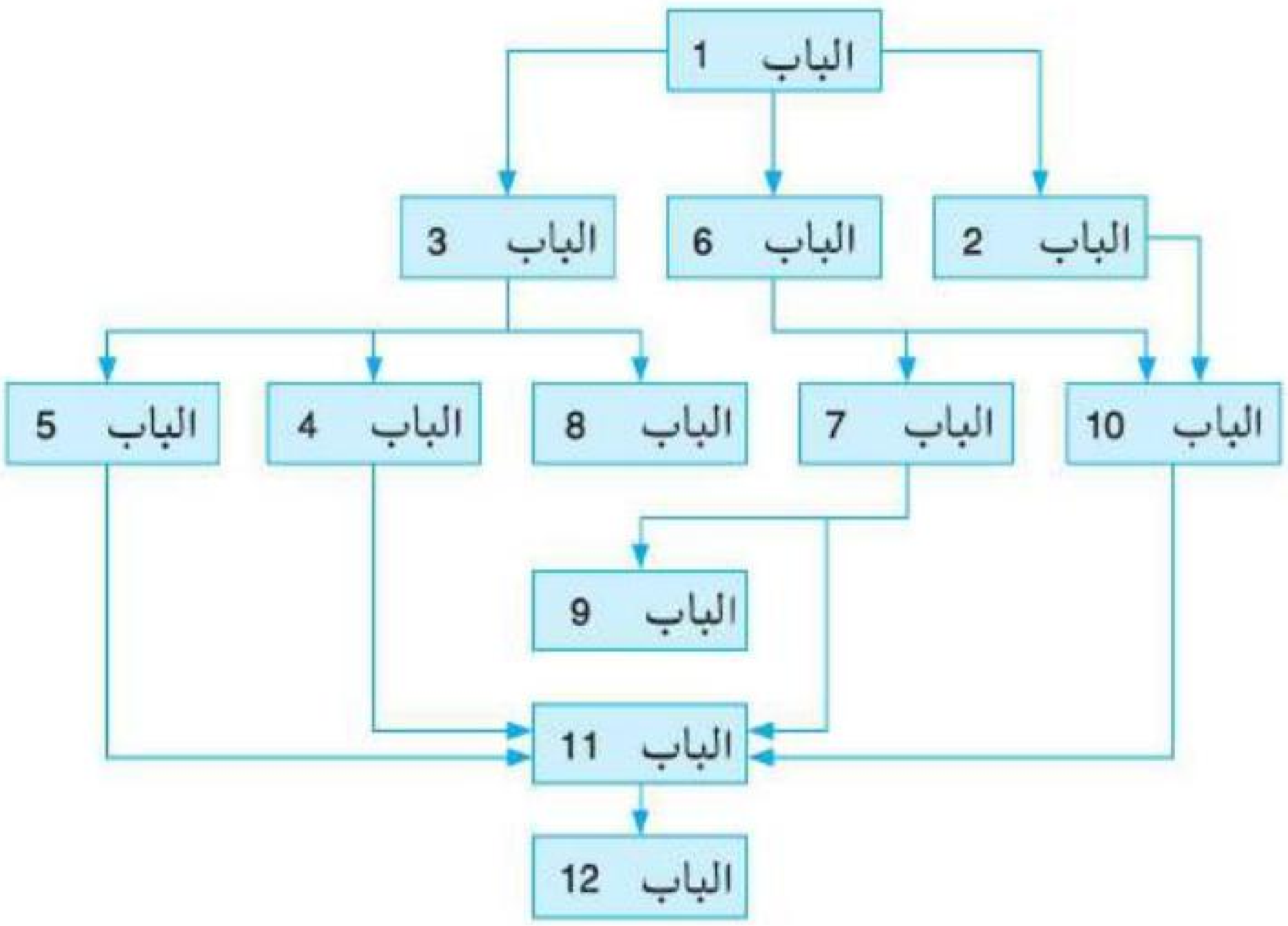
Suggested Course Outlines — اقتراحات لمخطط مقرر

لقد صُمّم كتاب التحليل العددي بحيث يتيح للمدرسين المرونة في اختيار المواضيع ومستوى الإتقان النظري، والتركيز على التطبيقات. وبالتوافق مع هذه الأهداف، فقد زوّدنا الكتاب بمراجع تفصيلية للنتائج التي لم تُشرح في المتن، وكذلك للتطبيقات التي استخدمت لشرح أهمية الطرائق العلمية.

وإن مراجع الكتاب المشار إليها هي تلك الأكثر احتمالاً؛ أن تتوافر في مكتبات الكليات التي تم تحديثها لتتماشى والطبعات الحديثة، ولقد ضمّنا الكتاب نصوصًا من أوراق بحث أصلية؛ إذ وجدنا أن هذه المادة متاحة للفئة المستهدفة من المستخدمين.

إن المخطط الآتي يبين المتطلبات السابقة للفصول. وإن الابتعاد الوحيد عن هذا المخطط قد وُصِف أسفل الصفحة الأولى في البند (4.3).

درّس هذه المادة المؤلفون في جامعة Youngstown State University بالاعتماد على المخطط الآتي:



Acknowledgments شكر وتقدير

إننا محظوظون بأن كثيرًا من طلبتنا وزملائنا قد أعطوا انطباعاتهم عن الطبعات الأولى لهذا الكتاب (الأصل باللغة الإنجليزية)، وقد أخذنا الاقتراحات جميعها في الحسبان.

حاولنا أن نضمن في الكتاب الاقتراحات جميعها التي تكمل فلسفة الكتاب، وإننا شاكرون لكل من قضى وقتًا للتواصل معنا عبر السنوات لتحسين الطبعات اللاحقة.

ونخص بالشكر أصحاب الجهود الكبيرة، وهم:

Robert Lantos, University Of Ottawa (Canada)

Gustav Delius, University of York (UK)

Warren Hickman, Westminster College

Charles Nelson, Youngstown State University

Eric Rawdon, Duquesne University

Pedro José Paúl Escolano, University of Sevilla (Spain)

Dennis C. Smolarski, Santa Clara University

Joan Weiss, Fairfield University

George Yates, Youngstown State University

Roy Simpson, State University of New York, Stony Brook

Richard Varga, Kent State University

James Verner, Simon Fraser University (Canada)

André Weideman, University of Stellenbosch (South Africa)

Nathaniel Whitaker, University of Massachusetts at Amherst

Dick Wood, Seattle Pacific University

Tangan Gao, California State University Long Beach

Jeffrey J. Heys, University of Colorado at Boulder

Louis Tcheugoue Tebou, Florida International University

Dana P. Williams, Dartmouth College

وكما كانت سياستنا في الطبعات السابقة، فقد استفدنا من مساعدة الطلبة في Youngstown State University في تحضير الطبعة الثامنة. إن مساعدنا القدير لهذه الطبعة هو نيكول كننجهام Nicole Cunningham فشكرًا لك يا نيكول.

نود أيضًا تقديم شكرنا لزملائنا أعضاء هيئة التدريس والإداريين في جامعة ينغستاون؛ إذ أتاحوا لنا الفرصة، وقدموا التسهيلات لإتمام هذا المشروع.

أخيرًا نود شكر أولئك الذين قدموا إسهامات مهمة في تاريخ الطرائق العددية.
كتب هيرمان جولد ستاين Herman H. Goldstine كتابًا مميزًا بعنوان: تاريخ التحليل العددي من القرن السادس عشر حتى القرن التاسع عشر،

A History of Numerical Analysis from the 16th Through the 19th Century [Golds]

وقد قرأنا هذا الكتاب مرارًا عند تحضير التعليقات التاريخية، ووجدناه مدهشًا أكثر مع كل قراءة.
وهناك مرجع آخر ممتاز حول معرفة التاريخ الرياضي ألا وهو

edge is the MacTutor History of Mathematics archive at the University of St. Andrews in Scotland

ولقد ألّفه John J. O'Connor and Edmund F. Robertson، وهذا هو موقعه على الإنترنت

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/

لقد أنجز عملاً عظيمًا في إنشاء المادة العلمية في هذا الموقع، وقد وجدنا المعلومات صحيحة مما ينفي الشك.

وفي الختام، الشكر مرة أخرى لجميع من قضى الوقت عبر تلك السنوات ليقدم الجهد للتواصل معنا.

ويحسن أن نسمع من الطلبة وأعضاء هيئات التدريس الذين استخدموا الكتاب في أول تعرضهم لدراسة الطرائق العددية.

نأمل أن يستمر المستفيدون في تبادل هذه الطبعة، وأن تضيف إلى الطلبة الدارسين للتحليل العددي المتعة.

إذا كان لديكم أية اقتراحات لتحسين الطبعات القادمة لهذا الكتاب، فإننا -كما كنا دائمًا- ممنونون للاحظاتكم.
يمكنكم الاتصال بنا بأيسر طريق عبر البريد الإلكتروني على العنوان أدناه:

Richard L. Burden
burden@math.ysu.edu

J. Douglas Faires
faires@math.ysu.edu

الباب

1

أسس رياضية وتحليل الخطأ

Mathematical Preliminaries and Error Analysis

مقدمة

درسنا (قانون الغاز المثالي) $PV = NRT$ الذي يربط بين الضغط P، والحجم V، والحرارة T وعدد المولات N في الغاز (المثالي) في مقررات الكيمياء الابتدائية. وفي هذه الصيغة، يعتمد ثابت R على نظام القياس.

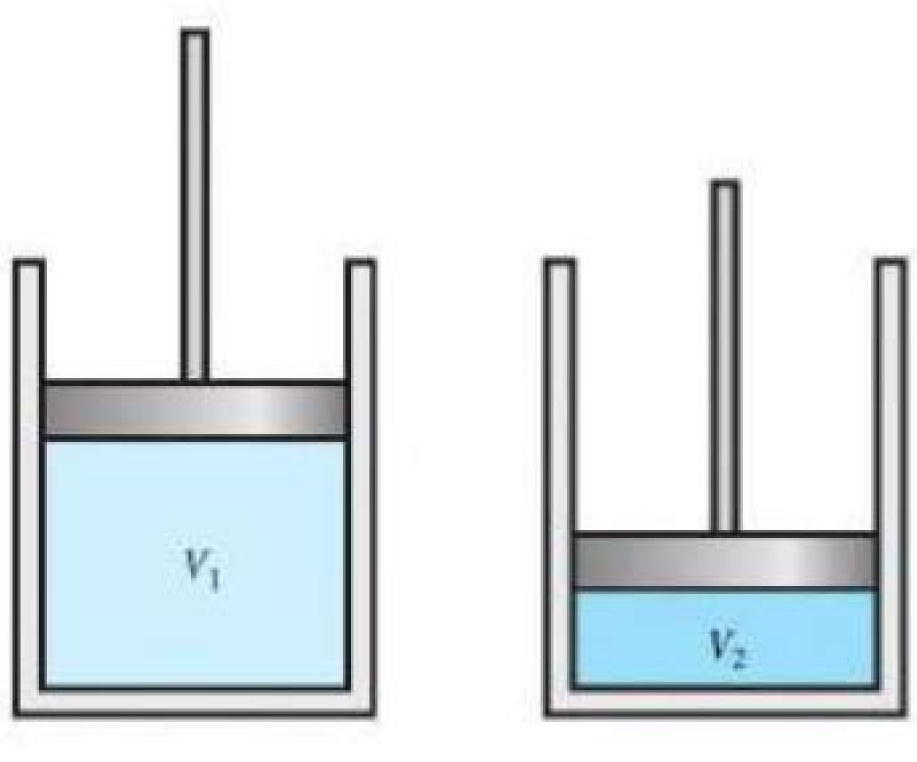
افترض أننا أجرينا تجربتين لاختبار هذا القانون باستخدام الغاز نفسه في كل حالة. لقد كان لديك في التجربة الأولى

$$P = 1.00 \text{ atm}, \qquad V = 0.100 \text{ m}^3$$
$$N = 0.00420 \text{ mol}, \qquad R = 0.08206$$

إن قانون الغاز المثالي يتوقع أن تكون درجة حرارة الغاز

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15 \text{ K} = 17°\text{C}$$

وعندما قسنا درجة حرارة الغاز، وجدنا أن درجة حرارته الحقيقية تساوي $15°$ C.



والآن نعيد التجربة باستخدام قيم N و R نفسها، ولكن بزيادة الضغط بمثلين ونقصان الحجم بمثلين أيضًا. وبما أن حاصل الضرب PV يبقى نفسه، فإن درجة الحرارة المتوقعة تبقى $17°$ C، ولكننا نجد أن درجة الحرارة الآن هي $19°$ C.

ومن الواضح أن قانون الغاز المثالي مشكوك فيه، ولكن قبل الاستنتاج بأن القانون خطأ، يتعين في هذه الحالة معاينة البيانات لنرى ما إذا كان الخطأ يعزى إلى نتائج التجربة. وإذا كان الأمر كذلك فربما تمكنّا من تحديد درجة الدقة المطلوبة في نتائج التجربة؛ لنضمن عدم وجود خطأ بهذا المقدار.

إن تحليل الخطأ الداخل في الحسابات موضوع مهم في التحليل العددي، وسيُدرس في الفصل (2.1).

وسيناقش هذا التطبيق السابق في التمرين (28) من الفصل (2.1).

ويحتوي هذا الباب على مراجعة قصيرة لمواضيع التفاضل والتكامل في متغير واحد، التي نحتاج إليها في الأبواب اللاحقة، بالإضافة إلى مقدمة عن التقارب، وتحليل الخطأ، والتمثيل الآلي للأعداد.

1.1 مراجعة التفاضل والتكامل Review of Calculus

تعدّ مفاهيم النهاية والاتصال للدالة مواضيع رئيسة عند دراسة التفاضل والتكامل.

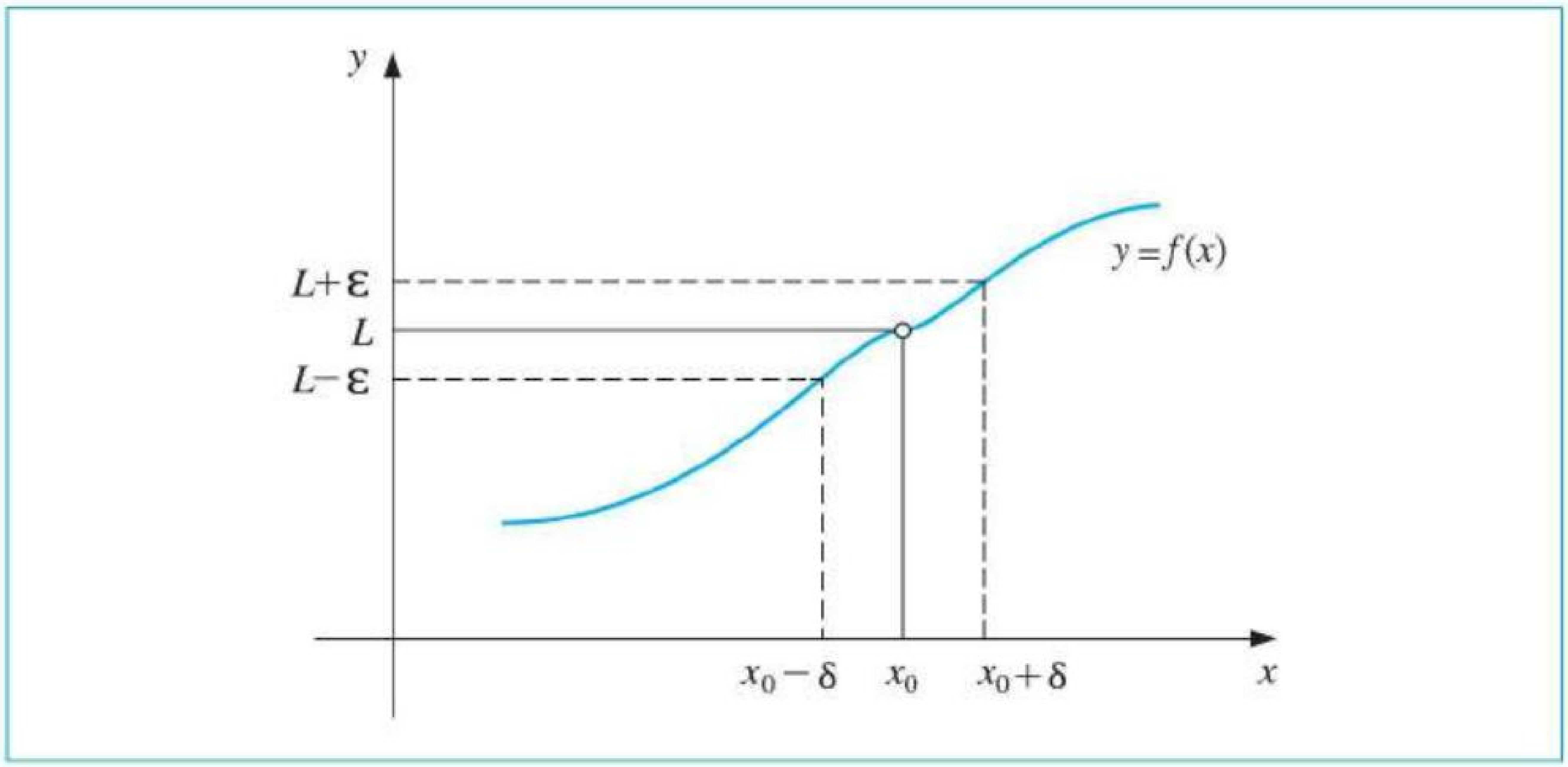
تعريف 1.1 يكون للدالة f المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية X نهاية قيمتها L عند النقطة x_0، وتُكتب

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

إذا كان لأي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$، يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث يتحقق $|f(x) - L| < \varepsilon$ عندما $x \in X$ و $0 < |x - x_0| < \delta$.

(انظر شكل 1.1). ■

شكل 1.1



تعريف 2.1

افتــرض أن f دالــة معرّفة علــى مجموعة من الأعداد الحقيقيــة X و $x_0 \in X$، تكون الدّالة f متصلة عند x_0 إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

وتكون الدّالة f متصلة على المجموعة X إذا كانت متصلة عند كل نقطة (عدد) في X. ■

نســتخدم الرمز $C(X)$ ليعبّر عن الدّوال المتصلة جميعها على x. وعندما تكون x فترة على خط الأعداد الحقيقية، نحذف الحاصرتين ( ).

نعبّر عن مجموعة جميع الدّوال المتصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بالرمز $C[a,b]$.

وتعرّف نهاية متتالية الأعداد الحقيقية أو الأعداد المركبة بطريقة مماثلة.

لقد طُوّرت مفاهيم التفاضل والتكامل وتطبيقاته في أواخر القرن السابع عشر وأوائل القرن الثامن عشر، ولكن الصيغ الرياضية الدقيقة لمفهوم النهاية والاتصال لم تتبلور حتى جاء هينرج أبروارد هيين (1821–1881) وكارل فيرستراس (1815–1897) في القرن التاسع عشر.

تعريف 3.1

افترض أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أعداد حقيقية أو مركبة.

يكون للمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نهاية x (تتقارب المتتالية إلى x إذا كان لكل $0 < \varepsilon$ يوجد عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)$ بحيث $|x_n - x| < \varepsilon$ عندما $n > N(\varepsilon)$.

تعني الرموز الآتية

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{أو} \quad x_n \to x \quad \text{عندما} \quad n \to \infty$$

أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى x. ■

مبرهنة 4.1

إذا كانــت f دالــة معرّفة على مجموعة من الأعداد الحقيقيــة X، وكان $x_0 \in X$ فإن العبارات الآتية متكافئة

أ. f متصلة عند x_0.

ب. إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أي متتالية على X ومتقاربة إلى x_0 فإن

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$ ■

نفترض أن الدّوال جميعها والتي نســتخدمها في الطرائق العددية متصلة؛ لأن هذا هو الحد الأدنى من المتطلبات للتنبؤ بســلوك الدّوال. وإن الدّوال غير المتصلة يمكنها القفز عن نقاط ذات أهمية مما يؤدي إلى صعوبات عند محاولة الحصول على تقريب لمسألة ما.

وإن الافتراضات الأكثر حبكة حول الدّالة تؤدي عمومًا إلى حلول تقريبية أفضل.

وإن الدّالة ذات الرســم الناعم يسهل التنبؤ بسلوكها بصورة أفضل من تلك الدّالة ذات الخشونة المتعددة، على سبيل المثال: إن شرط النعومة يعتمد على مفهوم المشتقة.

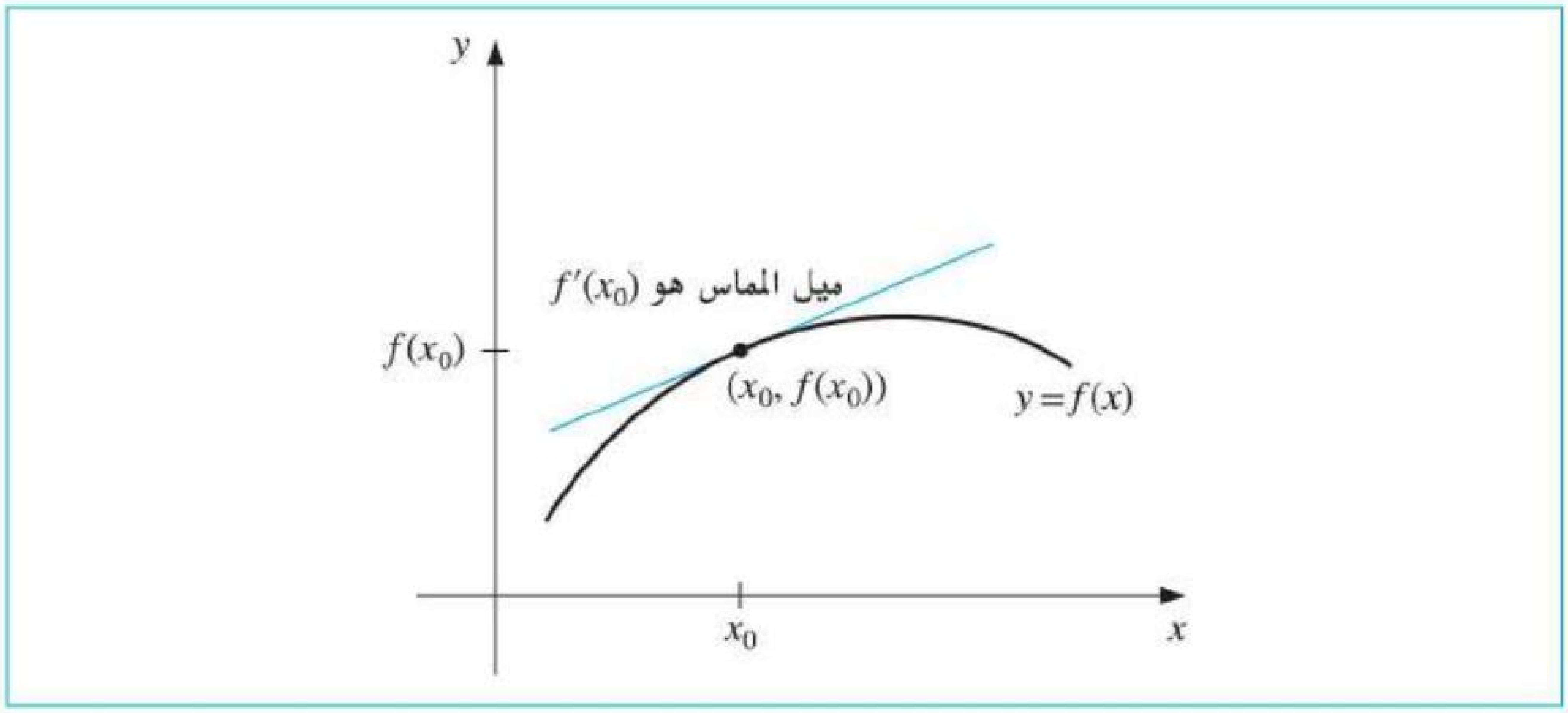
تعريف 5.1

افترض أن f دّالة معرّفة على فترة مفتوحة تحتوي على x_0.نقول: إن الدّالة f قابلة للاشــتقاق عند x_0 إذا كانت $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجودة، يسمى العدد $f'(x_0)$ مشتقة f عند x_0.

وتكون الدّالة f قابلة للاشتقاق على المجموعة x إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في x. ■

إن مشتقة الدّالة f عند x_0 هي ميل خط المماس لمنحنى f عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ كما في الشكل (2.1).

شكل 2.1



مبرهنة 6.1 إذا كانت الدّالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن f متصلة عند x_0. ■

تُعزى هذه المبرهنة للرياضي مايكل رول (1652–1719)، وقد ظهرت عام 1691 في مقالة بعنوان Me'thode pour re'sounder les e'galites انتقد رول علم التفاضل والتكامل الذي طوّره إسحاق نيوتن وغونفريد لايبنتز في البداية. ولكن أصبح رول أخيرًا من مطوّري هذا العلم.

نعبّر عن مجموعة الدّوال جميعها والتي يوجد لها n من المشتقات المتصلة على المجموعة X بالرمز $C^n(X)$، وعن مجموعة الدّوال التي لها مشتقات من جميع الرتب على X بالرمز $C^\infty(X)$. إن كثيرات الحدود، والدّوال النسبية، والمثلثية، والأسّية واللوغارتمية تنتمي كلها إلى $C^\infty(X)$ حيث تتألف X من الأعداد جميعها والتي تعرّف عليها هذه الدّوال. وإننا نحذف الأقواس في هذه الرموز عندما تكون X فترة على خط الأعداد الحقيقية كالسابق.

النظريات الآتية ذات أهمية رئيسة في اشتقاق طرائق تقدير الخطأ. وإن براهين هذه النظريات والنتائج جميعها والتي لم تُذكر مراجعها في هذا الفصل، يمكن الرجوع إليها في أي كتاب تفاضل وتكامل رئيس.

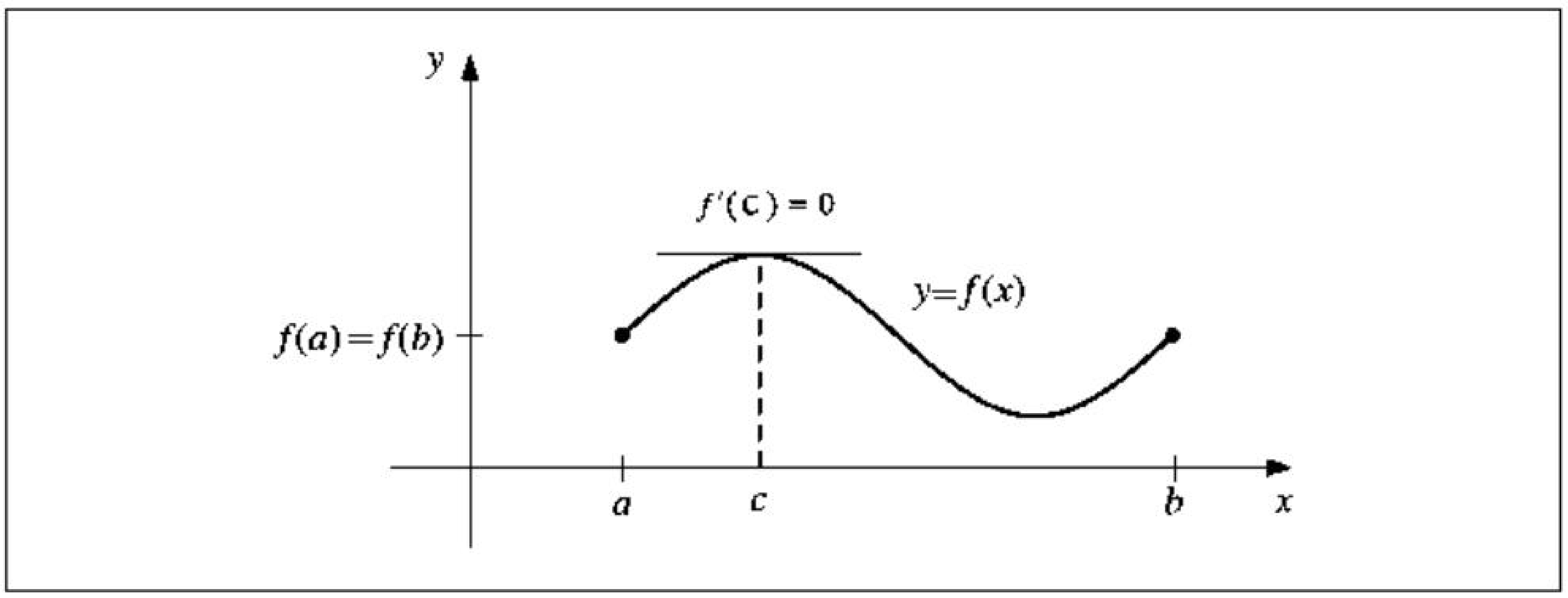
مبرهنة 7.1 مبرهنة رول Rolle's Theorem

إذا كانت $f \in C[a, b]$ قابلة للاشتقاق على (a,b)،

وإذا كانت $f(a) = f(b)$، فإنه يوجد عدد c في الفترة (a,b)، يحقق $f'(c) = 0$.

(انظر شكل 3.1). ■

شكل 3.1

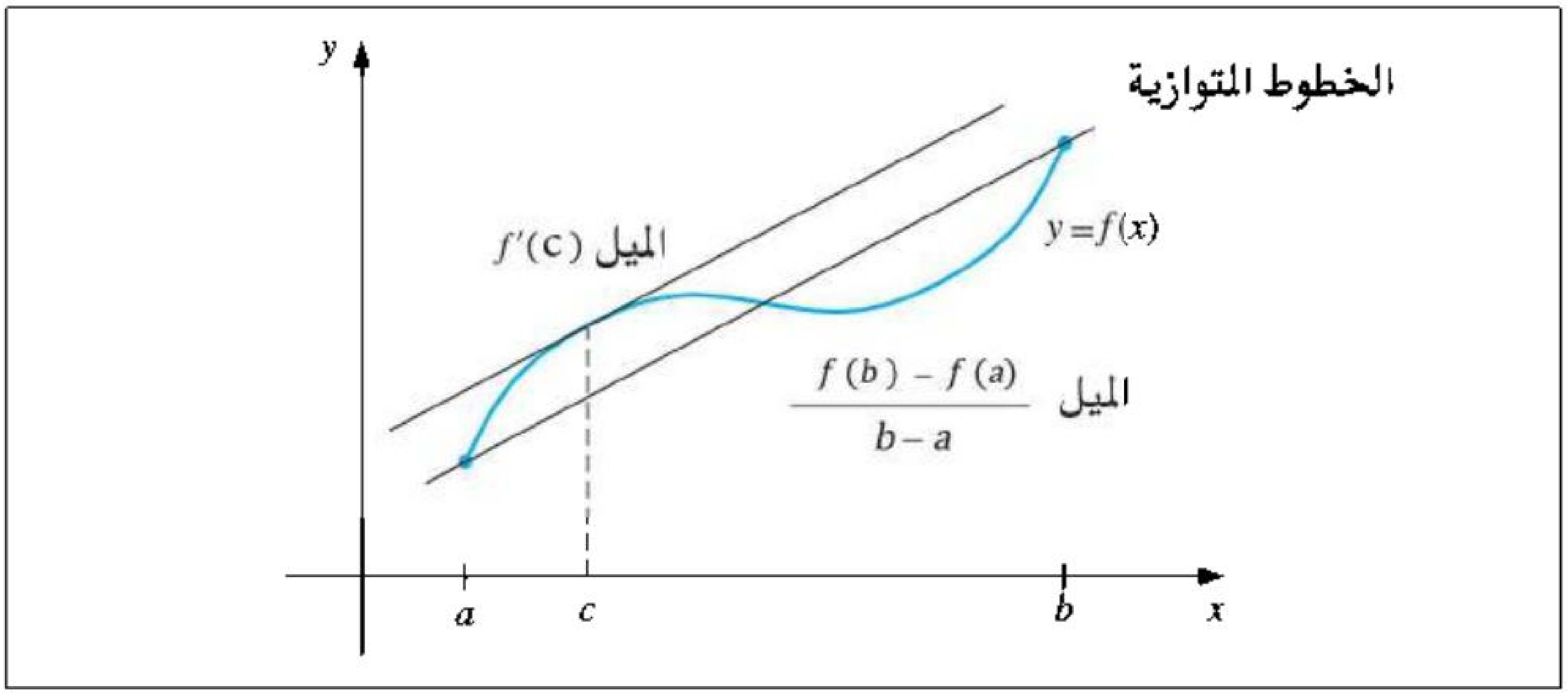


مبرهنة 8.1 مبرهنة القيمة الوسيطية Mean Value Theorem

إذا كانت $f \in C[a, b]$ وكانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) فإنه يوجد عدد c في الفترة (a, b) يحقق $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(انظر شكل 4.1). ■

شكل 4.1

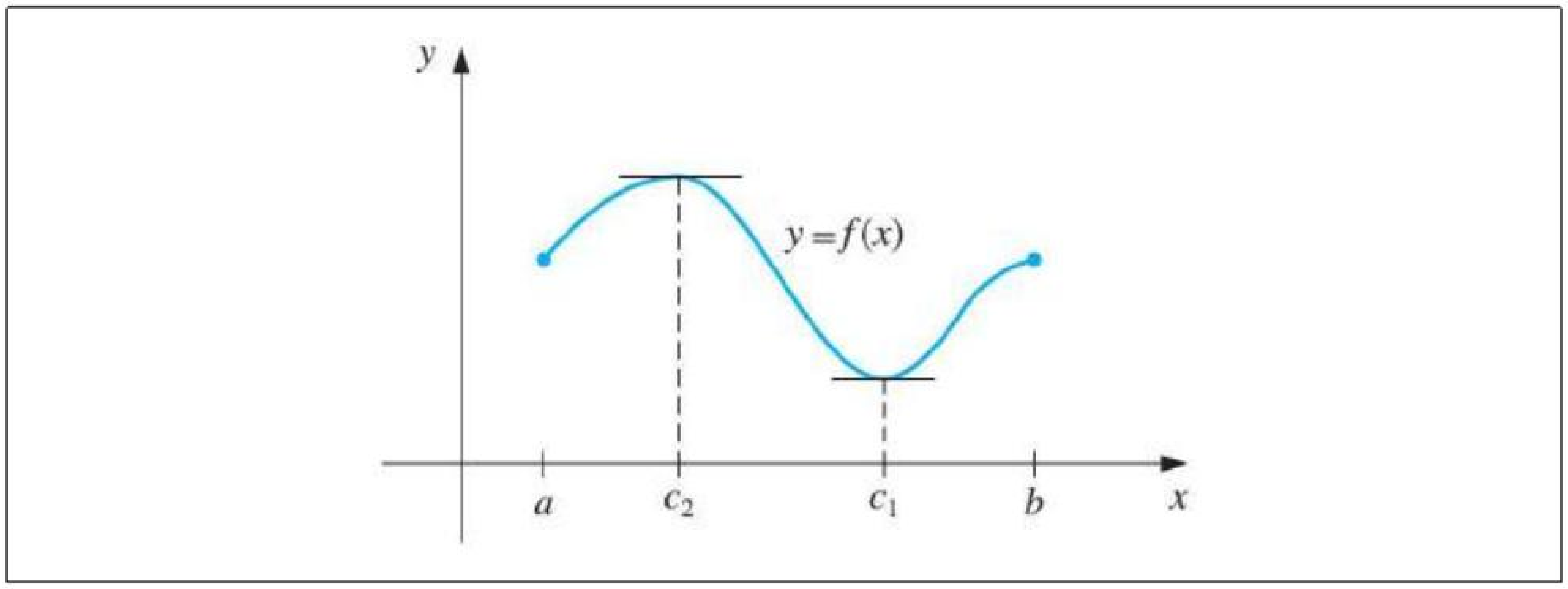


مبرهنة 9.1 مبرهنة القيمة القصوى Extreme Value Theorem

إذا كانت $f \in C[a, b]$ فإنه توجد نقطتان $c_1, c_2 \in [a, b]$ بحيث يكون $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ لجميع القيم $x \in [a, b]$. بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) فإن النقطتين c_1 و c_2 تقعان على طرفي الفترة $[a, b]$ أو تكون f' مساوية للصفر.

(انظر شكل 5.1). ■

شكل 5.1



لقد بدأت البحوث حول تصميم الخوارزميات والأنظمة لاستخدام الرياضيات الرمزية مع بدايات 1960. وأول نظام فعّال ظهر كان في السبعينيات 1970، وكان من نوع LISP ويسمّى MACSYMA.

سنستخدم النظام الحاسوبي الجبري Maple حيثما كان مناسبًا كما ذكرنا في المقدمة.

إن الأنظمة الحاسوبية الجبرية (CAS) مفيدة في الاشتقاق الرمزي، وفي رسم الأشكال خصوصًا نوضح استخدام هاتين التقنيتين في المثال (1).

مثال 1 استخدم **Maple** لإيجاد $\max_{a \le x \le b} |f(x)|$ للدّالة $f(x) = 5\cos 2x - 2x\sin 2x$ على الفترتين $[1, 2]$ و $[0.5, 1]$.

بدئ بالعمل على تطوير مشروع "مابل" في جامعة واترلو في نهاية ثمانينيات القرن العشرين. وكان الهدف منه جعله في متناول أيدي الباحثين الرياضيين، والمهندسين، والعلماء. إضافة إلى توفيره للطلاب من أجل أغراض تربوية. وحتى يكون المشروع فاعلاً، يجب أن يكون قابلاً للنقل، ومناسبًا من حيث المكان والزمان. قدمت عروض للنظام في عام 1982، وأما العرض المكتوب الرئيس لمعايير تصميم نظام "مابل" فقد قدّم عام 1983 [CGG6].

سنبدأ أولاً بإمكانات Maple في الرسم. ولكي تتمكن من استخدام برمجية الرسم الكاملة، أدخل الأمر

```
>with(plots);
```

فتظهر لك قائمة أوامر ضمن البرمجية.

عرّف f بإدخال

```
>f:= 5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x);
```

إذ تعطيك Maple الآتي

$$f := 5\cos(2x) - 2x\sin(2x)$$

استخدم الأمر

```
>plot(f,x=0.5..2);
```

لكي ترسم f على الفترة $[0.5, 2]$؛

يمكننا تحديد إحداثيات أي نقطة على الرسم عن طريق تحريك مؤشر الفأرة إلى النقطة، ونقر زر الفأرة الأيسر، فتظهر عندئذ إحداثيات النقطة التي حدّدتها بالمؤشر في الصندوق الأبيض على الزاوية العليا اليسرى لشاشة Maple، وتظهر في الشكل (6.1) أيضًا، إن هذه الطريقة مفيدة لتقرير إحداثيات نقاط القيم المتطرفة للدّالات.

ثم نكمل حل المثال باستخدام مبرهنة القيمة الوسيطية.

أولاً: خذ الفترة $[1, 2]$ للحصول على المشتقة الأولى $g = f'$، أدخل

```
>g:=diff(f,x);
```

يعطيك Maple

$$g := -12\sin(2x) - 4x\cos(2x)$$

يمكنك عندئذ أن تحل $g(x) = 0$ للقيم $1 \le x \le 2$

وذلك باستخدام

```
>fsolve(g,x,1..2);
```

فتحصل على 1.358229874 وتحسب $f(1.358229874) = -5\ 675301338$

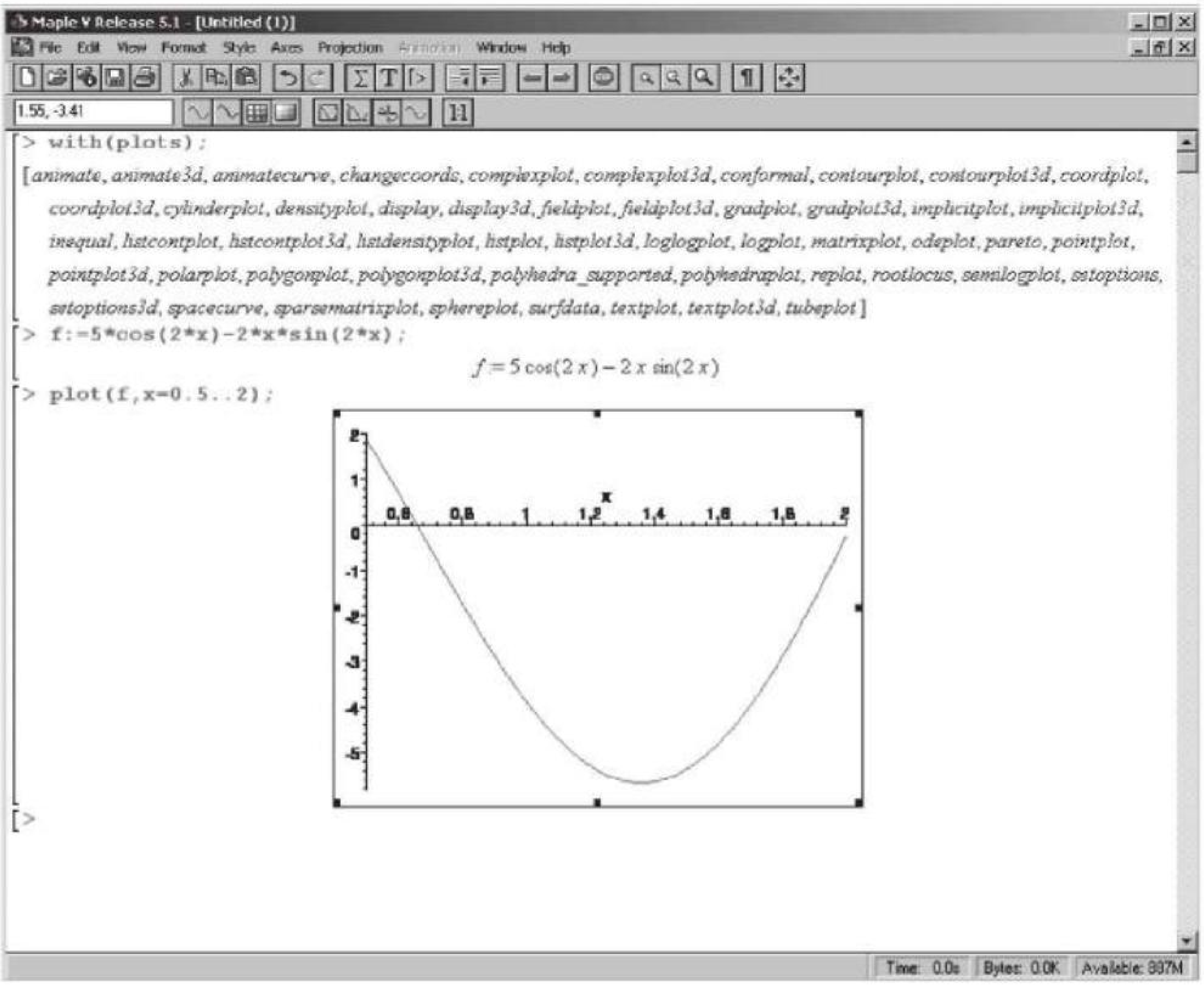
وذلك باستخدام

```
>evalf(subs(x=1.358229874,f));
```

إن هذا يعني وجود قيمة صغرى تساوي تقريبًا $f(1.358229874) = -5.675301338$.

وإن ما نحتاج إليه في كثير من الأحيان هو القيمة العظمى التي تحقّقها الدّالة على فترة ما، وتحدث القيمة العظمى على نقطة حرجة أو على أحد حدود الفترة. وبما أن $f(1) = -3.899329037$ و $f(2) = -0.241008124$ فإن القيمة العظمى تحدث على النقطة الحرجة ويكون

شكل 6.1



$$\max_{1\le x\le 2}|f(x)| = \max_{1\le x\le 2}|5\cos 2x - 2x\sin 2x| = |f(1.358229874)| = 5.675301338$$

وإذا ما أردنا حل $g(x) = 0$ على الفترة $0.5 \le x \le 1$ فإننا نجد ذلك عند إدخال

>fsolve(g,x,0.5..1)

ويعطينا **Maple**

$$\text{fsolve}(-12\sin(2x) - 4x\cos(2x),\ x, .5..1)$$

إن هذا يعني أن **Maple** لم يتمكن من إيجاد حل على الفترة [0.5, 1].

وبما أن $f(0.5)=1.860040545$ و $f(1)=-3.899329037$ نجد أن

$$\max_{0.5\le x\le 1}|f(x)| = \max_{0.5\le x\le 1}|5\cos 2x - 2x\sin 2x| = |f(1)| = 3.899329037 \qquad \blacksquare$$

ويوجد مفهوم آخر في التفاضل والتكامل يُستخدم بصورة مكثفة وهو تكامل ريمان.

تعريف 10.1 تكامل ريمان للدّالة f على الفترة $[a, b]$ هو النهاية الآتية شرط وجودها.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i$$

لقد اكتشف جورج ريمان (1826–1866) كثيرًا من الأمور حول تصنيف الدوال التي لها تكاملات. وقد ساهم في أعمال مهمة في الهندسة ومبرهنة الأعداد المركبة أيضًا. ويعدّ من الرياضيين المشهورين في القرن التاسع عشر.

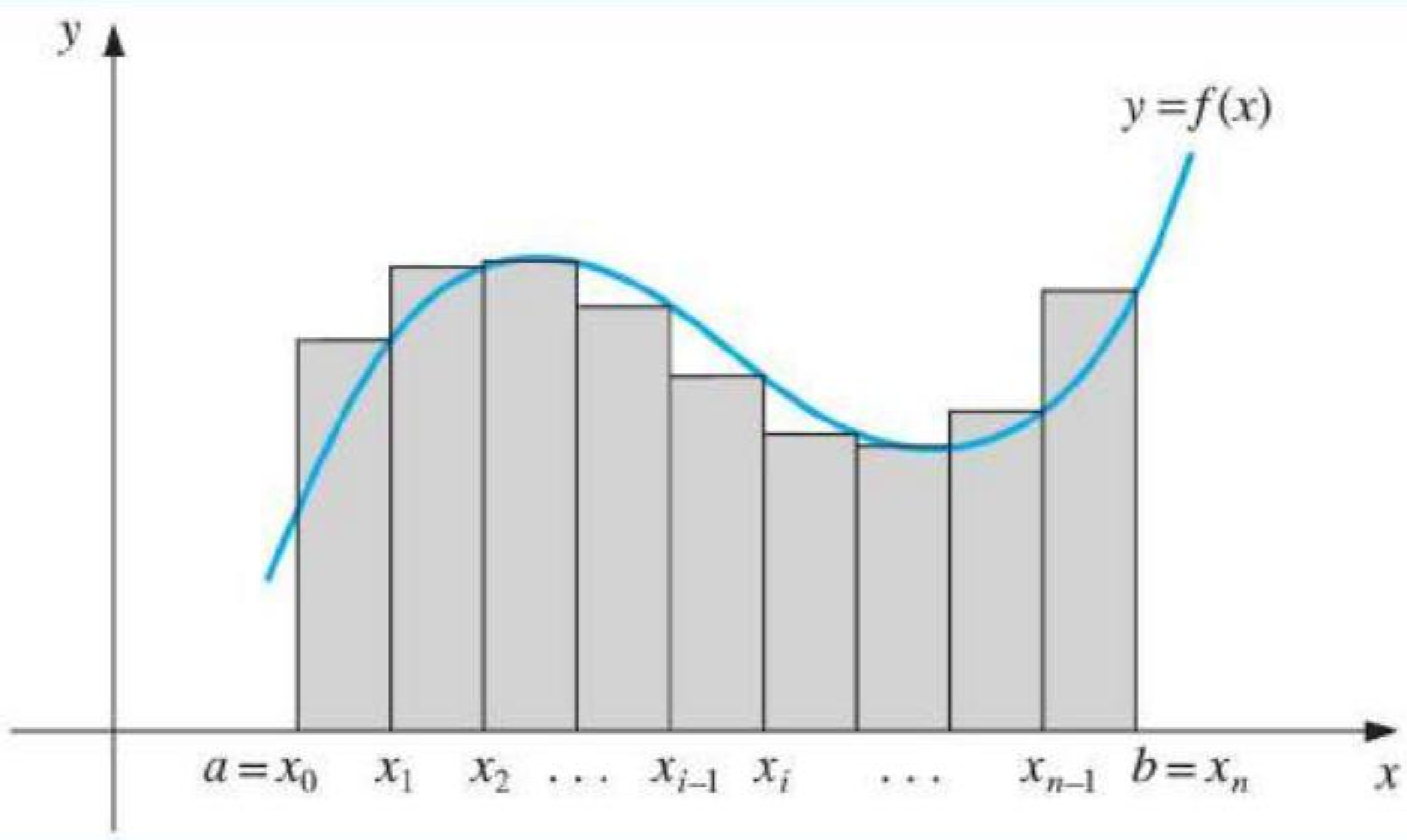
حيث إن الأعداد $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تحقّق $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b$ وحيث $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ لكل $(i = 1, 2, \ldots, n)$ وحيث (z_i) أي عدد نختاره عشوائيًّا في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$. ■

إذا كانت الدّالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنها قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$. وإن هذا الأمر يسمح لنا – ولسهولة الحساب – باختيار النقاط (x_i) لتكون متساوية البعد في $[a, b]$، واختيار $(z_i = x_i)$ لكل $(i = 1, 2, \ldots, n)$، وفي هذه الحالة يكون

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

حيث إن الأعداد (x_i) في الشكل (7.1) هي $x_i = a + i(b-a)/n$.

شكل 7.1



هنـاك نتيجتان أخريان نحتاج إليهما في التحليل العددي، الأولى هي تعميم للمبرهنة المعروفة بمبرهنة القيمة الوسيطية للتكامل.

مبرهنة 11.1 مبرهنة القيمة الوسيطية الموزونة للتكامل
Weighted Mean Value Theorem for Integrals

إذا كانت $f \in C\,[a, b]$ وكان تكامل ريمان للدّالة $g(x)$ موجودًا على $[a, b]$، وكانت $g(x)$ لا تغير إشارتها على $[a, b]$ فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث

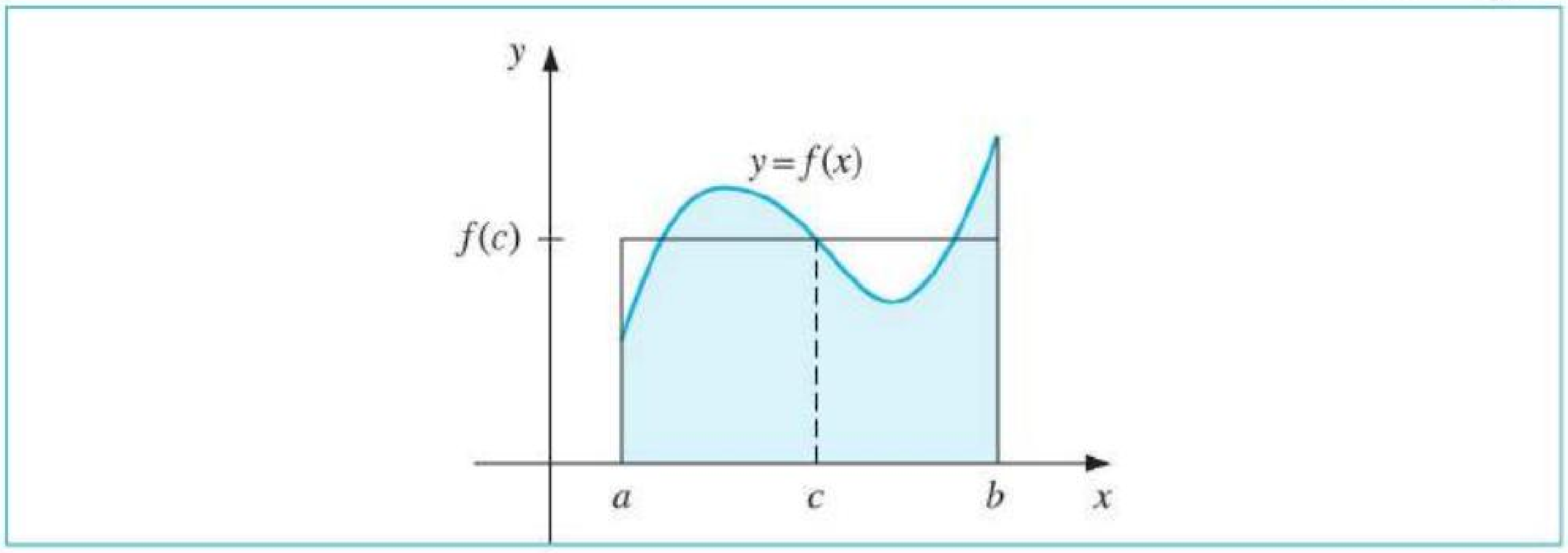
$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$ ■

وعندما يكون $g(x)=1$ فإن المبرهنة (11.1) هي مبرهنة القيمة الوسيطية للتكامل العادية؛ إذ تعطى القيمة الوسيطية لقيمة الدّالة f على الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$$

انظر شكل (8.1).

شكل 8.1



عادة لا يقدم برهان المبرهنة (11.1) في كتب التفاضل والتكامل الرئيســة، ولكنه يقدم في معظم كتب التحليل (انظر على سبيل المثال [Fu, p.162]).

كمــا لا تقدم المبرهنــة الثانية التي نحتاج إليها عادة في مقرر التفاضل والتكامل الرئيس، والتي يمكن إثباتها بتطبيق مبرهنة رول على نحو متتالٍ على الدوال $(f, f', \ldots)$ إلى أن نصل في النهاية إلى $f^{(n-1)}$.

مبرهنة 12.1 تعميم مبرهنة رول Generalized Rolle's Theorem

افترض أن $f \in C[a, b]$ قابل للاشتقاق n من المرات على الفترة (a,b). إذا كان $f(x)$ يساوي صفــرًا على $(n+1)$ مــن الأعداد المختلفة $x_0, \ldots, x_n$ في الفتــرة $[a, b]$، فإنه يوجد عدد c في الفترة (a,b) بحيث $f^{(n)}(c) = 0$. ■

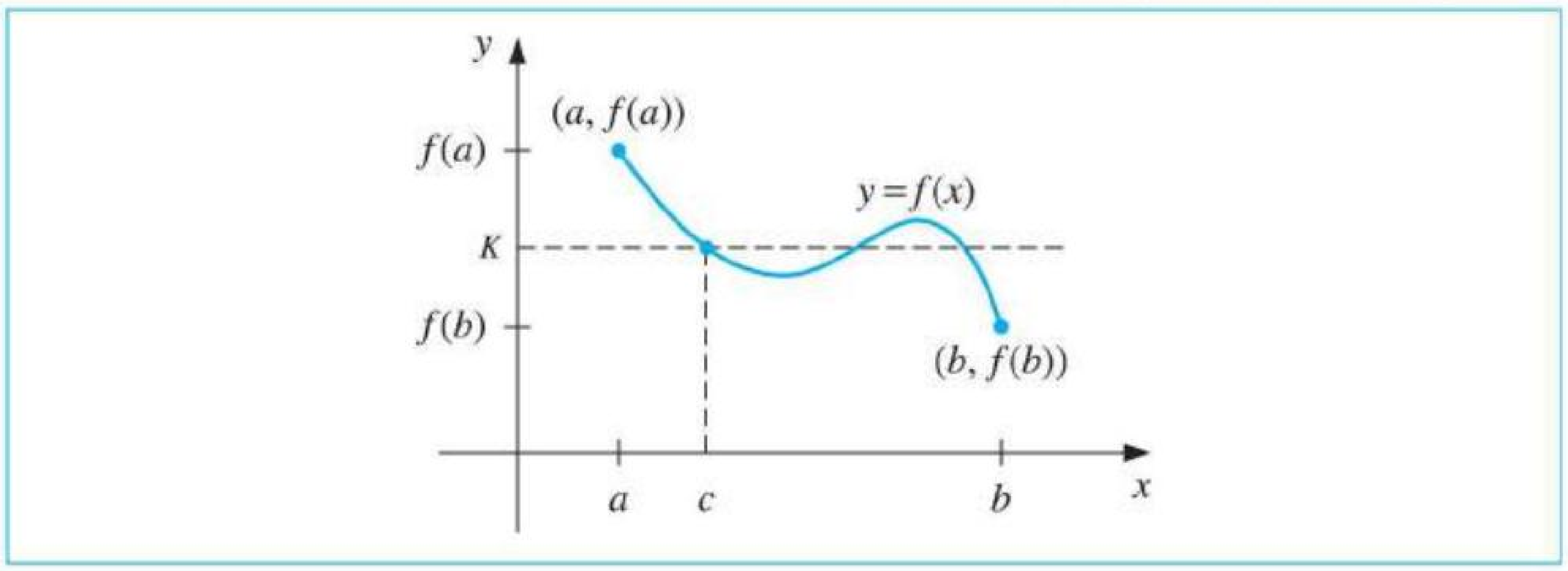
المبرهنة الآتية هي مبرهنة القيمة الوســيطية، ومع معقولية منطوقها حسبما يظهر، فإن البرهان خــارج عــن نطاق أي مقرر عادي في التفاضل والتكامل. ويمكــن إيجاد البرهان في معظم كتب التحليل. (انظر على سبيل المثال [Fu, p.67]).

مبرهنة 13.1 مبرهنة القيمة الوسيطية Intermediate Value Theorem

إذا كان $f \in C[a, b]$، وكان K أي عــدد يقــع بــين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c في (a,b) حيث $f(c) = K$. ■

يبيِّن الشــكل (9.1) أحد خيارات العدد الذي تضمن وجوده مبرهنة القيمة الوســيطية. وفي هذا المثال يوجد اختياران آخران لهذا العدد.

شكل 9.1



مثال 2 لإثبات أن $x^5-2x^3+3x^2-1=0$ لها حل في الفترة [0,1]؛ ضع $f(x)=x^5-2x^3+3x^2-1$

لدينا الآن $f(0)=-1<0$ و $0<1=f(1)$

حيث إن f متصلة. لذلك فإن مبرهنة القيمة الوسيطية تضمن وجود عدد x في الفترة $0<x<1$ يحقق $x^5-2x^3+3x^2-1=0$. ■

ويظهر في المثال (2) أيضًا أن مبرهنة القيمة الوسيطية تستخدم لتحديد توقيت وجود الحلول لبعض المسائل، ولكنها لا تعطي طريقة فاعلة لإيجاد الحلول. وسندرس ذلك في الباب (2). المبرهنة الأخيرة في هذه المراجعة للتفاضل والتكامل تصف كثيرات الحدود لتايلور (Taylor). حيث تستخدم كثيرات الحدود هذه بصورة مكثفة في التحليل العددي.

مبرهنة 14.1 مبرهنة تايلور Taylor's Thoerem

افترض أن $f\in C^n[a,b]$، وأن $f^{(n+1)}$ موجودة على $[a,b]$، و $x_0\in[a,b]$. عندئذ لكل $x\in[a,b]$ يوجد عدد $\xi(x)$ بين x_0 و x بحيث يكون $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ و

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

و
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
■

لقد وصف بروك تايلور (1685–1731) هذه السلسلة عام 1715 في مقالته "Methodus incrementorum directa et inversa" هناك حالة خاصة لهذه النتيجة. وقد تكون النتيجة نفسها معروفة في وقت سابق لدى إسحاق نيوتن وجيمس غريغوري وآخرين.

تسمى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدالة f حول x_0، ويسمى $R_n(x)$ الحدّ الباقي (أو خطأ القطع) المرتبط بـ $P_n(x)$.

وبما أن العدد $\xi(x)$ في خطأ القطع $R_n(x)$ يعتمد على قيمة x التي تحسب عندها كثيرة الحدود $R_n(x)$، فهو دالّة في الوسيط x. وعلى الرغم من ذلك، يجب أن لا نتوقع أن نكون قادرين على حساب قيمة الدّالة $\xi(x)$ بصورة صريحة.

تضمن مبرهنة تايلور وجود مثل هذه للدّالة، وتقع قيمتها ما بين قيمتي x_0 و x. وفي الحقيقة فإن إحدى مشاكل الطرائق العددية هي محاولة حساب الحد المعقول لقيمة $f^{(n+1)}(\xi(x))$ عندما تكون x ضمن فترة محدّدة.

إن السلسلة اللانهائية التي نحصل عليها عند أخذ نهاية $P_n(x)$ عندما $n\to\infty$ تسمّى سلسلة تايلور للدّالة f حول x_0. وفي حالة $x_0=0$، فإن كثيرة حدود تايلور عادة ما تسمّى كثيرة حدود ماكلورين؛ وعادة ما تسمّى سلسلة تايلور بسلسلة ماكلورين Maclaurin.

إن خطأ القطع في كثيرة حدود تايلور يشير إلى الخطأ الناتج عن استخدام حاصل جمع مقطوع أو منتهٍ (نهائي) لتقريب حاصل جمع سلسلة لانهائية.

لقد اشتهر كولن ماكلورين (1698–1746) بأنه المدافع عن حساب التفاضل والتكامل الذي بلوره نيوتن. عندما كان هذا الموضوع يتعرض لهجوم شرس من قبل البيشوب جورج بيركلي.

لم يكتشف ماكلورين السلسلة التي تحمل اسمه. حيث كانت معروفة لدى الرياضيين في القرن السابع عشر قبل مولده. وعلى كل حال فلقد اكتشف طريقة نظام المعادلات الخطية كلها باستخدام قاعدة كرامر التي لم ينشرها كرامر إلا في عام 1750.

مثال 3 أوجد (أ) كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية.

(ب) كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة للدّالة $f(x)=\cos x$ حول $x_0=0$، ثم استخدم كثيرات الحدود هذه لتقريب قيمة $\cos(0.01)$.

(ج) استخدم كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة والحدّ الباقي المرتبط به لتقريب $\int_0^{0.1} \cos x \, dx$

بما أن $f \in C^\infty(\mathbb{R})$، فإنه يمكن تطبيق مبرهنة تايلور لكل $n \geq 0$. بملاحظة أن

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x \ \text{ and } \ f^{(4)}(x) = \cos x$$

نجد أن

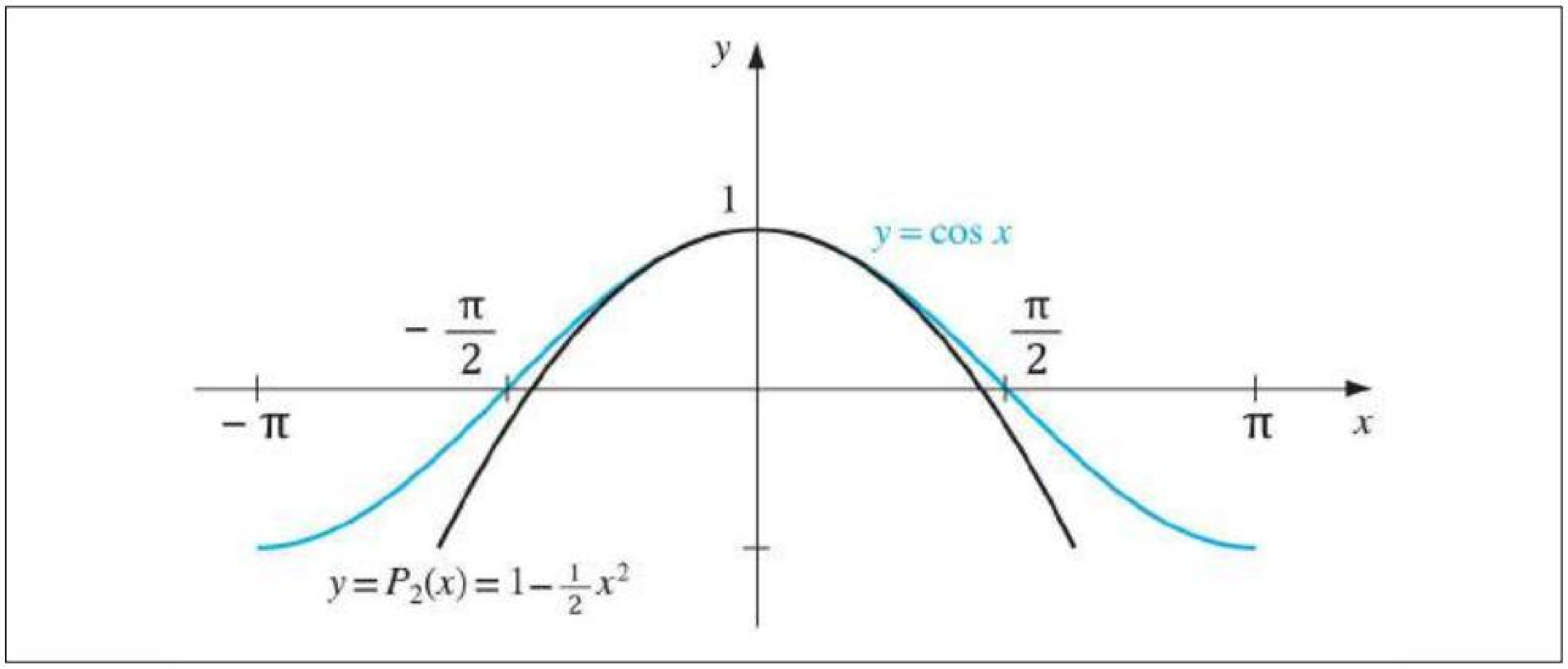
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1 \ \text{ and } \ f'''(0) = 0$$

(أ) عندما $n = 2$ و $x_0 = 0$ يكون لدينا

$$\cos x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3 \qquad \xi(x)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin\xi(x)$$

حيث إن $\xi(x)$ عدد (عادة ما يكون غير معلوم) بين 0 و x. (انظر شكل 10.1)

شكل 10.1



عندما يكون $x = 0.01$ فإننا نحصل من الصيغة أعلاه على

$$\cos(0.01) = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin\xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01)$$

عندئذ فإن تقريب قيمة $\cos(0.01)$ الذي نحصل عليه باستخدام كثيرة حدود تايلور هو 0.99995.

وإن خطأ القطع أو الحد الباقي المرتبط بهذا التقريب هو

$$\frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01) = 0.1\overline{6} \times 10^{-6} \sin\xi(0.01)$$

حيث الخط المستخدم فوق العدد 6 في $0.1\overline{6}$ يعني أن العدد العشري هو عدد دوري (يكرّر نفسه إلى ما لانهاية).

وعلى الرغم من أننا لا نملك طريقة لتحديد $\sin\xi(0.01)$، فإننا نعرف أن جميع قيم الجيب تقع في الفترة $[-1,1]$، ولذلك فإن الخطأ الحاصل باستخدام التقريب 0.99995 لقيمة $\cos(0.01)$ يكون محدودًا بالقيمة

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 0.1\overline{6} \times 10^{-6} \sin\xi(0.01) \leq 0.1\overline{6} \times 10^{-6}$$

وبهـــذا فإن هذا التقريب 0.99995 يتفق مع الخانات الخمس الأولى على الأقل لقيمة $\cos(0.01)$

ويكون

$$0.99994983 < 0.99995 - 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \leq \cos(0.01) \leq 0.99995 + 0.1\bar{6} \times 10^{-6} < 0.99995017$$

إن حد الخطأ أكبر بكثير من الخطأ الحقيقي، وهذا يُعزى جزئيًّا إلى استخدام حد غير دقيق (ضعيف) للقيمة $|\sin\xi(0.01)|$. يمكن برهنة أن $|\sin\xi(0.01)| \leq |x|$ لجميع قيم x.

بما أن $0 \leq \xi < 0.01$، فبإمكاننا استخدام حقيقة أن $|\sin\xi(0.01)| \leq 0.01$ في صيغة الخطأ، ومن ثم نحصل على الحد $0.1\bar{6} \times 10^{-8}$.

(ب) بما أن $f'''(0) = 0$ فإن كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة مع حد الباقي حول $x_0 = 0$ هو

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 \cos\tilde{\xi}(x)$$

حيث إن $0 < \tilde{\xi}(x) < 0.01$. تبقى كثيرة الحدود المُقرِّبة نفسها، ويبقى التقريب 0.99995 ولكن لدينا الآن دقة أفضل بكثير. وبما أن $|\cos\tilde{\xi}(x)| \leq 1$ لقيم x جميعها يكون لدينا

$$\left|\tfrac{1}{24}x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\right| \leq \tfrac{1}{24}(0.01)^4(1) < 4.2 \times 10^{-10}$$

ولذلك

$$|\cos(0.01) - 0.99995| \leq 4.2 \times 10^{-10}$$

و

$$0.99994999958 = 0.99995 - 4.2 \times 10^{-10} \leq \cos(0.01) \leq 0.99995 + 4.2 \times 10^{-10} = 0.99995000042$$

يفسر أول جزأين من المثال هدفي التحليل العددي:

(i) إيجاد تقريب لحل مسألة معطاة.

(ii) إيجاد حد لخطأ التقريب.

لقد أعطت كثيرات حدود تايلور الإجابة نفسها للمطلوب (i)، ولكن كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة أعطت إجابة للمطلوب (ii) أفضل كثيرًا من إجابة كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية.

(ج) إن استخدام كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة يعطي

$$\int_0^{0.1} \cos x\,dx = \int_0^{0.1}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)dx + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{0.1} + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\,dx$$

$$= 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\,dx$$

وعندئذ

$$\int_0^{0.1} \cos x\,dx \approx 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 = 0.0998\bar{3}$$

يحدّد حد الخطأ في التقريب من تكامل حد الباقي لتايلور واستخدام حقيقة أن $|\cos\tilde{\xi}(x)| \le 1$ لقيم x جميعها حيث

$$\frac{1}{24}\left|\int_0^{0.1} x^4\cos\tilde{\xi}(x)\right| \le \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4|\cos\tilde{\xi}(x)|\,dx$$

$$\le \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4\,dx = 8.\overline{3}\times 10^{-8}$$

وبما أن القيمة الحقيقية للتكامل هي

$$\int_0^{0.1}\cos x\,dx = \sin x\Big]_0^{0.1} = \sin 0.1 = 0.099833416647$$

فإن الخطأ الحقيقي لهذا التقريب هو 8.3314×10^{-8}، وهو ضمن حدّ الخطأ.

■

ويمكننا استخدام CAS في المثال (3).

باستخدام Maple، نعرّف f كما يلي:

```
>f:=cos(x);
```

إن Maple يسمح باستخدام عبارات متعددة متتالية في سطر واحد واستخدام (:) لإيقاف استجابات Maple. فعلى سبيل المثال نحصل على كثيرة حدود تايلور باستخدام

```
>s3:=taylor(f,x=0,4): p3:=convert(s3, polynom);
```

إن العبارة s3:=taylor(f,x=0,4) تحدد كثيرة حدود تايلور حول $x_0 = 0$ بأربعة حدود (الرتبة 3) والباقي المرتبط بها.

وتحوّل العبارة p3:=convert(s3, polynom) السلسلة s3 إلى كثيرة الحدود p3 بإسقاط الباقي.

ولكي نحصل على 11 منزلة في الجواب، ندخل

```
>Digits:=11;
```

ونجد قيمة $f(0.01)$, $P_3(0.01)$ و $|f(0.01) - P_3(0.01)|$ عن طريق

```
>y1:=evalf(subs(x=0.01,f));
>y2:=evalf(subs(x=0.01,p3));
>err:=abs(y1-y2);
```

هذا يعطينا $y_1 = f(0.01) = 0.99995000042,\ y_2 = P_3(0.01) = 0.99995000000,$

و $|f(0.01) - P_3(0.01)| = .42\times 10^{-9}$

للحصول على رسم مشابه للرسم المبين في شكل (10.1)، أدخل

```
>plot({f,p3},x=-Pi..Pi);
```

إن أوامر التكامل هي

```
>q1:=int(f,x=0..0.1);
>q2:=int(p3,x=0..0.1);
>err:=abs(q1-q2);
```

وتعطي القيم

$$q_1 = \int_0^{0.1} f(x)\,dx = 0.099833416647 \quad \text{و} \quad q_2 = \int_0^{0.1} P_3(x)\,dx = 0.099833333333$$

بخطأ مقداره $0.83314\times 10^{-7} = 8.3314\times 10^{-8}$.

إن الفقرتين (أ) و (ب) في المثال تدلان على كيفية إعطاء تقنيتي التقريب نفسه، لكنهما

تختلفـان في درجة الدقة. تذكّر أن تحديـد التقريب جزء واحد من هدفنا، وأن الجزء الذي لا يقل عنه أهمية هو إيجاد حد لخطأ التقريب.

EXERCISE SET　　مجموعة التمارين 1.1

1. بيّن أن كلاً من الصيغ الآتية لها حل واحد على الأقل في الفترات المعطاة:

أ. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ $[0.2, 0.3]$ و $[1.2, 1.3]$

ب. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ $[1, 2]$ و $[e, 4]$

ج. $2x\cos(2x) - (x-2)^2 = 0$ $[2, 3]$ و $[3, 4]$

د. $x - (\ln x)^x = 0$ $[4, 5]$

2. أوجد فترات تحتوي على حلول للصيغ الآتية:

أ. $x - 3^{-x} = 0$　　ب. $4x^2 - e^x = 0$

ج. $x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$　　د. $x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101 = 0$

3. بين أن $f'(x)$ يكون صفرًا على الأقل مرّة واحدة في الفترة المعطاة:

أ. $f(x) = 1 - e^x + (e-1)\sin((\pi/2)x)$ $[0, 1]$

ب. $f(x) = (x-1)\tan x + x\sin \pi x$ $[0, 1]$

ج. $f(x) = x\sin \pi x - (x-2)\ln x$ $[1, 2]$

د. $f(x) = (x-2)\sin x \ln(x+2)$ $[-1, 3]$

4. أوجد $\max_{a\le x\le b}|f(x)|$ لكل من الدّوال والفترات الآتية:

أ. $f(x) = (2 - e^x + 2x)/3$ $[0, 1]$

ب. $f(x) = (4x-3)/(x^2-2x)$ $[0.5, 1]$

ج. $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ $[2, 4]$

د. $f(x) = 1 + e^{-\cos(x-1)}$ $[1, 2]$

5. استخدم مبرهنة القيمة الوسيطية ومبرهنة رول لإثبات أن الدّالة $f(x) = x^3 + 2x + k$ يقطع محور البيانات (محور x) مرّة واحدة فقط مهما كانت قيمة الثابت k.

6. ليكن $f \in C[a, b]$ و $f'(x)$ موجودًا على (a, b).

إذا كان $f'(x) \ne 0$ لكل $x \in (a,b)$ فأثبت وجود عدد واحد $p \in [a, b]$ على الأكثر يحقق $f(p) = 0$

7. ليكن $f(x) = x^3$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور $P_2(x)$ من الرتبة الثانية حول $x_0 = 0$.

ب. أوجد $R_2(0.5)$، والخطأ الحقيقي الناتج من استخدام $P_2(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$.

ج. كرّر الفقرة (أ) مستخدمًا $x_0 = 1$.

د. كرّر الفقرة (ب) مستخدمًا كثيرة الحدود من الفقرة (جـ).

8. أوجـد كثيـرة حدود تايلـور من الرتبـة الثالثة $P_3(x)$ للدّالـة $f(x) = \sqrt{x+1}$ حول $x_0 = 0$ قرّب القيم $\sqrt{0.5}, \sqrt{0.75}, \sqrt{1.25}, \sqrt{1.5}$ باستخدام $P_3(x)$، وأوجد الأخطاء الحقيقية.

9. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية $P_2(x)$ للدّالة $f(x) = e^x\cos x$ حول $x_0 = 0$.

أ. اسـتخدم $P_2(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$ أوجد الحد الأعلى للخطأ $|f(0.5) - P_2(0.5)|$ مستخدمًا صيغة الخطأ، وقارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

ب. أوجد حدًّا للخطأ $|f(x) - P_2(x)|$ الناتج عن استخدام $P_2(x)$ لتقريب $f(x)$ على الفترة $[0, 1]$.

ج. قرّب $\int_0^1 f(x)\,dx$ مستخدمًا $\int_0^1 P_2(x)\,dx$.

د. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في الفقرة (ج) مستخدمًا $\int_0^1 |R_2(x)\ dx|$، وقارن ذلك الحد بالخطأ الحقيقي.

10. كرّر المطلوب في التمرين (9) مستخدمًا $x_0 = \pi/6$.

11. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة $P_3(x)$ للدّالة $f(x) = (x-1)\ln x$ حول $x_0 = 1$.

أ. استخدم $P_3(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$، جد حدًّا أعلى للخطأ $|f(0.5) - P_3(0.5)|$ مستخدمًا صيغة الخطأ، ثم قارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

ب. أوجد حدًّا للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ الناتج من استخدام $P_3(x)$ لتقريب $f(x)$ على الفترة $[0.5, 1.5]$.

ج. قرّب $\int_{0.5}^{1.5} f(x)\ dx$ باستخدام $\int_{0.5}^{1.5} P_3(x)\ dx$.

د. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في (جـ) باستخدام $\int_{0.5}^{1.5} |R_3(x)\ dx|$، وقارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

12. ليكن $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ و $x_0 = 0$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة $P_3(x)$، واستخدمه لتقريب $f(0.4)$.

ب. استخدم صيغة الخطأ في مبرهنة تايلور لإيجاد حد أعلى للخطأ $|f(0.4) - P_3(0.4)|$ واحسب الخطأ الحقيقي.

ج. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$، واستخدمه لتقريب $f(0.4)$.

د. استخدم صيغة الخطأ في مبرهنة تايلور لإيجاد حد أعلى للخطأ $|f(0.4) - P_4(0.4)|$، واحسب الخطأ الحقيقي.

13. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$ للدّالة $f(x) = xe^{x^2}$ حول $x_0 = 0$.

أ. جد حدًّا أعلى للمقدار $|f(x) - P_4(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 0.4$.

ب. قرّب $\int_0^{0.4} f(x)\ dx$ مستخدمًا $\int_0^{0.4} P_4(x)\ dx$.

جـ. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في (ب) باستخدام $\int_0^{0.4} P_4(x)\ dx$.

د. قرّب $f'(0.2)$ باستخدام $P_4'(0.2)$ وأوجد الخطأ.

14. استخدم حد الخطأ لكثيرة حدود تايلور لتقدير الخطأ الناتج من استخدام $\sin x \approx x$ في تقدير $\sin 1^\circ$.

15. استخدم كثيرة حدود تايلور حول $\pi/4$ لتقريب $\cos 42^\circ$ بدرجة دقة 10^{-6}.

16. ليكن $f(x) = e^{x/2}\sin(x/3)$، استخدم مابل **Maple** لإيجاد ما يأتي:

أ. كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الثالثة $P_3(x)$.

ب. $f^{(4)}(x)$ وحدًّا للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ على $[0, 1]$.

17. ليكن $f(x) = \ln(x^2+2)$، استخدم مابل **Maple** لإيجاد ما يأتي:

أ. كثيرة حدود تايلور $P_3(x)$ لنشر f حول $x_0 = 1$.

ب. القيمة العظمى للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

جـ. كثيرة حدود ماكلورين $\tilde{P}_3(x)$ للدّالة f.

د. القيمة العظمى للخطأ $|f(x) - \tilde{P}_3(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

هـ. هل التقريب $P_3(0)$ للقيمة $f(0)$ أفضل من التقريب $\tilde{P}_3(1)$ للقيمة $f(1)$؟

18. ليكن $f(x) = (1-x)^{-1}$ و $x_0 = 0$، أوجد كثيرة حدود تايلور $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x)$ حول x_0، وأوجد قيمة n الضرورية ليكون $P_n(x)$ تقريبًا للدّالة $f(x)$ ضمن 10^{-6} على الفترة $[0, 0.5]$.

19. ليكن $f(x) = e^x$ و $x_0 = 0$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x)$ حول x_0.

ب. أوجد قيمة n الضرورية ليكون $P_n(x)$ تقريبًا للدّالة $f(x)$ ضمن 10^{-6} على الفترة $[0, 0.5]$.

20. أوجد كثيرة حدود ماكلورين $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x) = \arctan x$.

21. استخدم $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ لتقدير $f(x) = \cos x$ على الفترة $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. وأوجد حدًّا لأكبر خطأ.

22. إن كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدّالة f على x_0 يُشار إليها بعض الأحيان بأنها كثيرة الحدود من الأعلى رتبة n التي تعطي "أفضل" تقريب للدّالة f بالقرب من x_0.

أ. اشرح سبب كون هذا الوصف دقيقًا.

ب. أوجد كثيرة الحدود التربيعية التي تعطي أفضل تقريب للدّالة f بالقرب من $x_0 = 1$ إذا كانت صيغة خط المماس عند $x_0 = 1$ هي $y = 4x - 1$ وكان $f''(1) = 6$.

23. إذا أعطى استخدام كثيرة حدود ماكلورين للدّالة e^x التقريب (2.5) لقيمة e، وتحدّد حد الخطأ في هذا التقريب بالقيمة $E = \frac{1}{6}$ فأوجد حدًّا للخطأ الناتج في E.

24. إن دالّة الخطأ المعرف بالصيغة $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

يعطي احتمالًا بأن أي واحدة من سلسلة التجارب ستقع ضمن x من وحدات المعدل، مفترضين أن للمحاولات توزيعًا طبيعيًّا بمعدل صفر، وانحرافًا معياريًّا $\sqrt{2}/2$. ولا يمكن تقييم هذا التكامل بدلالة دوال ابتدائية، لذا يتعيّن استخدام أسلوب التقريب.

أ. اعمل تكامل سلسلة ماكلورين لـ e^{-x^2} لإثبات

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

ب. يمكن التعبير عن دالّة الخطأ أيضًا بالصيغة

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

تحقّق من أن السلسلتين تتفقان عند $k = 1, 2, 3, 4$ [إرشاد: استخدم سلسلة ماكلورين لـ e^{-x^2}].

ج. استخدم السلسلة في الفقرة (أ) لتقريب $\mathrm{erf}(1)$ إلى 10^{-7}.

د. استخدم العدد نفسه من الحدود على صورة الفقرة (ج) لتقريب $\mathrm{erf}(1)$ مع السلسلة في الفقرة (ب).

هـ. وضّح سبب ظهور صعوبات عند استخدام السلسلة في الفقرة (ب) لتقريب $\mathrm{erf}(x)$.

25. الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تحقّق شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على الفترة $[a, b]$ إذا كان $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ لكل $x, y \in [a, b]$.

أ. أثبت أنه إذا حقّق f شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على فترة ما $[a, b]$، فإن $f \in C[a, b]$.

ب. أثبت أنه إذا كان لـ f مشتقة محددة في L على $[a, b]$، فإن f يحقّق شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على الفترة $[a, b]$.

ج. أعط مثالًا لدالّة تكون متصلةً على فترة مغلقة، لكنه لا يحقّق شرط لبشتز على الفترة.

26. افترض $f \in C[a, b]$، حيث x_1 و x_2 ضمن $[a, b]$، وأن c_1 و c_2 ثابتان موجبان. أثبت وجود العدد ξ ما بين x_1 و x_2 مع

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2}$$

27. ليكن $f \in C[a, b]$، وليكن p في الفترة المفتوحة (a, b).

أ. افترض $f(p) \ne 0$. أثبت وجود $\delta > 0$ مع $f(x) \ne 0$ لكل x ضمن $[p - \delta, p + \delta]$ حيث إن $[p - \delta, p + \delta]$ جزئية من $[a, b]$.

ب. افترض $f(p) = 0$ و $k > 0$، أثبت وجود $\delta > 0$ مع $|f(x)| \le k$ لكل x في الفترة $[p - \delta, p + \delta]$ حيث إن $[p - \delta, p + \delta]$ جزئية من $[a, b]$.

2.1 تدوير الأخطاء والحساب بالحاسوب Roundoff Error and Computer Arithmetic

إن الحساب الذي يتم باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب يختلف عن الحساب في مقررات الجبر والتفاضل والتكامل. ومن الممكن التوقع – بناءً على خبرتك السابقة – أن العبارات الآتية صحيحة دائمًا، مثل $2+2=4$, $4 \cdot 8 = 32$ و $(\sqrt{3})^2 = 3$)، ففي الحساب العادي نتوقع نتائج صحيحة للعمليتين $2+2=4$ و $4 \cdot 8 = 32$، ولكن لا نحصل على النتيجة $(\sqrt{3})^2 = 3$ بدقة كاملة. ولكي نفهم لماذا يكون هذا الأمر صحيحًا، يتعين علينا أن نستكشف عالم الحساب ذا الخانات (أو المراتب) المنتهية.

توقع ظهور خطأ بسبب التقريب حيثما تكون الحسابات باستخدام أعداد ليست من قوى العدد 2. إن إبقاء هذا الخطأ تحت السيطرة أمر مهم جدًا خصوصًا عندما يكون عدد الحسابات كبيرًا.

إننا نسمح في عالم الرياضيات التقليدية باستخدام أعداد ذوات خانات (أو مراتب) غير منتهية، فالحساب الذي نستخدمه في هذا العالم يُعرّف $\sqrt{3}$ على أنه ذلك العدد الموجب الوحيد الذي لو ضربته في نفسه لأنتج العدد 3. ولكن في العالم الحاسوبي، فإن كل عدد قابل للتمثيل يحوي عددًا ثابتًا ومنتهيًا من الأعداد. وهذا يعني على سبيل المثال أن الأعداد النسبية – وربما ليس جميعها – يمكن تمثيلها بدقة. وبما أن $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي، فإنه يعطي تمثيلًا تقريبيًا، ومن ثم لا يكون مربعه 3 تمامًا، مع أنه سيكون غالبًا قريبًا من 3 على نحو كافٍ بحيث يجعله مقبولًا في معظم الأحوال. وأخيرًا يكون هذا الحساب الآلي في معظم الأحيان مُرضيًا، ويمرّ من دون ملاحظة أو تحفظ، ولكن في بعض الأحيان تحدث مشكلات بسبب هذا الاختلاف.

إن الخطأ الناتج عند استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب لإيجاد حسابات عددية حقيقية يُسمى خطأ (التقريب أو التدوير). ويحدث هذا الخطأ؛ لأن إجراء الحساب بالآلة يتضمن أعدادًا ذات عدد منتهٍ من الخانات، مما يؤدي إلى إجراء الحسابات باستخدام التمثيل التقريبي للأعداد. وفي الحاسوب العادي تستخدم مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية الصغيرة نسبيًا لتمثيل جميع الأعداد الحقيقية، وتحتوي هذه المجموعة على الأعداد النسبية الموجبة والسالبة فقط، وتحتفظ بالجزء الكسري مع جزء أسي.

نشرت IEEE (معهد مهندسي الكهرباء والإلكترونيات) في عام 1985 تقريرًا بعنوان

Binary Floating Point Arithmetic Standard 754 - 1985

"معايير 1985 – 754 للحساب باستخدام النقاط الثنائية العائمة" لقد صُمّمت النماذج لاستخدام الدقة المنفردة والثنائية والممتدة، وتُعتمد هذه المعايير على نحو عام من قبل صانعي الحواسيب الصغيرة التي تستخدم الأنظمة الثنائية. وعلى سبيل المثال ينفذ المعالج المساعد العددي للحواسيب الشخصية تمثيلًا من 64–بت (منزلة ثنائية) للعدد الحقيقي يسمى الحقيقي الطويل long real البت الأول هو دليل الإشارة، ويرمز له بـ S. حيث يُتبَعُ بأس من 11 بت، c، يسمى المميز characteristic، وجزء من 52 بت، f، يسمى الكسر العشري mantissa. والأساس للأس هو 2.

وبما أن 52 منزلة ثنائية تقابل ما بين 15 و 16 منزلة عشرية، يمكننا افتراض عدد ضمن هذا النظام ذي 15 منزلة عشرية من الدقة على الأقل. الأس ذو 11 منزلة ثنائية يعطي الأعداد

0 ولغاية $2047 = 2^{11} - 1$. وعلى أي حال فاستخدام الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للأس لن يمثّل الأعداد الصغيرة بدقة. ولضمان كون الأعداد الصغيرة متساوية التمثيل؛ فإن 1023 تطرح من المميز، فيكون مدى الأس في الواقع من 1023 – 1024.

ولحفظ ما خُزّن وتوفير تمثيل وحيد لكل عدد ذي نقطة عائمة؛ تُفترض معيارية ما. ويعطي استخدام هذا النظام عددًا ذا نقطة عائمة بصيغة

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f)$$

افترض على سبيل المثال عدد الحاسبة

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000000

إن أول بت من اليسار هو 0، الذي يعني أن العدد موجب، ثم إن 11 بت التالية 10000000011 تعطي المميز وهي مكافئة للعدد العشري

$$c = 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^9 + \cdots + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1024 + 2 + 1 = 1027$$

إن الجزء الأسي من العدد يكون $2^{1027-1023} = 2^4$. وآخر 52 بت تصف كون العشري هو

$$f = 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{12}$$

والنتيجة أن عدد الحاسبة هذا يمثل بكفاءة العدد العشري

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f) = (-1)^0\cdot 2^{1027-1023}\left(1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{256}+\frac{1}{4096}\right)\right)$$
$$= 27.56640625$$

على أي حال، أصغر عدد حاسبة تالٍ هو

0 10000000011 1011100100001111111111111111111111111111111111111111

وأكبر عدد حاسبة تالٍ هو

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000001

هذا يعني أن عدد الحاسبة الأصلي لا يمثل 27.56640625 فقط، وإنما يمثّل نصف الأعداد الحقيقية أيضًا التي هي ما بين 27.56640625 وأقرب عددي حاسبة مجاورين. ولكي نكون دقيقين؛ فإنه يمثّل أي عدد حقيقي في الفترة

[27.5664062499999982236431605997495353221893310546875

27.5664062500000017763568394002504646778106689453125)

إن أصغر عدد موجب معياري يمكن تمثيله، له $s = 0, c = 1$ و $f = 0$ وهو مكافئ لـ

$$2^{-1022}\cdot(1+0) \approx 0.2225\times 10^{-307}$$

وإن أكبر عدد، له $s = 0, c = 2046$ و $f = 1 - 2^{-52}$ وهو مكافئ لـ

$$2^{1023}\cdot(2-2^{-52}) \approx 0.17977\times 10^{309}$$

الأعداد التي تظهر في الحسابات، ولها قيمة تقل عن $2^{-1022}\cdot(1+0)$ تنتج نقصًا، وعادة ما تتجه قيمتها إلى الصفر. أمّا الأعداد التي قيمتها أكبر من $2^{1023}\cdot(2-2^{-52})$ تنتج زيادة، وعادة ما تؤول بالحسابات إلى أن تقف (ما لم يعطى البرنامج أوامر لاكتشاف ذلك). كما يجب

ملاحظة وجود تمثيلين للعدد صفر إحداهما صفر موجب عندما $s = 0$, $c = 0$ و $f = 0$، وقيمة سالبة للصفر عندما $s = 1$, $c = 0$ و $f = 0$.

إن استخدام الأعداد الثنائية يميل إلى إخفاء الصعوبات الحسابية التي تنتج عن استخدام مجموعة منتهية من الأعداد الآتية لتمثيل جميع الأعداد الحقيقية.

ولاختبار هذه المسائل سنفترض – من أجل التسهيل – أن الأعداد الآتية تمثل بالطريقة المعيارية للنقطة العائمة العشرية على الصورة

$$\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n \text{ ، } 1 \le d_1 \le 9 \text{ و } 0 \le d_i \le 9$$

إن الخطأ الناتج عن استخدام التمثيل بالنقطة العائمة بدلاً من العدد نفسه يسمى خطأ التدوير، سواءً أكان التمثيل يستخدم القطع أم التدوير.

لكل $i = 2,\ldots, k$ نسمي النقاط الممثّلة بهذا الشكل k-digit أعدادًا آلية عشرية ذات k من الخانات. إن أي عدد حقيقي موجب ضمن المدى العددي للآلة يمكن أن يمثّل معياريًا على الصورة

$$y = 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^n$$

ونحصل على تمثيل y على صورة النقطة العائمة، ويعبّر عنها بالرمز $fl(y)$ عن طريق قطع خانات تمثيل y عند المنزلة k، هناك طريقتان لتنفيذ هذا القطع:

- تسمّى إحدى الطريقتين القطعَ **Chopping**، وتنفّذ بقطع الخانات $d_{k+1} d_{k+2} \ldots$ وتنتج هذه الطريقة

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n$$

- وتسمّى الطريقة الثانية التقريبَ **rounding**، وتنفّذ بإضافة $5 \times 10^{n-(k+1)}$ إلى y، ثم تقطع النتيجة لنحصل على عدد في الصورة

$$fl(y) = 0.\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k \times 10^n$$

ولذلك عند التقريب إذا كان $d_{k+1} \ge 5$ نضيف 1 إلى d_k لنحصل على $fl(y)$، أي أننا ندوّر (نقرّب) إلى أعلى، وعندما يكون $d_{k+1} < 5$، فإننا نقطع الخانات جميعها بعد المنزلة d_k، أي أننا ندوّر إلى أسفل. وأخيرًا إذا كان التقريب إلى أسفل فإن $\delta_i = d_i$ لكل $i = 1, 2,\ldots, k$. وعلى كل حال إذا كان التقريب إلى أعلى فإن الخانات (وحتى الأسّ) يمكن أن تتغير.

مثال 1

إن للعدد π تمثيلاً عشريًا على الصورة $\pi = 3.14159265\ldots$ وعند كتابته على الصورة العشرية المعيارية يكون لدينا $\pi = 0.314159265\ldots \times 10^1$، إن كتابة π على صورة النقطة العائمة مستخدمًا القطع عند المنزلة الخامسة يكون

$$fl(\pi) = 0.31415 \times 10^1 = 3.1415$$

وبالنظر إلى المنزلة السادسة في التمثيل العشري للعدد π نجد أنها 9، ولذلك يكون تمثيل π بالنقطة العائمة مستخدمًا تدوير المنزلة الخامسة هو

$$fl(\pi) = (0.31415 + 0.00001) \times 10^1 = 3.1416$$ ■

يُعدّ الخطأ النسبي عمومًا مقياسًا للدقة أفضل من الخطأ المطلق، لأن الأول يأخذ في الحسبان حجم العدد المقرّب.

ويصف التعريف الآتي طريقتين لقياس أخطاء التقريب.

تعريف 15.1

إذا كان P^* تقريبًا إلى P، فإن الخطأ المطلق يكون $|P-P^*|$، والخطأ النسبي هو $|P-P^*|/|P|$، على أن $P \neq 0$. ■

مثال 2

احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في المثال الآتي:

أ. ليكن $P = 0.3000 \times 10^1$، $P^* = 0.3100 \times 10^1$؛ فإن الخطأ المطلق يساوي 0.1، والخطأ النسبي يساوي $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

ب. ليكن $P = 0.3000 \times 10^{-3}$ و $P^* = 0.3100 \times 10^{-3}$؛ فإن الخطأ المطلق يكون 0.1×10^{-4}، والخطأ النسبي يكون $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

ج. ليكن $P = 0.3000 \times 10^4$ و $P^* = 0.3100 \times 10^4$؛ فإن الخطأ المطلق يكون 0.1×10^3، والخطأ النسبي مرة ثانية يكون $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

يُظهر هذا المثال أن الخطأ النسبي نفسه $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$ يحدث مقابل أخطاء مطلقة متعددة. وبوصفه مقياسًا للدقة، فإن الخطأ المطلق يمكن أن يكون مضلِّلًا، ويكون الخطأ النسبي ذا معنًى أفضل؛ لأن الخطأ النسبي يأخذ حجم القيمة في الحسبان. ■

لا نستطيع إيجاد قيمة صحيحة للخطأ الحقيقي الناتج عن التقريب في كثير من الأحيان، وبدلًا من ذلك نجد حدًّا للخطأ، وهو الذي يعطينا قيمة الخطأ الأسوأ.

يستخدم التعريف الآتي الخطأ النسبي ليعطي مقياسًا لأرقام دقة التقريب المعنوية.

تعريف 16.1

يقال: إن العدد P^* يكون تقريبًا للعدد P بأرقام معنوية عددها t، إذا كان t أكبر عدد صحيح غير سالب يكون لدينا

$$\frac{|P-P^*|}{|P|} \leq 5 \times 10^{-t}$$
■

إن هذا التعريف أدق ويعطي مفهومًا متصلًا.

يُستخدم مصطلح الأرقام المعنوية لوصف عدد الخانات العشرية التي يظهر أنها صحيحة على نحو واسع.

يوضح الجدول (1.1) وباستخدام قيم متعددة للعدد P الطبيعة المتصلة للأرقام المعنوية عن طريق تسجيل أصغر حد أعلى لقيمة $|P-P^*|$، ويعبّر عنها بالرمز $\max|P-P^*|$، عندما تتوافق P^* مع P لأربعة أرقام معنوية.

جدول 1.1

P	0.1	0.5	100	1000	5000	9990	10000
$\max\|P-P^*\|$	0.00005	0.00025	0.05	0.5	2.5	4.995	5

وبالرجوع إلى التمثيل الآلي للأعداد، نجد أن التمثيل بالنقطة العائمة $fl(y)$ للعدد y يكون له الخطأ النسبي

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right|$$

إذا استخدم k من الخانات العشرية وطريقة القطع للتمثيل الآلي للعدد

$$y = 0.d_1d_2 \ldots d_kd_{k+1} \ldots \times 10^n$$

فإن

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| = \left|\frac{0.d_1d_2 \ldots d_kd_{k+1} \ldots \times 10^n - 0.d_1d_2 \ldots d_k \times 10^n}{0.d_1d_2 \ldots \times 10^n}\right|$$

$$= \left|\frac{0.d_{k+1}d_{k+2} \ldots \times 10^{n-k}}{0.d_1d_2 \ldots \times 10^n}\right| = \left|\frac{0.d_{k+1}d_{k+2} \ldots}{0.d_1d_2 \ldots}\right| \times 10^{-k}$$

وبما أن $d_1 \neq 0$، فإن أصغر قيمة للمقام تساوي 0.1، الحد الأعلى للبسط هو 1، وعليه يكون

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} = 10^{-k+1}$$

إن حد الخطأ النسبي باستخدام الحساب التقريبي ذي k من الخانات هو $0.5 \times 10^{-k+1}$ بطريقة مماثلة. (انظر التمرين 24).

لاحظ أن حدود الخطأ النسبي باستخدام الحساب ذي k من الخانات تكون مستقلة عن العدد الذي تمثِّلهُ. وتعود هذه النتيجة إلى الطريقة التي تتوَّزع بها الأعداد الآلية على طول الخط الحقيقي. إن العدد نفسه من الأعداد الآلية العشرية يستخدم لتمثيل الفترات $[0.1, 1]$،$[1, 10]$ $[10, 100]$؛ بسبب صيغة المؤشر الأسيّة، إن عدد الأعداد الآلية العشرية في الفترة $[10^n, 10^{n+1}]$ ثابت للأعداد الصحيحة جميعها n ضمن حدود الآلة.

بالإضافة إلى التمثيل غير الصحيح للأعداد، فإن الحساب المنفّذ في الحاسوب غير دقيق. وهو ينطوي – في الحساب – على التعامل بالأعداد الثنائية بعمليات سحب أو بعمليات منطقية متعددة. وبما أن الميكانيكيات الفعلية لهذه العمليات لا علاقة لها بهذا التمثيل، فإننا سننشئ تقريب الحساب بالحاسوب الخاص بنا، وعلى الرغم من أن الحساب الذي ننشئه لا يعطي الصورة الصحيحة، إلا أنه يكفي لشرح المشكلات التي تظهر.

ليكن $fl(x)$، $fl(y)$ التمثيل بالنقطة العائمة لكل من الأعداد الحقيقية x، y، وأن الرموز $\oplus, \ominus, \otimes, \oplus$ تمثِّل عمليات الآلة للجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على التوالي. وسنفترض حسابًا مبنيًّا على عدد محدود من الخانات معرّفًا كالآتي:

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y)), \qquad x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y))$$

$$x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y)), \qquad x \oplus y = fl(fl(x) \div fl(y))$$

إن هذا الحساب يتطابق مع استخدام الحساب العادي للتمثيل بالنقطة العائمة للعددين x، y ثم تحويل النتيجة الصحيحة لتمثيلها بطريقة "النقطة العائمة ذات العدد المحدود من الخانات".

إن حساب التقريب قابل للاستخدام في CAS. وإن أمر مابل Maple

```
>Digits:=t;
```

يؤدي إلى تدوير الحساب جميعه إلى t من الخانات. فعلى سبيل المثال توجد قيمة $fl(fl(x)+fl(y))$ باستخدام التقريب بعدد t من الخانات عن طريق الأمر

```
>evalf(evalf(x)+evalf(y));
```

إن استخدام الحساب ذي t من الخانات بطريقة القطع أكثر صعوبة، ويتطلب خطوات متتالية أو طريقة. ويبحث تمرين (27) هذه المسألة.

مثال 3 ليكن $x = \frac{5}{7}, y = \frac{1}{3}$ وأن طريقة القطع ذات الخانات الخمس هي المستخدمة في الحسابات المشتملة على x ، y. ويعطي الجدول (2.1) قيم العمليات شبه الحاسوبية على $fl(x) = 0.71428 \times 10^0$ و $fl(y) = 0.33333 \times 10^0$. ■

وبما أن أعلى قيمة للخطأ النسبي للعمليات في المثال (3) هي 0.267×10^{-4}، فإن الحساب يعطي نتائج مقبولة ذات 5 خانات. على كل حال افترض أن لدينا $u = 0.714251$، $v = 98765.9$ و $w = 0.111111 \times 10^{-4}$ وأخيرًا يكون $fl(u) = 0.71425 \times 10^0$ ، $fl(v) = 0.98765 \times 10^5$ ، $fl(w) = 0.11111 \times 10^{-4}$.

جدول 2.1

العملية	النتيجة	القيمة الفعلية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \oplus y$	0.10476×10^{1}	$22/21$	0.190×10^{-4}	0.182×10^{-4}
$x \ominus y$	0.38095×10^{0}	$8/21$	0.238×10^{-5}	0.625×10^{-5}
$x \otimes y$	0.23809×10^{0}	$5/21$	0.524×10^{-5}	0.220×10^{-4}
$x \oplus y$	0.21428×10^{1}	$15/7$	0.571×10^{-4}	0.267×10^{-4}

(لقد اختيرت هذه الأعداد لتوضيح بعض المشكلات التي يمكن أن تظهر في الحساب ذي الخانات المنتهية.)

نجد أن $x \ominus u$ تعطي خطأً مطلقًا صغيرًا في جدول (3.1)، ولكنها تعطي خطأً نسبيًّا كبيرًا. إن القسمة على عدد صغير w أو الضرب في العدد الكبير v يكبر الخطأ المطلق دون تعديل الخطأ النسبي. وإن جمع الأعداد الصغيرة والكبيرة u و v يعطي خطأً مطلقًا كبيرًا؛ ولكن ليس خطأً نسبيًّا كبيرًا.

جدول 3.1

العملية	النتيجة	القيمة الفعلية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \ominus u$	0.30000×10^{-4}	0.34714×10^{-4}	0.471×10^{-5}	0.136
$(x \ominus u) \oplus \mathrm{w}$	0.27000×10^{1}	0.31243×10^{1}	0.424	0.136
$(x \ominus u) \otimes \mathrm{v}$	0.29629×10^{1}	0.34285×10^{1}	0.465	0.136
$u \otimes \mathrm{v}$	0.98765×10^{5}	0.98766×10^{5}	0.161×10^{1}	0.163×10^{-4}

إن واحدًا من أكثر الحسابات التي تنتج خطأً هو الحساب الذي يتعامل مع حذف الأعداد المعنوية عند طرح أعداد متساوية تقريبًا. افترض أن عددين متساويان تقريبًا x، y حيث $x > y$ وافترض أن تمثيلهما باستخدام k من الخانات هو

$$fl(x) = 0.d_1 d_2 \ldots d_p \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \ldots \alpha_k \times 10^n$$

و

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_p \beta_{p+1} \beta_{p+2} \ldots \beta_k \times 10^n$$

إن شكل النقطة العائمة للمقدار $x - y$ هو

$$fl(fl(x) - fl(y)) = 0.\sigma_{p+1} \sigma_{p+2} \ldots \sigma_k \times 10^{n-p}$$

حيث إن

$$0.\sigma_{p+1} \sigma_{p+2} \ldots \sigma_k = 0.\alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \ldots \alpha_k - 0.\beta_{p+1} \beta_{p+2} \ldots \beta_k$$

إن العدد بصيغة النقطة العائمة المستخدم لتمثيل $x - y$ يحوي $k - p$ عددًا معنويًّا على الأكثر. على كل حال وفي معظم آلات الحساب، فإن $x - y$ يعطي عدد k عددًا معنويًّا تاركًا الأعداد الأخيرة التي عددها p إما أصفارًا وإما محددة عشوائيًّا، إن أي حسابات إضافية للمقدار $x - y$ تسترجع مسألة الحفاظ على $k - p$ من الأعداد المعنوية؛ لأن أي سلسلة من الحسابات لا تكون أدق من الحلقة الأضعف فيها.

إذا أنتج حساب أو تمثيل ذو عدد منتهٍ من الأعداد خطأً، فإن هذا الخطأ يكبر عند القسمة على عدد صغير (أو على نحو مكافئ عند الضرب في عدد كبير). افترض على سبيل المثال أن

للعدد z التقريب $z+\delta$ ذا العدد المحدود من الأعداد، حيث حصلنا على الخطأ δ عن طريق التمثيل أو عن طريق حساب سابق.

الآن إذا قسمنا على $\varepsilon = 10^{-n}$، حيث $n > 0$ فإن

$$\frac{z}{\varepsilon} \approx fl\left(\frac{fl(z)}{fl(\varepsilon)}\right) = (z+\delta)\times 10^{n}$$

وهكذا فإن الخطأ المطلق في هذا التقريب $|\delta| \times 10^{n}$ هو الخطأ المطلق الأصلي $|\delta|$، مضروبًا في العدد 10^{n}.

مثال 4 ليكن $p = 0.54617$ و $q = 0.54601$، فإن القيمة الصحيحة كحاصل طرح $r = p - q$ هي $r = 0.00016$. افترض أن عملية الطرح قد أُجريت باستخدام الحساب بأربع خانات، وأن تدوير p و q لأربع خانات يعطينا $p^* = 0.5462$، $q^* = 0.5460$ على التوالي ويعطينا $r^* = p^* - q^* = 0.0002$ بوصفه تقريبًا للعدد r باستخدام أربع خانات.

وبما أن

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{|0.00016 - 0.0002|}{|0.00016|} = 0.25$$

فإن النتيجة تحمل عددًا معنويًا واحدًا، حيث كانت p^*, q^* صحيحة لأربعة أرقام معنوية ولخمسة أرقام معنوية على التوالي.

إذا استخدمت طريقة القطع للحصول على أربع خانات، فإن التقريب لأربع خانات للأعداد p، q، r هو $p^* = 0.5461$, $q^* = 0.5460$, $r^* = p^* - q^* = 0.0001$ وهذا يعطينا

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{|0.00016 - 0.0001|}{|0.00016|} = 0.375$$

والذي ينتج دقة ذات عدد معنوي واحد. ■

ومن الممكن تجنب خطأ التقريب عن طريق تكرار صياغة المسألة كما هو موضح في المثال الآتي:

مثال 5 ينص قانون الصيغة التربيعية على أن جذري $ax^2 + bx + c = 0$ عندما $a \neq 0$ هما

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1.1)$$

إن جذري المعادلة التربيعية العامة x_1 و x_2 يرتبطان مع المعاملات بحسب المعادلات الآتية $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ إن هذه حالة خاصة من معادلات فايتيه Viète's formulas لمعاملات كثيرات الحدود.

طبّق القانون على الصيغة $x^2 + 62.10x + 1 = 0$ التي يكون جذراها المقرّبان (مستخدمًا حساب التقريب لأربع خانات) هما $x_1 = -0.01610723$، $x_2 = -62.08390$. في هذه الصيغة، b^2 أكبر بكثير من $4ac$، عندئذ فإن البسط في حساب x_1 يتضمن طرح عددين متساويين تقريبًا.

بما أن

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(62.10)^2 - (4.000)(1.000)(1.000)}$$
$$= \sqrt{3856. - 4.000} = \sqrt{3852.} = 62.06$$

ونحصل على

$$fl(x_1) = \frac{-62.10 + 62.06}{2.000} = \frac{-0.04000}{2.000} = -0.02000$$

وهو تقريب ضعيف للقيمة $x_1 = -0.01611$ بخطأ نسبي كبير

$$\frac{|-0.01611 + 0.02000|}{|-0.01611|} \approx 2.4 \times 10^{-1}$$

ومن جهة أخرى فإن حساب x_2 يتضمن جمع عددين متساويين تقريبًا هما $-b$ و $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ وهذا لا يشكل أي مشكلة؛ لأن

$$fl\,(x_2) = \frac{-62.10 - 62.06}{2.000} = \frac{-124.2}{2.000} = -62.10$$

يُنْتج الخطأ النسبي الصغير

$$\frac{|-62.08 + 62.10|}{|-62.08|} \approx 3.2 \times 10^{-4}$$

نغيّر قانون الصيغة التربيعية عن طريق جعل البسط عددًا نسبيًّا (بالضرب في المرافق) للحصول على تقريب أدق للعدد x_1 باستخدام التقريب ذي الأربع خانات، فيصبح

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}\right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

وبالتبسيط، نحصل على الصيغة التربيعية البديلة

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad (2.1)$$

باستخدام (2.1) نحصل على

$$fl\,(x_1) = \frac{-2.000}{62.10 + 62.06} = \frac{-2.000}{124.2} = -0.01610$$

الذي يحمل الخطأ النسبي الصغير 6.2×10^{-4} ■

يمكن تطبيق طريقة الضرب في المرافق لنحصل على الصيغة التربيعية البديلة للعدد x_2

$$x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad (3.1)$$

تستخدم هذه الصيغة إذا كان b عددًا سالبًا. على كل حال، لا يؤدي الاستخدام الخطأ للصيغة x_2 في المثال (5) إلى طرح عددين متساويين تقريبًا فقط، بل يؤدي أيضًا إلى القسمة على ناتج الطرح الصغير. إن عدم الدقة الناتج عن هذا التركيب يعطينا

$$fl\,(x_2) = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2.000}{62.10 - 62.06} = \frac{-2.000}{0.04000} = -50.00$$

بخطأ نسبيّ كبير هو 1.9×10^{-1}. ■

ويمكن تقليل عدم الدقة الناتجة عن خطأ التقريب عن طريق إعادة ترتيب العمليات الحسـابية وهذا ما يوضحه المثال الآتي.

مثال 6

أوجد قيمة $f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$ عند $x = 4.71$ مستخدمًا حساب الخانات الثلاث. يعطي جدول (4.1) النتائج الوسيطة في الحسابات. تحقّق من صحة هذه النتائج؛ للتأكد من أن فهمك للحساب بثلاث خانات صحيح. تذكر أن طريقة القطع لثلاث خانات تعطي بسهولة القيم الثلاث للخانات الثلاث الأولى من اليسار ودون أي تدوير، وتختلف جذريًّا عن القيم التي تحصل عليها بطريقة التقريب لثلاث خانات.

جدول 1.4

	x	x^2	x^3	$6.1x^2$	$3.2x$
المضبوط	4.71	22.1841	104.487111	135.32301	15.072
(القطع) ذو ثلاث منازل	4.71	22.1	104.	134.	15.0
(التدوير) ذو ثلاث منازل	4.71	22.2	105.	135.	15.1

تذكر وجوب إجراء القطع (أو التدوير) بعد كل عملية حساب.

ننظر إلى الحسابات التي قمنا بها لإيجاد قيمة x^3 باستخدام التقريب لثلاث خانات. ولتوضيح ذلك؛ نجد أولًا $x^2 = 4.71^2 = 22.1841$ وندوّرها إلى العدد 22.2 مستخدمين بعد ذلك قيمة x_2 هذه لإيجاد $x^3 = x^3 \cdot x = 22.2 \cdot 4.71 = 104.562$، وندور هذه القيمة إلى 105. أما الحساب الدقيق (دون قطع أو تدوير) فهو

$$f(4.71) = 104.487111 - 135.32301 + 15.072 + 1.5$$
$$= -14.263899$$

يكون باستخدام قطع الخانات الثلاث $f(4.71) = ((104. - 134.) + 15.0) + 1.5 = -13.5$

ويكون باستخدام التقريب لثلاث خانات $f(4.71) = ((105. - 135.) + 15.1) + 1.5 = -13.4$

وتكون الأخطاء النسبية لطريقتي الخانات الثلاث أعلاه على التوالي:

$$\left|\frac{-14.263899 + 13.5}{-14.263899}\right| \approx 0.05 \quad \text{و} \quad \left|\frac{-14.263899 + 13.4}{-14.263899}\right| \approx 0.06$$

for chopping (القطع) for rounding (التدوير)

توجد طريقة بديلة بكتابة $f(x)$ باستخدام الأقواس المتداخلة (nested) كما يأتي

$$f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5 = ((x - 6.1)x + 3.2)x + 1.5$$

وهذا يعطي طريقة القطع لثلاث خانات

$$f(4.71) = ((4.71 - 6.1)4.71 + 3.2)4.71 + 1.5 = -14.2$$

وتعطي طريقة التقريب لثلاث خانات 14.3-، والأخطاء النسبية الجديدة تكون

القطع لثلاث خانات

$$\left|\frac{-14.263899 + 14.2}{-14.263899}\right| \approx 0.0045$$

التقريب لثلاث خانات

$$\left|\frac{-14.263899 + 14.3}{-14.263899}\right| \approx 0.0025$$

إن استخدام الأقواس المتداخلة قد خفّض الخطأ النسبي للتقريب بالقطع إلى أقل من 10% مما

حصلنا عليه في الأصل. أما في حالة التقريب بالتدوير فقد كان التحسين أكثر ظهورًا، حيث حدث في المثال السابق أن انخفض الخطأ إلى أكثر من 95%. ■

يجب التعبير دائمًا عن كثيرات الحدود باستخدام الأقواس المتداخلة (nested) قبل إجراء الحسابات؛ لأن هذه الصيغة تجعل عدد العمليات الحسابية أقل ما يمكن.

إن تقليل الخطأ في مثال (6) كان بسبب تقليل العمليات الحسابية من أربع عمليات ضرب وثلاث عمليات جمع إلى عمليتي ضرب وثلاث عمليات جمع. وإن إحدى طرائق تقليل خطأ التقريب تكون بتقليل عدد العمليات الحسابية التي تنتج الخطأ.

مجموعة التمارين 2.1 EXERCISE SET

1. احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتج عن تقريب p بالقيمة p^*:

أ. $p = \pi,\ p^* = 22/7$ ب. $p = \pi,\ p^* = 3.1416$ ج. $p = e,\ p^* = 2.718$

د. $p = \sqrt{2},\ p^* = 1.414$ هـ. $p = e^{10},\ p^* = 22000$ و. $p = 10^\pi,\ p^* = 1400$

ز. $p = 8!,\ p^* = 39900$ ح. $p = 9!,\ p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$

2. أوجد أكبر فترة تقع فيها p^* لكي تقرّب p بخطأ نسبي حده الأعلى 10^{-4} لكل قيمة من قيم p:

أ. π ب. e ج. $\sqrt{2}$ د. $\sqrt[3]{7}$

3. افترض أن p^* يجب أن تقرّب p بخطأ نسبي حدُّه الأعلى 10^{-3}. أوجد أكبر فترة يجب أن تقع فيها p^* لكل قيمة p فيما يأتي:

أ. 150 ب. 900 ج. 1500 د. 90

4. أجرِ العمليات الحسابية الآتية:

(i) بصورة دقيقة.

(ii) مستخدمًا القطع لثلاث خانات.

(iii) مستخدمًا التقريب لثلاث خانات.

(iv) احسب الأخطاء النسبية في (ii) و (iii).

أ. $\frac{4}{5} + \frac{1}{3}$ ب. $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$ ج. $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) + \frac{3}{20}$ د. $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11}\right) - \frac{3}{20}$

5. مستخدمًا حساب التقريب لثلاث خانات لإجراء الحسابات الآتية؛ احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي مستخدمًا خمس خانات على الأقل لإيجاد القيمة الصحيحة:

أ. $133 + 0.921$ ب. $133 - 0.499$ ج. $(121 - 0.327) - 119$

د. $(121 - 119) - 0.327$ هـ. $\dfrac{\frac{13}{14} - \frac{6}{7}}{2e - 5.4}$ و. $-10\pi + 6e - \frac{3}{62}$

ز. $\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right)$ ح. $\dfrac{\pi - \frac{22}{7}}{\frac{1}{17}}$

6. أعد حل تمرين (5) مستخدمًا حساب التقريب لأربع خانات.

7. أعد حل تمرين (5) مستخدمًا حساب القطع لثلاث خانات.

8. أعد حل تمرين (5) مستخدمًا حساب القطع لأربع خانات.

9. إن أول ثلاثة حدود غير صفرية لسلسلة ماكلورين للدّالة arctangent هي $x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5$ احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في التقريبات الآتية للعدد π مستخدمًا كثيرة الحدود بدلًا من arctangent:

أ. $4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ ب. $16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

10. يمكن تعريف العدد e بالقيمة $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$، احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند استخدام التقريبات الآتية للعدد e:

أ. $\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$ ب. $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$

11. ليكن $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x}$

أ. أوجد: $\lim_{x\to 0} f(x)$

ب. استخدم حساب التقريب لأربع خانات لإيجاد قيمة $f(0.1)$.

جـ. عوّض عن كل دالّة مثلية مستخدمًا كثيرة حدود ماكلورين الثالثة التي تمثّلها، أوجد القيمة في (ب).

د. إن القيمة الفعلية هي $f(0.1) = -1.99899998$، أوجد الأخطاء النسبية للإجابات في (ب)، (ج).

12. ليكن $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

أ. أوجد: $\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x})/x$.

ب. استخدم حساب التقريب لأربع خانات لإيجاد قيمة $f(0.1)$.

جـ. عوّض عن كل دالّة مثلية مستخدمًا كثيرة حدود ماكلورين الثالثة التي تمثّلها، أوجد القيمة في (ب).

د. إن القيمة الفعلية هي $f(0.1) = 2.003335000$، أوجد الأخطاء النسبية للإجابات في (ب)، (ج).

13. استخدم حساب التقريب لأربع خانات وصيغ مثال (5) لإيجاد التقريبات الأكثر دقّة لجذور الصيغ التربيعية الآتية، واحسب الأخطاء المطلقة والأخطاء النسبية

أ. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0$ ب. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0$

ج. $1.002x^2 - 11.01x + 0.01265 = 0$ د. $1.002x^2 + 11.01x + 0.01265 = 0$

14. أعد حل التمرين (13) باستخدام حساب القطع لأربع خانات.

15. استخدم النموذج الحقيقي بطول 64-bit لتجد الكسر العشري المكافئ للأعداد الآلية بالنقطة المتحركة

أ. 0 10000001010 1001001100000000000000000 0000000000000000000000000000

ب. 1 10000001010 1001001100000000000000000 0000000000000000000000000000

ج. 0 01111111111 0101001100000000000000000 0000000000000000000000000000

د. 0 01111111111 0101001100000000000000000 0000000000000000000000000001

16. أوجد العدد الأكبر الآتي والعدد الأصغر السابق لكل عدد آلي في التمرين (15)، مستخدمًا الصيغة العشرية (كسور عشرية).

17. لتكن النقطتان (x_0, y_0) و (x_1, y_1) على خط مستقيم و $y_1 \neq y_0$. يوجد معادلتان لإيجاد قاطع x على الخط هما

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{و} \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$$

أ. برهن على صحة هاتين المعادلتين جبريًّا.

ب. استخدم البيانات $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$، $(x_1, y_1) = (1.93, 4.76)$، وحساب التقريب لثلاث خانات، لتجد قاطع x بالطريقتين. أي الطريقتين أفضل؟ ولماذا؟

18. كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدّالة $f(x) = e^x$ هي $\sum_{i=0}^{n}(x^i/i!)$. استخدم كثيرة حدود تايلور من الرتبة

التاسعة، وحساب القطع لثلاث خانات لتجد تقريبًا للعدد e^{-5} مستخدمًا كلاًّ من الطرائق الآتية:

أ. $e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i 5^i}{i!}$

ب. $e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}}$

ج. إن القيمة التقريبية الصحيحة لأقرب ثلاث خانات للعدد e^{-5} هي 6.74×10^{-3}. أي المعادلتين في (أ)، (ب) أدق؟ ولماذا؟

19. ليكن $ax + by = e$ و $cx + dy = f$ نظام معادلتين خطيتين، حيث قيم a, b, c, d, e, f معطاة. ويمكن حلهما لقيم x، y بالطريقة التالية:

افترض $m = \frac{c}{a}$ حيث $a \neq 0$.

$$d_1 = d - mb$$

$$f_1 = f - me$$

$$y = \frac{f_1}{d_1}$$

$$x = \frac{e - by}{a}$$

وحُلَّ نظام المعادلتين الخطيتين في لكل مما يلي مقربًا الجواب لأربع مراتب:

أ. $1.130x - 6.990y = 14.20$
$1.013x - 6.099y = 14.22$

ب. $8.110x + 12.20y = -0.1370$
$-18.11x + 112.2y = -0.1376$

20. كرّر التمرين (19) مستخدمًا حساب القطع ذي الأربع خانات.

21. أ. بيّن أن أسلوب تداخل كثيرة الحدود الموضحة في مثال (6) يمكن تطبيقه أيضًا في حساب $f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^x - 1.99$.

ب. استخدم تقريب الجواب لثلاث خانات، افترض كون $e^{1.53} = 4.62$، وأن $e^{nx} = (e^x)^n$ لتقييم $f(1.53)$ وحسبما هو معطى في (أ).

ج. أعد الحسابات في (ب)، من خلال عمل تداخل الحسابات أولًا.

د. قارن التقريبات في (ج) بنتيجة التقريب لثلاث خانات صحيحة $f(1.53) = -7.61$.

22. لدينا متوازي سطوح مستطيلة أطوال جوانبه 3 cm، 4 cm، و 5 cm مقيسة إلى أقرب سنتمتر. ما أفضل حد علوي وحد سفلي لحجم هذا المتوازي؟ وما أفضل حد علوي وحد سفلي للمساحة السطحية؟

23. لتكن $P_n(x)$ كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة n لدالّة معكوس الظل. استخدم Maple محمّلًا 75 مرتبة عشرية لإيجاد قيمة n اللازمة لتقريب π ضمن 10^{-25} مستخدمًا الصيغ الآتية:

أ. $4\left[P_n\left(\frac{1}{2}\right) + P_n\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

ب. $16P_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4P_n\left(\frac{1}{239}\right)$

24. افترض أن $fl(y)$ تقريب k من الخانات لـ y. أثبت أن

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}$$

[إرشاد: إذا كان $d_{k+1} < 5$ فإن $fl(y) = 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n$. وإذا كان $d_{k+1} \geq 5$ فإن $fl(y) = 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$]

25. إن معاملات ذات الحدين $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$

تحسب عدد الطرائق لاختيار مجموعة جزئية ذات سعة k من مجموعة سعتها m.

أ. افترض أن أعداد حاسبة عشرية بالصيغة

$\pm 0.d_1d_2d_3d_4 \times 10^n$ مع $1 \leq d_1 \leq 9,\ 0 \leq d_i \leq 9$ إذا كان $i = 2, 3, 4$ و $|n| \leq 15$.

ما أكبر قيمة لـ m لتكون معاملات ذات الحدين $\binom{m}{k}$ التي يمكن حسابها لجميع قيم k وفق التعريف، دون التسبب في اتساع النتيجة؟

ب. أثبت أنه يمكن حساب $\binom{m}{k}$ أيضًا من خلال $\binom{m}{k} = \left(\frac{m}{k}\right)\left(\frac{m-1}{k-1}\right)\cdots\left(\frac{m-k+1}{1}\right)$.

ج. ما أكبر قيمة لـ m لتكوّن معاملات ذات الحدين $\binom{m}{3}$ التي يمكن حسابها وفق الصيغة في (ب) دون التسبب في اتساع النتيجة؟

د. استخدم الصيغة في (ب) وحساب القطع ذي الخانات الأربع لحساب عدد مجموعات الورق الخماسية المحتمل سحبها من حزمة ورق من 52 ورقة. احسب الأخطاء الحقيقية والنسبية.

26. ليكن $f \in C[a, b]$ دالّةً مشتقته موجودة على (a, b). افترض أننا نريد تقييم f عند x_0 ضمن (a, b) بدلًا من حساب القيمة الحقيقية $f(x_0)$، والقيمة التقريبية $\tilde{f}(x_0)$ هي القيمة الحقيقية لـِ f عند $x_0 + \epsilon$ بمعنى أن $\tilde{f}(x_0) = f(x_0 + \epsilon)$.

أ. استخدم مبرهنة القيمة الوسيطية لتقدير الخطأ المطلق $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|$، والخطأ النسبي $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|/|f(x_0)|$ مفترضين $f(x_0) \neq 0$.

ب. إذا كانت $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ و $x_0 = 1$ فأوجد حدودًا للخطأ المطلق والخطأ النسبي لـِ

i. $f(x) = e^x$ **ii.** $f(x) = \sin x$

ج. كرّر (ب) مع $\epsilon = (5 \times 10^{-6})x_0$ و $x_0 = 10$.

27. تقطع عمليات Maple الآتية العدد الطافح x إلى t من الخانات

```
chop:=proc(x,t);
 if x=0 then 0
 else
 e:=ceil(evalf(log10(abs(x))));
 x2:=evalf(trunc(x*10^(t-e))
 *10^(e-t));
 fi
end;
```

تحقّق من فاعلية العملية للقيم الآتية:

أ. $x = 124.031,\ t = 5$ ب. $x = 124.036,\ t = 5$ ج. $x = -124.031,\ t = 5$ د. $x = -124.036,\ t = 5$

هـ. $x = 124.036,\ t = 5$ و. $x = 0.00656,\ t = 2$ ز. $x = 0.00656,\ t = 2$ ح. $x = -0.00653,\ t = 2$

ل. $x = -0.00656,\ t = 2$

28. أوضح المثال الافتتاحي في هذا الفصل تجربة فيزيائية تضمنت درجة حرارة غاز تحت الضغط. في هذا التطبيق كان لدينا $V = 0.100\ \text{m}^3$, $P = 1.00$ atm, $N = 0.00420$ mol و $R = 0.08206$، وبحل T في قانون الغاز المثالي نحصل على

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15\text{ K} = 17^\circ\text{C}$$

لقد وجد أن T تساوي 15°C تحت الظروف المخبرية المذكورة تساوي 15°C، عند مضاعفة الضغط وتناقص الحجم إلى النصف أصبحت T تساوي 19°C. افترض أن البيانات عبارة عن قيم مقربة ودقيقة ضمن المواقع المعطاة، أثبت أن القيم المخبرية ضمن حدود الدقة لقانون الغاز التالي.

3.1 الخوارزميات والتقارب Algorithms and Convergence

سنتفحص خلال هذا الكتاب طرائق للتقريب تسمّى الخوارزميات، وتتضمن متتاليات من الحسابات.

الخوارزميات: هي طريقة تصف دون أي التباس عددًا محدودًا من الخطوات التي تنفَّذ بترتيب محدد. إن الغرض من الخوارزميات هو تنفيذ عملية لحل مسألة أو إيجاد تقريب حل لمسألة تستخدم "الرمز الشكلي" **Pseudocode** لوصف الخوارزميات. إن هذا الرمز الشكلي يحدد شكل المدخلات الواردة وشكل المخرجات المطلوبة.

إن استخدام الخوارزمية قديم قدم الرياضيات المنظمة واسمها مأخوذ من اسم الرياضي العربي محمد بن موسى الخوارزمي (850–780). وتبدأ الترجمة اللاتينية لأعماله بالكلمات:

"Dixit Algorismi"

التي تعني " يقول الخوارزمي".

ولا تعطي العمليات العددية كلها المخرجات المرضية لمدخلات اختيرت عشوائيًا. لذا يجب أن تتضمن كل خوارزمية طريقة توقف مستقلة عن الطريقة العددية، لتجنب العروات اللانهائية. وهناك رمزان للترقيم يستخدام في الخوارزميات

- النقطة (.) وتستخدم لإنهاء خطوة.
- الفاصلة المنقوطة (؛) وتفصل بين عملين ضمن خطوة.

ويستخدم الفراغ في بداية الفقرة **Indentation** ليدل على أن مجموعات من العبارات وجب التعامل معها بوصفها وحدة واحدة.

أما تقنيات العروات في الخوارزميات، فإما أن تكون محكمة بالعد

مثل **Counter − Controlled**

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

ضع $x_i = a_i + i \cdot h$

وإما أن تكون محكمة بالشرط **Controlled − condition** مثل:

عندما يكون $i < N$ أجر الخطوات 3 − 6.

While $i < N$ do Steps 3–6

ولكي نسمح بالتنفيذ الشرطي، نستخدم الصيغ الآتية

إذا كان ... فإن **If ... then**

أو إذا كان ... فإن غير ذلك **If ... then else**

تتبع خطوات الخوارزميات قواعد إنشاء البرامج البنائية، وقد رُتّبت على أن تتضمن أدنى صعوبة عند ترجمة الرمز الشكلي إلى أي لغة برمجة صالحة للتطبيقات العلمية. تحوي الخوارزميات

كثيرًا من التعليقات التي تكتب بخط مائل ضمن أقواس لتمييزها من العبارات الخوارزمية.

مثال 1 نصف فيما يأتي إحدى الخوارزميات لحساب $x_N + \cdots + x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{N} x_i$ حيث N و $x_1, x_2, \ldots, x_N$ معطاة.

المدخلات: $N, x_1, x_2, \ldots, x_N$

المخرجات: $SUM = \sum_{i=1}^{N} x_i$

الخطوة	المضمون
1	ضع $SUM = 0$ (المجموع الابتدائي)
2	عند $i = 1, 2, \ldots, N$ نفذ ضع $SUM = SUM + x_i$ (أضف الحد التالي).
3	المخرجات (SUM) توقف.

■

مثال 2 كثيرة حدود تايلور من الرتبة N للدّالة $f(x) = \ln x$ مفكوك حول $x_0 = 1$ هي

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(x-1)^i$$

وقيمة $\ln 1.5$ لثماني خانات عشرية هي 0.40546511.

افترض أننا نريد إيجاد أقل قيمة للعدد N التي تحقّق $|\ln 1.5 - P_N(1.5)| < 10^{-5}$ دون استخدام الحد الباقي لكثيرة حدود تايلور.

نعلم من حساب التفاضل والتكامل أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متناوبة ذات نهاية A تتناقص القيم المطلقة لحدودها، فإن A والمجموع الجزئي $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ ذا الرتبة N يختلفان بقيمة أقل من قيمة الحد ذي الرتبة $(N + 1)$، أي أن

$$|A - A_N| \le |a_{N+1}|$$

تستخدم هذا الحد في الخوارزمية الآتية:

المدخلات: القيمة x، حد السماح TOL، أكبر عدد تكرارات M.

المخرجات: الرتبة N لكثيرة حدود أو عبارة فشل.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = 1$ $y = x - 1$ $SUM = 0$ $POWER = y$ $TERM = y$ $SIGN = -1$ (تستخدم لتنفيذ عكس الإشارات).
2	بينما $N \le M$ نفذ الخطوات 3 – 5.
3	ضع $SIGN = -SIGN$ (لعكس الإشارة) $SUM = SUM + SIGN \cdot TERM$ (لجمع الحدود). $POWER = POWER \cdot y$ $TERM = POWER/(N+1)$ (لحساب الحد التالي).
4	إذا كان $\|TERM\| < TOL$ فإن (لاختبار الدقة). المخرجات (N)

5	ضع $N = N + 1$ (حضر للتكرار التالي).
6	المخرجات ('Method Failed') (العملية لم تكن ناجحة). توقف.

■

إن المدخلات في مسألتنا هي $x = 1.5, TOL = 10^{-5}$ وربما $M = 15$. إن اختيار M يعطي حدًّا أعلى لعدد العمليات الحسابية التي يرغب في إجرائها، مع علمنا بإمكانية فشل الخوارزمية إذا اجتزنا هذا الحد. إن المخرج (الناتج) هو قيمة للعدد N أو رسالة فشل يعتمد على دقة أداة الحساب. سنتصدى لمسائل تقريب متعددة في محتوى الكتاب، وفي كل حالة نحتاج إلى تحديد طرائق التقريب التي تعطي نتائج صحيحة يمكن الاعتماد عليها لحل مجموعة واسعة من المسائل. كما نحتاج إلى شروط مختلفة لتصنيف دقة هذه الطرائق بسبب الاختلاف بين الطرائق المستخدمة لاشتقاق التقريب. وليس من الضروري أن تكون هذه الشروط جميعها مناسبة لمسألة بعينها. ■

إن أحد المعايير التي نضعها على الخوارزمية كلما أمكن ذلك، هو أن التغييرات الصغيرة في البيانات الابتدائية تُنتج في المقابل تغييرات صغيرة في النتائج النهائية. إن الخوارزمية التي تحقّق هذه الخاصية تسمى مستقرة **stable**، وفي غير ذلك فهي غير مستقرة **unstable**. إن بعض الخوارزميات تكون مستقرة فقط عند اختيارات محددة للبيانات الابتدائية. وتسمّى هذه الخوارزميات مستقرة شرطيًّا **Conditionally Stable**. سنصف خواص استقرار الخوارزميات كلما كان ذلك ممكنًا. ولكي نتفحص موضوع نمو خطأ التقريب وعلاقته باستقرار الخوارزمية؛ نفترض أن خطأ قيمته $E_0 > 0$ قد وقع عند خطوة ما في الحسابات، وإن مقدار الخطأ بعد n من العمليات الآتية هو E_n. وتوجد حالتان تحدثان عمليًّا في أكثر الأحيان نعرفهما كما يأتي.

إن جذر **stable** هو نفسه جذر **stand** و**standard**. وفي الرياضيات فإن كلمة مستقر **stable** تعني أن تغييرًا صغيرًا في البيانات الابتدائية أو الشروط لا يؤدي إلى تغيير كبير في حل تلك المسألة.

تعريف 17.1 افترض أن $E_0 > 0$ هو الخطأ الابتدائي، وأن E_n هي قيمة الخطأ بعد n من الخطوات الآتية. إذا كان $E_n \approx CnE_0$ حيث كان C ثابتًا لا يعتمد على n، فإن نمو الخطأ يسمّى خطيًّا **Linear**. وإذا كان $E_n \approx C^n E_0$ حيث $C > 1$ فإن نمو الخطأ يسمى أسيًّا **Exponential**. ■

لا يمكن تجنب النمو الخطي للخطأ عادة، وعندما يكون C و E_0 صغيرين، فإن النتائج تكون مقبولة عمومًا، أما النمو الأسيّ فيجب تجنبه؛ لأن الحد C^n يصبح كبيرًا حتى لقيم n الصغيرة نسبيًّا، وإن هذا ليس دقيقًا مهما كان حجم E_0، وعندئذ فإن الخوارزمية التي تعطي نموًّا خطيًّا للخطأ تكون ثابتة، حيث أن الخوارزمية التي تعطي نموًّا أسيًّا للخطأ تكون غير مستقرة. (انظر الشكل 11.1)

تمثّل النقاط الظاهرة الواقعة على خط مستقيم (في أسفل الشكل 11.1) نموّ الخطأ الخطي المستقر، حيث تمثّل النقاط في الجزء العلوي في الشكل نمو الخطأ الأسّيّ غير المستقر.

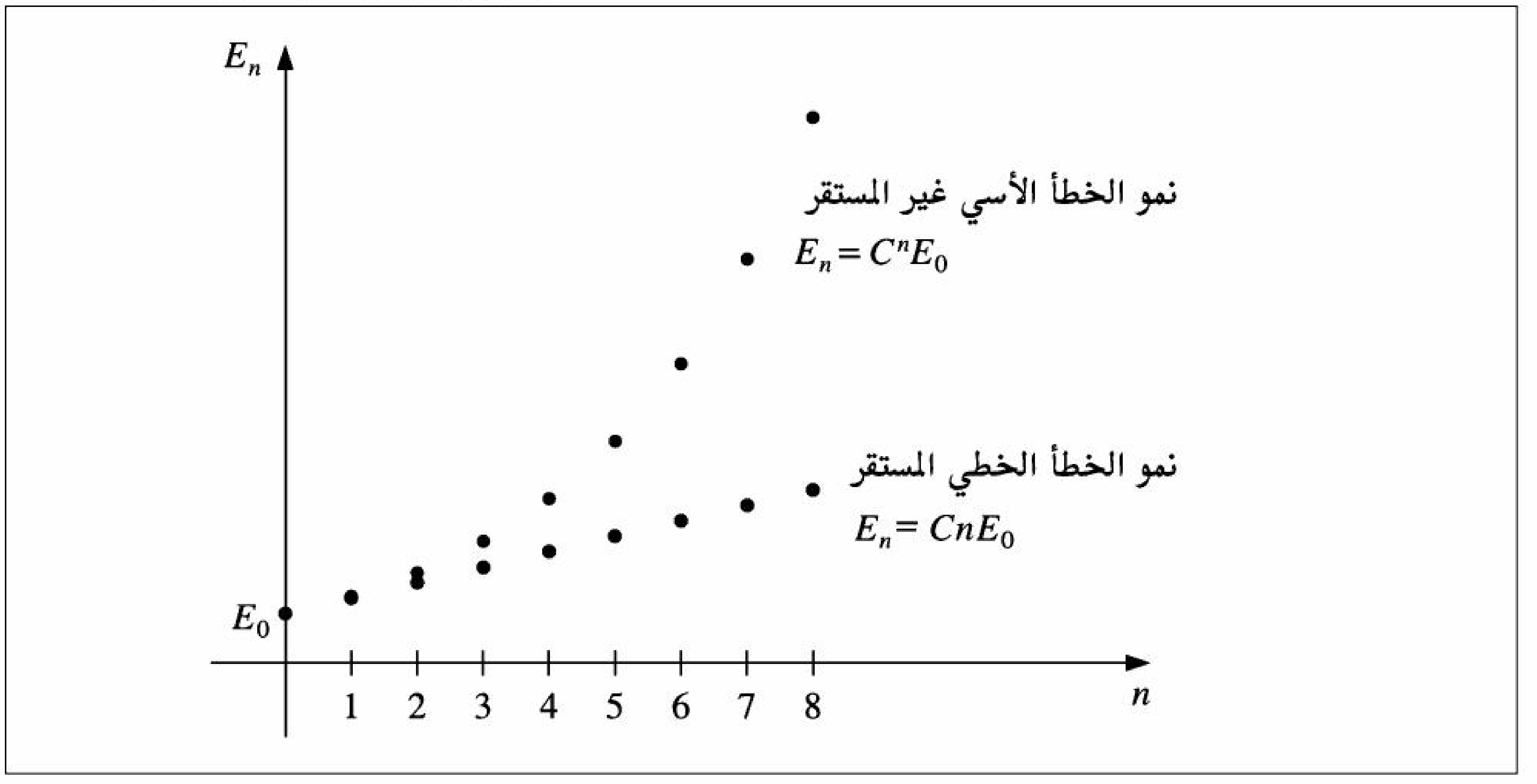
مثال 3 إن الصيغة الإرجاعية **recursive**

$$p_n = \frac{10}{3} p_{n-1} - p_{n-2} \quad \text{لِـ} \quad n = 2, 3, \ldots$$

لها الحل

$$p_n = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n$$

شكل 1.11



لأي ثابتين c_1 و c_2 لأن

$$\frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} = \frac{10}{3}\left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + c_2 3^{n-1}\right] - \left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + c_2 3^{n-2}\right]$$
$$= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left[\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3} - 1\right] + c_2 3^{n-2}\left[\frac{10}{3}\cdot 3 - 1\right]$$
$$= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{9}\right) + c_2 3^{n-2}(9) = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n = p_n$$

إذا كان $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$ فإن $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$ عندئذ تكون قيمة $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لقيم n جميعها. افترض أنك استخدمت حساب التقريب من الخانات الخمس لحساب حدود المتتالية المعطاة بهذه الصيغة، عندها تكون قيمة $\hat{p}_0 = 1.0000$، و $\hat{p}_1 = 0.33333$ وهو ما يتطلب تعديل الثوابت لـ $\hat{c}_1 = 1.0000$ و $\hat{c}_2 = -0.12500 \times 10^{-5}$ إن المتتالية التقريبية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ الناتجة تعطى بالمعادلة

$$\hat{p}_n = 1.0000\left(\frac{1}{3}\right)^n - 0.12500 \times 10^{-5}(3)^n$$

ويكون خطأ التقريب

$$p_n - \hat{p}_n = 0.12500 \times 10^{-5}(3^n)$$

وينمو أسيًّا مع n، وهذا يعكس عدم دقة قصوى بعد عدد قليل من الحدود، ويظهر في الجدول (5.1) أيضًا في صفحة (34).

إن الصيغة الإرجاعية $p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$ لكل $n = 2, 3, \ldots$ من جهة أخرى لها الحل $p_n = c_1 + c_2 n$ لأي ثابتين c_1 و c_2، لأن

$$2p_{n-1} - p_{n-2} = 2(c_1 + c_2(n-1)) - (c_1 + c_2(n-2))$$
$$= c_1(2-1) + c_2(2n - 2 - n + 2) = c_1 + c_2 n = p_n$$

جدول 5.1

n	المحسوب $\hat{p}_n$	الصحيح p_n	الخطأ النسبي
0	0.10000×10^{1}	0.10000×10^{1}	
1	0.33333×10^{0}	0.33333×10^{0}	
2	0.11110×10^{0}	0.11111×10^{0}	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{-1}	0.37037×10^{-1}	1×10^{-3}
4	0.12230×10^{-1}	0.12346×10^{-1}	9×10^{-3}
5	0.37660×10^{-2}	0.41152×10^{-2}	8×10^{-2}
6	0.32300×10^{-3}	0.13717×10^{-2}	8×10^{-1}
7	-0.26893×10^{-2}	0.45725×10^{-3}	7×10^{0}
8	-0.92872×10^{-2}	0.15242×10^{-3}	6×10^{1}

إذا كان $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$ فإن الثوابت في هذه الصيغة تصبح $c_1 = 1$ و $c_2 = -\frac{2}{3}$ ويكون $p_n = 1 - \frac{2}{3}n$. وباستخدام حساب التقريب لخمسة أرقام ينتج في هذه الحالة أن $\hat{p}_0 = 1\ 0000$ و $\hat{p}_1 = 0.33333$ ونتيجة لذلك، تصبح قيم الثوابت المقّربة لخمسة خانات هي $\hat{c}_1 = 1.0000$ و $\hat{c}_2 = -0.66667$، وهكذا يكون

$$\hat{p}_n = 1.0000 - 0.66667n$$

وبذلك يصبح خطأ التقريب

$$p_n - \hat{p}_n = \left(0.66667 - \tfrac{2}{3}\right) n$$

وينمو خطيًّا مع n، و ينعكس هذا في الاستقرار الظاهر في جدول (6.1). ■

جدول 6.1

n	المحسوب $\hat{p}_n$	الصحيح p_n	الخطأ النسبي
0	0.10000×10^{1}	0.10000×10^{1}	
1	0.33333×10^{0}	0.33333×10^{0}	
2	-0.33330×10^{0}	-0.33333×10^{0}	9×10^{-5}
3	-0.10000×10^{1}	-0.10000×10^{1}	0
4	-0.16667×10^{1}	-0.16667×10^{1}	0
5	-0.23334×10^{1}	-0.23333×10^{1}	4×10^{-5}
6	-0.30000×10^{1}	-0.30000×10^{1}	0
7	-0.36667×10^{1}	-0.36667×10^{1}	0
8	-0.43334×10^{1}	-0.43333×10^{1}	2×10^{-5}

يمكن تخفيف تأثيرات أخطاء التقريب باستخدام حساب لمراتب من رتب كبيرة، مثل الخيار الثنائي الدقة أو المتعدد الدقة المتاح في معظم الحواسيب.

إن مساوئ استخدام الحساب الثنائي الدقة تكمن في استغراقه وقتًا أطول، وعدم إلغائه أخطاء التقريب، بل تأجيل ذلك إلى حين إجراء عمليات حسابية آتية.

إن إحدى الطرائق لتوقع خطأ التقدير تكون باستخدام حساب الفئات (أي الاحتفاظ بأصغر القيم الممكنة وأكبرها في كل خطوة)، وبذلك نحصل على فترة تحوي القيمة الحقيقية في النهاية. ولسوء الحظ قد نحتاج إلى فترة صغيرة جدًّا للتنفيذ المعقول.

وبما أننا نستخدم التقنية التفاعلية المتضمنة المتتاليات نختتم هذا الفصل بمناقشة بعض المصطلحات التي تصف معدل التقارب الحادث عند توظيف (تطبيق) التقنية العددية. وبصورة عامة، فإننا نرغب في حدوث التقارب بأقصى سرعة ممكنة.

ونستعمل التعريف الآتي للمقارنة بين سرعة تقارب الطرائق المختلفة.

تعريف 18.1 لتكن $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية تتقارب نحو الصفر، و $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو العدد α. إذا وجد ثابتًا موجبًا K يحقق

$$|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n|$$ لقيم n الكبيرة

فإننا نقول: إن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو العدد α بسرعة تقارب $O(\beta_n)$ (يقرأ هذا التعبير "oh كبيرة لقيمة β_n"). ويشار إليها بكتابة $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$. ■

ومع أن التعريف (18.1) يسمح للمتتالية $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأن تقارن بأي متتالية $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ فإننا في معظم الحالات نستخدم

$$\beta_n = \frac{1}{n^p}$$

حيث إن p عدد موجب $p > 0$، وعادة ما يكون اهتمامنا بأكبر قيمة للعدد p التي تحقق $\alpha_n = \alpha + O(1/n^p)$.

مثال 4 افترض أنه لكل $n \geq 1$ لدينا

$$\hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3} \quad \text{و} \quad \alpha_n = \frac{n+1}{n^2}$$

فمع أن $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_n = 0$ فإن المتتالية $\{\hat{\alpha}_n\}$ تتقارب إلى هذه النهاية بسرعة أكبر كثيرًا من المتتالية $\{\alpha_n\}$، على نحو الجدول (7.1) الذي حسب مستخدمًا حساب التقريب بخمسة أرقام.

جدول 7.1

n	1	2	3	4	5	6	7
α_n	2.00000	0.75000	0.44444	0.31250	0.24000	0.19444	0.16327
$\hat{\alpha}_n$	4.00000	0.62500	0.22222	0.10938	0.064000	0.041667	0.029155

توجد طرائق متعددة أخرى لوصف نمو المتتاليات والدّوال. ويتطلب بعضها حدودًا عليا وحدودًا دنيا للمتتالية أو الدّالة تحت الدراسة. إن أي كتاب جيد في تحليل الخوارزميات مثل [CLRS] يحتوي على هذه المعلومات.

إذا افترضنا $\beta_n = 1/n$ و $\hat{\beta}_n = 1/n^2$ نجد أن

$$|\alpha_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n} = 2\beta_n$$

و

$$|\hat{\alpha}_n - 0| = \frac{n+3}{n^3} \leq \frac{n+3n}{n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2} = 4\hat{\beta}_n$$

عندئذ

$$\hat{\alpha}_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{و} \quad \alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

إن سرعة تقارب $\{\alpha_n\}$ للصفر مماثلة لسرعة تقارب $\{1/n\}$ للصفر، حيث تتقارب $\{\hat{\alpha}_n\}$ للصفر بسرعة مماثلة للمتتالية الأسرع في التقارب $\{1/n^2\}$. ■

نستعمل أيضًا رمز oh الكبيرة لوصف السرعة التي تتقارب فيها الدوال.

تعريف 19.1 افترض أن $\lim_{h\to 0} G(h) = 0$، وأن $\lim_{h\to 0} F(h) = L$. إذا وجدنا ثابتًا موجبًا K حيث إن $|F(h) - L| \le K|G(h)|$ لقيم h الصغيرة على نحو كافٍ فعندئذ نكتب

$$F(h) = L + O(G(h))$$ ■

إن الدّوال التي نستخدمها للمقارنة عادة ما تأخذ الصورة $G(h) = h^p$، حيث إن $p > 0$ ينصبّ اهتمامنا على أكبر قيمة للعدد p التي تحقّق $F(h) = L + O(h^p)$.

مثال 5 لقد وجدنا في المثال (3) (ب) من الفصل (1.1) أن كثيرة حدود تايلور تعطي

$$\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 \cos \xi(h)$$

لعدد ما $\xi(h)$ بين الصفر و h، وأخيرًا يكون

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + \frac{1}{24}h^4 \cos \xi(h)$$

وهذا يتضمن أن

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

لأن

$$\left|(\cos h + \frac{1}{2}h^2) - 1\right| = \left|\frac{1}{24}\cos \xi(h)\right| h^4 \le \frac{1}{24}h^4$$

وهذا يعني أنه عندما تكون $h \to 0$، فإن $\cos h + \frac{1}{2}h^2$ يتقارب إلى نهاية 1 بسرعة قريبة من سرعة تقارب h^4 للصفر. ■

مجموعة التمارين 3.1 EXERCISE SET

1. أ. استخدم حساب القطع لثلاثة أرقام لتجد المجموع $\sum_{i=1}^{10}(1/i^2)$، مستخدمًا $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$ أولًا ثم $\frac{1}{100} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{1}$. أي الطريقتين أدق؟ ولماذا؟
   ب. اكتب خوارزمية لإيجاد مجموع المتسلسلة المحدودة $\sum_{i=1}^{N} x_i$ بترتيب عكسي.
2. يعرّف العدد e بالسلسلة $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$، استخدم حساب القطع لأربعة أرقام لإيجاد التقريبات الآتية للعدد e، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي:
   أ. $e \approx \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$ ب. $e \approx \sum_{j=0}^{5} \frac{1}{(5-j)!}$
   ج. $e \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$ د. $e \approx \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{(10-j)!}$
3. إن متسلسلة ماكلورين لدالّة الظل المقابل متقاربة على الفترة $-1 < x \le 1$ وهي
$$\arctan x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$
   أ. استخدم الحقيقة $\tan \pi/4 = 1$ لإيجاد عدد الحدود n للمتسلسلة المطلوب جمعها للحصول على $|4P_n(1) - \pi| < 10^{-3}$.
   ب. تشترط لغة البرمجة C++ أن تكون قيمة π صحيحة بحد خطأ أصغر من 10^{-10}. ما عدد حدود السلسلة التي نحتاج إلى جمعها للحصول على هذه الرتبة من الدقة؟
4. يقدم التمرين (3) تفاصيل طريقة غير فعالة للحصول على تقريب العدد π، ويمكن تحسين هذه الطريقة على نحو مفيد بملاحظة أن $\pi/4 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ ثم إيجاد قيمة متسلسلة الظل المقابل arctan عند $\frac{1}{2}$ وعند $\frac{1}{3}$. أوجد عدد حدود السلسلة التي يجب جمعها لضمان تقريب العدد π ضمن 10^{-3}.

5. توجد صيغة أخرى لحساب π يمكن استنتاجها من المتطابقة $\pi/4 = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$. أوجد عدد حدود السلسلة التي يجب جمعها لضمان تقريب العدد π ضمن 10^{-3}.

6. أوجد سرعة التقارب للمتتاليات الآتية عندما $n\to\infty$:

أ. $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$

ب. $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n^2} = 0$

ج. $\lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 = 0$

د. $\lim_{n\to\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)] = 0$

7. أوجد سرعة تقارب الدوال الآتية عندما $h \to 0$

أ. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

ب. $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$

ج. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h\cos h}{h} = 0$

د. $\lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = -1$

8. أ. ما عدد عمليات الضرب والجمع المطلوبة لإيجاد حاصل جمع الصيغة

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_i b_j ؟$$

ب . عدّل الصيغة في (أ) على أن تقلّل عدد العمليات الحسابية.

9. لتكن $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود، وافترض أن x_0 معطاة. أنشئ خوارزمية لإيجاد قيمة $P(x_0)$ مستخدمًا عمليات الضرب المتداخلة.

10. يعطي التمرين (5) من الفصل (2.1) صيغ بديلة للجذرين x_1 و x_2 للصيغة $ax^2 + bx + c = 0$. أنشئ خوارزمية بالمدخلات a, b, c والمخرجات x_1 و x_2 لتحسب الجذرين x_1 و x_2 (اللذين يمكن أن يكونا متساويين أو مرافقين مركبين) مستخدمًا أفضل صيغة لكل جذر.

11. أنشئ خوارزمية مدخلاتها عدد صحيح $n \ge 1$، الأعداد $x_0, x_1, \ldots, x_n$ وعدد x التي مخرجها حاصل الضرب $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

12. افترض أن $\frac{1-2x}{1-x+x^2} + \frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4} + \frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8} + \cdots = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$

لكل $x < 1$ وافترض أن $x = 0.25$، اكتب خوارزمية تحدد عدد الحدود المطلوبة في الطرف الأيسر للصيغة، ونفّذها على أن يكون اختلاف الطرف الأيسر عن الطرف الأيمن أقل من 10^{-6}.

13. أ. افترض أن $0 < q < p$ وأن $\alpha_n = \alpha + O(n^{-p})$ برهن أن $\alpha_n = \alpha + O(n^{-q})$.

ب. اكتب جدولاً فيه $1/n, 1/n^2, 1/n^3$ و $1/n^4$ للقيم $n = 5, 10, 100$ و 1000، وناقش معدلات التقارب المختلفة لهذه المتتاليات عندما تصبح n كبيرة.

14. أ. افترض أن $0 < q < p$ وأن $F(h) = L + O(h^p)$، برهن على أن $F(h) = L + O(h^q)$.

ب. اكتب جدولاً فيه h, h^2, h^3, h^4 للقيم $h = 0.5, 0.1, 0.01$ و 0.001، وناقش معدلات التقارب المختلفة لقوى h هذه عندما تقترب h من الصفر.

15. افترض أنه عندما تقترب x من الصفر يكون

$$F_1(x) = L_1 + O(x^{\alpha}) \text{ و } F_2(x) = L_2 + O(x^{\beta})$$

وليكن كل من c_1 و c_2 عددين ثابتين غير الصفر، وعرّف

$$F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x) \text{ و } G(x) = F_1(c_1x) + F_2(c_2x)$$

برهن على أنه إذا كان $\gamma = \text{minimum}\{\alpha, \beta\}$، فإنه عندما تقترب x من الصفر فإن

أ. $F(x) = c_1L_1 + c_2L_2 + O(x^{\gamma})$

ب. $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^{\gamma})$

16. تسمّى المتتالية $\{F_n\}$ المعرفة على الصورة الآتية $F_0 = 1, F_1 = 1$ و $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ لكل $n \geq 0$ من $n \geq 0$، متتالية فيبوناتشي (Fibonacci Sequence). إن حدود هذه المتتالية تحدث طبيعيًّا في كثير من الأصناف الحياتية، خصوصًا مثل تلك التي لها بتلات وحراشف مرتبة على صورة لولب لوغارتمي. لتكن المتتالية $\{x_n\}$ معرّفة بالصيغة $x_n = F_{n+1}/F_n$. على فرض أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ موجودة، أثبت أن $x = (1 + \sqrt{5})/2$. يسمّى هذا العدد النسبة الذهبية (golden ratio).

17. إن متتالية فيبوناتشي تحقّق الصيغة

$$F_n \equiv \tilde{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

أ. اكتب عملية لحساب F_{100} مستخدمًا Maple.

ب. استخدم Maple بالقيمة المفترضة للأمر Digits متبوعًا بالأمر evalf لحساب $\tilde{F}_{100}$.

ج. لماذا نجد القيمة في (أ) أدق من تلك في (ب)؟

د. لماذا يكون الحصول على النتيجة باستخدام (ب) أسرع من الحصول على النتيجة باستخدام الطريقة في (أ)؟

هـ. ماذا يحدث عندما تستخدم الأمر Simplify بدلًا من الأمر evalf في حساب $\tilde{F}_{100}$؟

18. السلسلة التوافقية $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ تباعدية (divergent)، ولكن المتتالية $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ متقاربة؛ لأن $\{\gamma_n\}$ متتالية محدودة غير متزايدة. إن النهاية $\gamma = 0.5772156649\ldots$ للمتتالية $\{\gamma_n\}$ تسمّى ثابت أويلر (Euler).

أ. استخدم القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من γ ضمن الحد 10^{-2}.

ب. استخدم القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من γ ضمن الحد 10^{-3}.

ج. ماذا يحدث إذا استخدمت القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من ضمن γ الحد 10^{-4}؟

4.1 البرمجيات العددية Numerical Software

توجد برامج حاسوبية لتقريب حلول عددية للمسائل. في هذا الكتاب قدّمنا برامج مكتوبة باللغات Mathematica, MATLAB, Pascal, C, FORTRAN, Maple و Java، لغرض استخدامها في حل الأمثلة والتمارين الواردة في هذا الكتاب. وتعطي هذه البرامج نتائج مرضية لمعظم المسائل التي تحتاج إلى حل، ولكنها تقع ضمن ما نسميه برامج الغرض الخاص، ونستخدم هذا المصطلح لنميّز بين هذه البرامج وبرامج الرياضيات العادية، وإن البرامج في هذه الحقائب تسمى برامج الغرض العام.

إن البرامج في حقائب الغرض العام تختلف في محتواها عن الخوارزميات والبرامج الواردة في هذا الكتاب. وإن حقائب الغرض العام تتعامل مع طرائق لتقليل الأخطاء الناتجة عن

التقريب الآلي، والانسياب السفلي والانسياب العلوي، وهي تصف أيضًا مدى المدخلات التي تؤدي إلى نتائج ذات دقة محدّدة معينة.

ولما كانت هذه الخواص تعتمد على الآلة فإن الحقائب ذات الغرض العام تستخدم وسيطات تصف مؤشرات النقطة العائمة للآلة المستخدمة في الحسابات.

ولتوضيح بعض الفروق بين البرامج في حقائب الغرض العام والبرنامج الذي ضمّناه في هذا الكتاب؛ افترض البرنامج الذي نستخدمه لإيجاد المعيار الإقليدي لمتجه بعده n $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ إن هذا (المعيار) (norm) غالبًا ما يطلب ضمن البرامج الكبيرة، ويعرّف بالآتي

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$$

يستخدم هذا المعيار (norm) لقياس المسافة بين المتّجه $\mathbf{x}$ والمتّجه $\mathbf{0}$.

على سبيل المثال: معيار المتجه $\mathbf{x} = (2, 1, 3, -2, -1)^t$ هو

$$\|\mathbf{x}\|_2 = [2^2 + 1^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-1)^2]^{1/2} = \sqrt{19}$$

وعندئذ فإن بعده عن المتّجه $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, 0)^t$ هو $\sqrt{19} \approx 4.36$.

نبين هنا نوع الخوارزمية التي تقدمها هذه المسألة؛ إنها لا تحتوي على أي وسيطات (برامترات) تعتمد على الآلة، ولا تقدم أي توكيدات للدقة، ولكنها تعطي نتائج دقيقة في "معظم الأوقات".

المدخلات: $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$

المخرجات: $NORM$

الخطوة	المضمون
1	ضع $SUM = 0$
2	عند $i = 1, 2, \ldots, n$ ضع $SUM = SUM + x_i^2$
3	ضع $NORM = SUM^{1/2}$
4	المخرجات $(NORM)$ توقف.

إن البرنامج المبني على هذه الخوارزمية سهل الكتابة والفهم، ولكن قد يفشل البرنامج في إعطاء دقة كافية لعدة أسباب. فعلى سبيل المثال: قد تكون قيمة بعض الأعداد كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا، فلا يمكن تمثيلها بدقة في نظام النقطة العائمة الحاسوبي. وقد لا يعطي الترتيب العادي لتنفيذ الحسابات النتائج الأدق أيضًا، أو قد لا يكون البرنامج العادي المتاح لاستخراج الجذر التربيعي هو الأفضل بالنسبة إلى هذه المسألة.

إن أمورًا من هذا النوع تؤخذ في الحسبان من قبل مصمّمي الخوارزميات عندما يكتبون برامج ذات غرض عام، وتستخدم هذه البرامج في الغالب على صورة برامج فرعية لحل مسائل أكبر. ولذلك يجب أن تحتوي على ضوابط لا نحتاج إليها.

والآن افترض برنامجًا حاسوبيًّا ذا غرض عام لاستخدامه في حساب المعيار الإقليدي.

أولًا: قد تقع قيمة المركبة x_i للمتّجه ضمن مدى الآلة، ولكن قد لا يقع مربع تلك المركبة ضمن ذلك

المدى. يمكن حدوث مثل هذا الأمر عندما يكون $|x_i|$ صغيرًا جدًّا لدرجة أن x_i^2 يسبب الانسياب السفلي أو عندما تكون $|x_i|$ كبيرة جدًّا، على أن x_i^2 تسبب الانسياب العلوي.

ومن الممكن أن تقع هذه الحدود جميعها ضمن مدى الآلة أيضًا، ولكن الانسياب العلوي يحدث بسبب جمع مربع أحد هذه الأبعاد للمجموع المحسوب.

ولما كانت معايير الدقة تعتمد على الآلة التي تجرى عليها الحسابات، فإن الوسيطات المعتمدة على الآلة تدخل ضمن الخوارزميات. افترض أننا نستخدم حاسوبًا فرضيًّا قاعدته 10، ويملك $t \geq 4$ خانات دقة، وأصغر أسيّة $emin$ وأعلى أسيّة $emax$، عندئذ تكون مجموعة أعداد النقاط العائمة في هذه الآلة مكوّنة من الصفر والأعداد على الصيغة $x = f \cdot 10^e$ حيث

$$f = \pm\,(f_1 10^{-1} + f_2 10^{-2} + \cdots + f_t 10^{-t})$$

حيث لكل $1 \leq f_1 \leq 9$ و $0 \leq f_i \leq 9$ لكل $i = 2, \ldots, t$ حيث $emin \leq e \leq emax$.

إن هذه القيود تعني أن أصغر عدد موجب يمكن تمثيله في الآلة هو $\sigma = 10^{emin-1}$، ومن ثم يمكن لأي عدد محسوب x بقيمة $|x| < \sigma$ أن يسبب انسيابًا أدنى، وينتج عن ذلك أن تصبح قيمة x صفرًا. إن أكبر عدد موجب يمكن تمثيله هو $\lambda = (1 - 10^{-t})10^{emax}$، ومن ثم فإن أي عدد محسوب x بقيمة $|x| > \lambda$ يسبب انسيابًا أعلى. إذا حدث انسياب أدنى غالبًا ما يستمر البرنامج دون أي خسارة مهمة في الدقة، أما عندما يحدث انسياب أعلى فإن البرنامج يفشل.

تفترض الخوارزمية أن خواص الآلة المتعلقة بالنقطة العائمة توصف باستخدام الوسيطات (البرامترات) N, s, S, y, Y سيعبر عن أكبر عدد من المدخلات التي يمكن أن تجمع بدرجة دقة $t/2$ من الأعداد بالرمز N. إن هذا يعني أن الخوارزمية تستمر في العمل لإيجاد قياس المتّجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ فقط إذا كان $n \leq N$. ولكي تحل مشكلة الانسياب الأدنى والأعلى، فإن أعداد النقطة العائمة غير الصفرية تقسّم إلى المجموعات الآتية:

- أعداد صغيرة في القيمة x وهي تلك التي تحقّق $0 < |x| < y$.
- أعداد وسيطية في القيمة x عندما يكون $y \leq |x| < Y$.
- أعداد كبيرة في القيمة x عندما يكون $Y \leq |x|$.

نختار الوسيطين y و Y بحيث نضمن عدم وجود مشكلة انسياب أدنى أو أعلى في عمليات التربيع أو جمع الأعداد وسيطية القيمة. إن تربيع الأعداد صغيرة القيمة يمكن أن يؤدي إلى انسياب أدنى، ولذلك يستخدم عامل ضربي S يكبر الواحد بكثير لكي يتجنب العدد $(Sx)^2$ الانسياب الأدنى عندما لا يتجنبه x^2. إن جمع الأعداد ذات القيم الكبيرة وتربيعها يمكن أن يؤدي إلى انسياب أعلى، لذلك نستخدم في هذه الحالة عددًا s أصغر من الواحد بكثير لضمان تجنب $(sx)^2$ الانسياب الأعلى عند دمجه أو حسابه في عملية الجمع حتى ولو كان x^2 يؤدي إلى ذلك الانسياب.

ولتجنب الضرب غير الضروري؛ نختار y و Y بحيث يكون مدى الأعداد وسيطية القيمة كبيرًا قدر الإمكان. إن الخوارزمية الآتية تعديل لتلك المشروحة في [Brow, W, p. 471]، وتستخدم عملية ضرب مركبات المتجه صغيرة القيمة للحصول على واحدة وسيطية القيمة، ثم تنزع الضرب

عن حاصل الجمع وتستمر في تربيع الأعداد الصغيرة والوسيطية وجمعها حتى الوصول إلى مركبة ذات قيمة كبيرة. وبمجرد ظهور مركبة قيمتها كبيرة، تضرب الخوارزمية المجموع السابق، وتستمر في عمليات الضرب في ثابت وفي التربيع، وجمع الأعداد المتبقية. إن الخوارزمية تفترض أنه في أثناء الانتقال من الأعداد الصغيرة إلى الأعداد الوسيطية، تكون الأعداد الصغيرة غير المضروبة في ثابت مهملة مقارنة بالأعداد الوسيطية. وبالمثل في أثناء الانتقال من الأعداد الوسيطية إلى الأعداد الكبيرة، فإن الأعداد الوسيطية غير المضروبة في ثابت تكون مهملة مقارنة بالأعداد الكبيرة. وهكذا يجب اختيار الوسيطات الضربية بحيث تكون مساواة الأعداد للصفر فقط عندما تكون مهملة حقًّا.

إن العلاقات بين خواص الآلة كما وصفت عن طريق $t, \sigma, \lambda, emin, emax$ ومعلمات الخوارزمية N, s, S, y, Y تعطى في آخر الخوارزمية.

تستخدم الخوارزمية ثلاثة أعلام لتبين المراحل المختلفة في عملية الجمع. تعطى هذه الأعلام قيمًا ابتدائية في الخطوة 3 في الخوارزمية. يعطى العلم 1 (FLAG 1) القيمة 1 حتى ملاقاة مركبة وسيطية أو كبيرة، ثم يحوّل إلى 0. يعطى العلم 2 (FLAG 2) القيمة 0 عندما تجمع الأعداد الصغيرة ثم يُحوّل إلى 1 عند ملاقاة أول عدد وسيطي، ويُحول مرة أخرى إلى 0 عند إيجاد عدد كبير.

يعطى العلم 3 (FLAG 3) القيمة 0 ابتداءً، ويتحوّل إلى 1 عند ملاقاة عدد كبير لأول مرّة.

تدخل الخطوة 3 العلم DONE الذي قيمته 0 حتى الانتهاء من الحسابات، ثم يحوّل إلى 1.

المدخلات: $N, s, S, y, Y, \lambda, n, x_1, x_2, \ldots, x_n$

المخرجات: $NORM$ أو عبارة خطأ مناسبة.

الخطوة	المضمون
1	إذا كان $0 \geq n$ فالمُخرجات (الحد n يجب أن يكون موجبًا). توقف.
2	إذا كان $N \leq n$ فالمخرجات (الحد n كبير جدًّا). توقف.
3	ضع $SUM = 0$ $FLAG1 = 1$ (الأرقام الصغيرة تجمع). $FLAG2 = 0$ $FLAG3 = 0$ $DONE = 0$ $i = 1$
4	بينما ($n \geq i$ و $FLAG1 = 1$) نفذ الخطوة 5.
5	إذا كان $y > \|x_i\|$ فضع $SUM = SUM + (Sx_i)^2$ $i = i + 1$ ما عدا ذلك ضع $FLAG1 = 0$ (نتج عدد غير صغير).
6	إذا كان $n \geq i$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2}/S$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = (SUM/S)/S$ (مقياس للأعداد الكبيرة). $FLAG2 = 1$

7	بينما ($i \le n$ و $FLAG2 = 1$) نفذ الخطوة 8. (تجمع الأعداد الوسيطية).
8	إذا كان $\lvert x_i \rvert < y$ فضع $SUM = SUM + x_i^2$ $i = i + 1$ ما عدا ذلك ضع $FLAG2 = 0$ (نتج عدد كبير).
9	إذا كان $DONE = 0$ فإنه إذا كان $i > n$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2}$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = ((SUM)s)s$ (مقياس للأعداد الكبيرة). $FLAG3 = 1$
10	بينما ($i \le n$ و $FLAG3 = 1$) نفذ الخطوة 11.
11	ضع $SUM = SUM + (sx_i)^2$ (جمع الأعداد الكبيرة). $i = i + 1$
12	إذا كان $DONE = 0$ فإنه إذا كان $SUM^{1/2} < \lambda s$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2}/s$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = \lambda$ (المعيار كبير جدًّا).
13	إذا كان $DONE = 1$ فالمخرجات ('Norm is', $NORM$) وما عدا ذلك المخرجات ('Norm ≥', $NORM$ حدث تخطٍ).
14	توقف.

لقد اختيرت العلاقات بين مؤشرات الآلة $t, \sigma, \lambda, emin, emax$ ووسيطات الخوارزمية N, s, S, y, Y في [Brow, W, p. 471] على الصورة الآتية:

$N = 10^{e_N}$ بحيث $e_N = \lfloor (t-2)/2 \rfloor$، أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي $(t-2)/2$.

$s = 10^{e_s}$ بحيث $e_s = \lfloor -(emax + e_N)/2 \rfloor$.

$S = 10^{e_S}$ بحيث $e_S = \lceil (1 - emin)/2 \rceil$، أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي $(1 - emin)/2$.

$y = 10^{e_y}$ بحيث $e_y = \lceil (emin + t - 2)/2 \rceil$.

$Y = 10^{e_Y}$ بحيث $e_Y = \lfloor (emax - e_N)/2 \rfloor$.

إن موثوقية هذه الخوارزمية قد زادت التعقيد كثيرًا إذا ما قُورنت بالخوارزمية التي بحثت في هذا الفصل. هناك أشكال كثيرة من البرمجيات العددية ذات الغرض العام متاحة تجاريًّا وفي متناول الجمهور. إن معظم البرمجيات المبكرة كانت قد كتبت للحواسيب المركزية، وإليك مرجع جيد هو *Sources and Development of Mathematical Software* ومحرره Wayne Cowell [Co]. وفي الوقت الحاضر وحين أصبح الحاسوب ذو الشاشة قويًّا بما يكفي، فقد أصبحت البرمجيات العددية متاحة للحواسيب الشخصية ومحطات العمل. وقد كتبت معظم هذه البرمجيات بلغة FORTRAN 77 على الرغم من كتابة بعضها بلغات Java، FORTRAN 90، C++، C. إن عمليات ALGOL كانت قد قدمت لحسابات المصفوفات في عام 1971 [WR]، ثم طوّرت حقيبة برمجيات FORTRAN مبنيــة على عمليات ALGOL، وكان هذا التطوير موجّهًا إلى برمجيات EISPACK. لقد وُثّقت هذه البرمجيات عن طريق Springer – Verlag بوصفها جزءًا من مذكرات المحاضرات

لقد طُوِّر الحاسوب الشخصي في أول الثمانينيات من القرن العشرين على يد ستيف وزنياك Steve Wozniak وستيف جوبس Steve Jobs مؤسسي حاسوب أبل Apple Compute.

وكان أول حاسوب محمول هو أوزبورن I Osborne الذي صنع عام 1981. مع أنه كان أكبر وأثقل كثيراً مما نتصوره الآن حاسوبًا محمولاً.

إن نظام فورتران (FORmula TRANslator) كان لغة البرمجة العلمية الأصلية ذات الغرض العام. وما زالت قيد الاستخدام في الحالات التي تتطلب حسابات علمية متعمقة. وإن الطبعة الحالية المقننة لهذه اللغة هي FORTRAN.

إن مشروع EISPACK هو أول حقيبة كبيرة للبرمجيات العددية التي أصبحت متاحة للاستخدام. وفتحت الطريق لبرمجيات أخرى تتبعها.

في سلسلة علم الحاسوب Lecture Notes in Computer Science Series [Sm,B] and [Gar]. تستخدم برمجيات FORTRAN لحساب القيم المميزة eigenvalues والمتجهات المميّزة eigenvectors لعــدد من أنواع المصفوفات المختلفة. إن EISPACK مصان من قبل نتلب netlib، ويمكن الدخول إليه عن طريق موقع نتلب http://www.netlib.org أما LINPACK فهو حقيبة برمجيات FORTRAN لتحليل نظم صيغ خطية وحلها وحل مسائل مربعات الصغرى الخطية. إن توثيق هذه البرمجية موجــود في [DBMS]، وموضوع على موقع نتلــب (netlib)، وهناك مقدمة متدرجة خطوة خطوة لبرامــج LINPACK و EISPACK و BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) مشــروحة في [CV] ولقــد أتيحت برمجيــة LAPACK أول مرة عام 1992، وهي من مكتبة برمجيات فورتران، وهــي أقــوى من LINPACK و EISPACK وذلك بتكامل هاتــين المجموعتين من الخوارزميات في برمجية موحدة متجددة. وقد أعيد إنشاء البرمجيات للتوصل إلى معالجات المتّجهات على نحو كافٍ، وأداء أكثر كفاءة أو ذاكرة مشتركة. لقد طُوّر LAPACK أفقيًا وبعمق في الطبعة 3.0 المتاحة JAVA ،C++ ،C ،FORTRAN 90 ،FORTRA. إن حقيبة BLAS ليست جزءًا من LAPACK، ولكن الشيفرة لـ BLAS موزّعة مع LAPACK. وإن دليل LAPACK الطبعة الثالثة متاح من SIAM. The LAPACK User's Guide, 3rd ed.[AN] وهو متاح أيضًا على الموقع

http://www.netlib.org / lapack /lug/lapack_lug.html

ويمكن الحصول على LAPACK أو برمجيات فردية من LAPACK عن طريق موقع نتلب netlib. وتوجــد حقائب أخرى لحل أنواع محددة من المســائل موجودة للاســتخدام العام ومتاحة على نتلب. ويمكن الاستزادة من المعلومات في المقالة "Software Distribution Using Netlib" للمؤلفين [DRW] Wade و Roman و Dongarra. إن هذه البرامج قادرة على فحص الشروط الخاصة جميعها التي يمكن أن تؤدي إلى الخطأ أو الفشل.

سنناقش في آخر كل فصل بعض البرمجيات الملائمة للأغراض العامة. إن البرمجيات التجارية المتاحــة تمثّل ما توصل إليــه العلم في الطرائق العددية. وغالبًا ما تبنى محتوياتها على حقائب المســتوى العمومــي، ولكنها تحتوي على طرائــق في مكتبات لأي نوع من المســائل تتكون من المكتبات STAT، MATH، و SFUN للرياضيات العددية والإحصاء والدّوال الخاصة على التوالي. تحتوي هذه المكتبات على أكثر من 900 برمجية كانت متاحة أصلًا في FORTRAN 77 ومتاحة الآن فــي FORTRAN 90، C و Java. إن هــذه البرمجيات تحل أكثر مســائل التحليل العددي شــيوعًا. وإن المعلومــات عن المكتبات متاحة على http://www.vni.com وهــي متوفرة على نحو كافٍ وبتوثيــق موســع. ويوجد مثال برامجي لكل برنامج، بالإضافــة إلى معلومات عن القاعدة المرجعية. ويحتوي IMSL على طرائق للأنظمة الخطية، تحليل نظام القيم، الاستيفاء الداخلي، التكامــل والتفاضل، الصيغ التفاضلية، التمويــلات، الصيغ غير الخطية، الأعظمية، وعمليات المصفوفة/المتجهات الرئيسة. وتحتوي المكتبة على برمجيات إحصائية واسعة أيضًا. لقد وجدت مجموعــة الخوارزميات العدديــة The Numerical Algorithms Group (NAG) في المملكة المتحدة منــذ 1970، وتقــدم NAG أكثر مــن 1000 برمجية فــي مكتبــة FORTRAN 77 و400 برمجية فــي مكتبــة C، وأكثر مــن 200 برمجية في مكتبــة FORTRAN 90 ومكتبة لــلآلات المتوازية ومجموعــات مــن محطــات العمل أو الحواســيب الشــخصية. إن مجموعة جزئيــة من مكتبة FORTRAN 77 (the NAG Foundation Library) متاحة للحواسيب الشخصية ومحطات العمل في حال كان فضاء العمل فيها محدودًا. يحتوي دليل استخدام NAG على تعليمات وأمثلة مع مثال

تأســـت هندســـة البرمجيـــات كنظـــام مخبري في ســـبعينيات وثمانينيـــات القـــرن العشـــرين. حيث طـــور برنامج EISPACK فـــي مختبرات آرغنـــون ولينباك فيما بعد. ومع بداية ثمانينيات القرن العشـــرين كانت مختبرات أرغنون ذات شهرة عالية بكونها القائـــدة في هذا المجال ليس فقط فـــي المجـــال الرمـــزي وإنما في مجال الحسابات العددية أيضًا.

لقـــد أصبَحت IMSL أول مكتبـــة علـــمية للحواسيب العامـــة علـــى نطـــاق واســـع في عـــام 1970م. ومنـــذ ذلك الوقت أصبحت الكتبات متاحة للأنظمة الحاسوبية على مدى الحواسيب الشخصية.

تـــأسّـــت مجمـــوعة الخوارزميات العددية (NAG) في المملكة المتحدة عام 1971م. وطوّرت أول مكـــتبة لبـــرمجـــة الرياضيات. وهي تحوي الآن أكثـــر من 10,000 مســـتخدم، وتحـــوي أكثـــر مـــن ألـــف دالّة في الرياضيـــات والإحصـــاء. تمتـــد من البرمجيـــات الإحصائية، والرمزية، المرئيـــة والمحـــاكاة العدديـــة إلـــى المجـــمّعـــات وأدوات التـــطـــويـــر التطبيقي.

مخرجات لكل برمجية. إن [Ph] مرجع لمقدمة مفيدة لبرمجيات NAG. تحتوي مكتبة NAG على برمجيات لتنفيذ معظم المهمات الرئيسة في التحليل العددي بطريقة تشبه تلك التي في IMSL، وهي تحتوي على بعض البرمجيات الإحصائية أيضًا، ومجموعة من برمجيات الرسم، والمكتبة متاحة تجاريًّا من مجموعة الخوارزميات العددية ذات الموقع على الشبكة http://www.nag.com لقد صُمِّمت حقائب IMSL و NAG لعالم الرياضيات، والعالم أو المهندس الذي يرغب في استدعاء برمجيات Java، C، أو FORTRAN ذات النوعية العالية من داخل البرنامج. إن التوثيق المتاح مع الحقائب التجارية يشرح البرنامج المطلوب لاستخدام البرامج المكتبية. إن الحقائب الثلاث الآتية ذات بيئات فردية، وعندما تنشط فإن المستخدم يدخل أوامر تؤدي إلى حل مسألة ما عن طريق الحقيبة. وعلى كل حال فإن كل حقيبة تسمح بإنشاء برنامج ضمن لغة الأوامر فيها. إن MATLAB مختبر مصفوفي كان أصلًا برنامج FORTRAN نشره كليف مولر Cleve Moler [Mo] وقد بني معظم المختبر على برمجيات EISPACK و LINPACK مع أن دوال مثل الأنظمة غير الخطية، التكامل العددي، الشرائح التكعيبية، مطابقة المنحنيات، الأعظمية، الصيغ التفاضلية العادية، وأدوات الرسم قد ضمّنت فيه. إن هذا النظام القوي ذا الشمولية الذاتية مفيد خصوصًا لاستخدامه في مقرر الجبر الخطي التطبيقي. لقد أصبح ماتلاب MATLAB متاحًا منذ 1985، ويمكن الحصول على معلومات عن هذا النظام من شركة الأعمال الرياضية The MathWorks Inc، وعنوانها على الإنترنت هو http://www.mathworks.com والحقيبة الأخرى هي مابل Maple، وهي نظام حاسوبي جبري (CAS) طوّر في عام 1980م من قبل مجموعة الحساب الرمزي في جامعة واترلو Symbolic Computational Group at University of Waterloo إن تصميم نظام مابل Maple قد نُشِرَ في بحث تشار، جيرس، جنتلمن، وجونت
B.W. Char, K.O. Geddes, W.M. Gentlemen, and G.H. gonnet [CGGG]

كُتبت ماتلاب MATLAB في الأصل لإتاحة الوصول إلى برمجية للمصفوفة في مشروعات لنباك وايزباك LINPACK و EISPACK.

كُتب النموذج الأول في أواخر 1970 لاستخدامه في مقررات مبرهنة المصفوفات، الجبر الخطي والتحليل العددي. ويوجد في الوقت الحاضر أكثر من 500,000 مستخدم لماتلاب MATLAB في أكثر من 100 بلد.

إن برمجيات NAG متوافقة مع مابل Maple ابتداءً من النموذج 7.0.

مع اختيارنا Maple نظامًا معياريًّا لنا في CAS، فإن Mathematical المشهورة التي ظهرت في عام 1988 يمكن استخدامها لهذا الغرض.

إن مابل Maple متاح منذ الثمانينيات 1980، وعنوان الحقيبة http://www.maplesoft.com ومابل Maple المكتوبة بلغة C قابلة لمعالجة المعلومات بطريقة رمزية. وإن هذه المعالجة الرمزية تسمح للمستخدم بالحصول على الأجوبة الدقيقة بدلًا من القيم العددية. وبإمكان مابل Maple إعطاء أجوبة دقيقة لمسائل رياضية؛ مثل التكاملات، الصيغ التفاضلية، والأنظمة الخطية. إنها تحوي إنشاءً برامجيًّا، وتسمح بحفظ نص الأوامر في ملفات صحائف العمل التي يمكن إدخالها في مابل، ومن ثم تنفيذ الأوامر. لقد اختير مابل لاستخدامه في هذا الكتاب بسبب خصائص الحساب الرمزي، الحساب العددي وصحائف العمل. (تستخدم أوامر مابل وتكتب في متن هذا الكتاب)، والحقيبة الثالثة هي Mathematical التي طوّرها ولفرام ريسيرج Wolfram Research عام 1985، ونشرت أول مرة عام 1988. إنها حقيبة قوية ومرغوبة من نوع CAS، وهي شائعة في مجالي التربية والأعمال. ويمكن الحصول على المعلومات حول هذه الحقيبة على العنوان http://www.wolfram.com، ويمكن الرجوع إلى كتب كودي وييت [Cody+Waite CW] وكوكلر [Kockler Ko] لمعلومات إضافية حول البرامج ومكتبات البرامج، وإلى بحث دوناكرا واكلر المنشور عام Dongarra + Walker 1995 ويمكن الرجوع إلى كتاب جايتيني–جاتلين وفرايز [CF] Chaitini - Chatelin and Frayse، وكذلك إلى بحث جولدبرغ [Goldberg Goldb] لمعلومات إضافية حول حسابات النقطة العائمة. إن كتب شندل [Schendell Sche]، فيليبس وفريمان [PF] Philips and Freeman، وجولب وأورتيقا [Golub Ortega GO] من الكتب التي تعرض تطبيق الطرائق العددية على الحواسيب المتوازية.

الباب

2

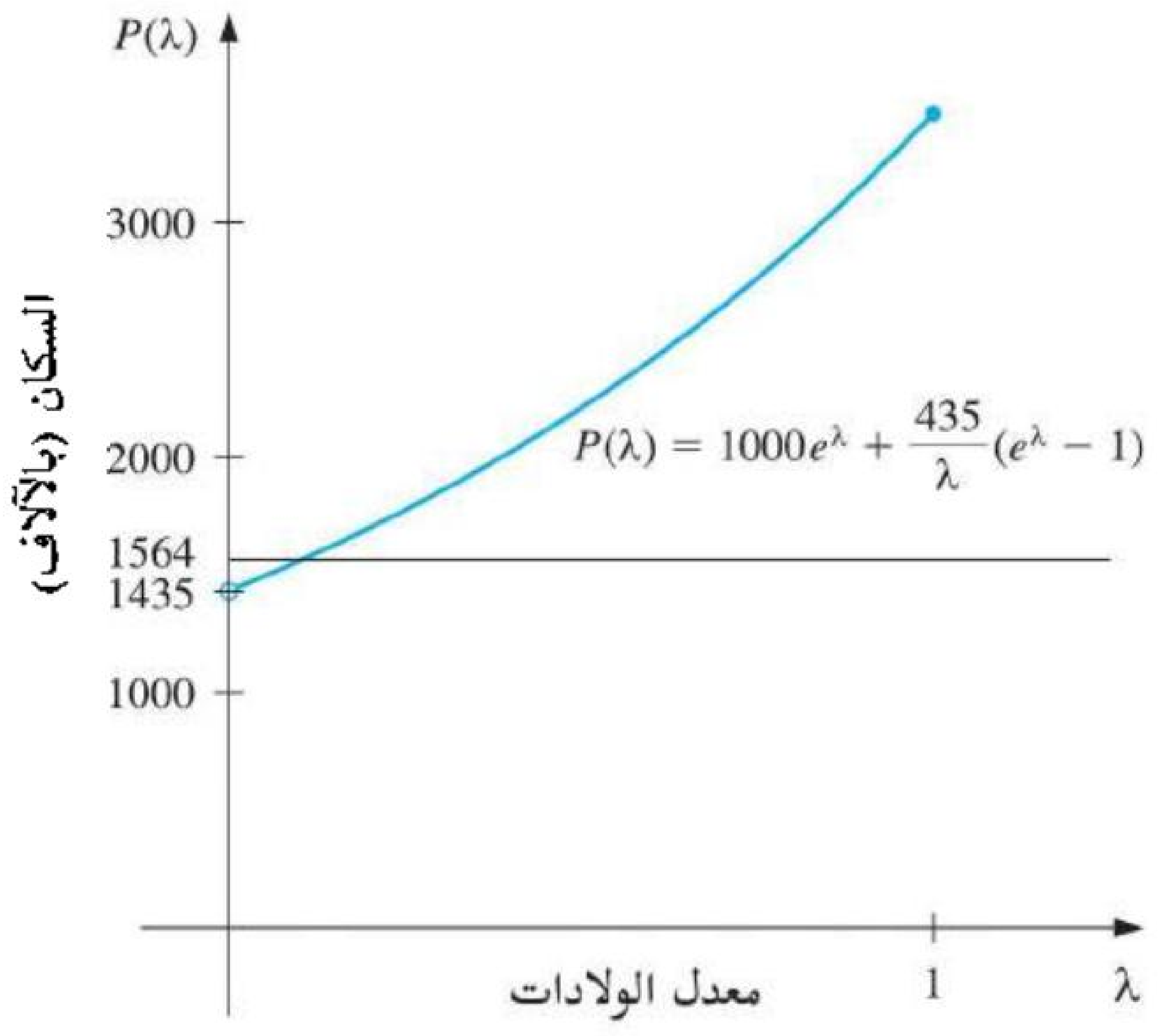
حلول المعادلات بمتغير واحد
Solution of Equations in One Variable

مقدمة

يمكن نمذجة النمو السكاني عبر فترات زمنية قصيرة بافتراض أن النمو السكاني يكون متصلًا وبمعدل نمو يتناسب مع العدد الفعلي للسكان في الوقت المعين. فلو افترضنا أن $N(t)$ يساوي عدد السكان عند الزمن t، و λ يساوي معدل الولادات (ثابت) للسكان، فيمكن التعبير عن النمو السكاني بالصيغة التفاضلية

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

وحل هذه الصيغة هو $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$، حيث تمثِّل N_0 عدد السكان الابتدائي



وهذا النموذج الأسيّ يكون مطابقًا للواقع فقط عندما يكون المجتمع محصنًا دون هجرة. وإذا ما سمحنا بمعدل هجرة υ فإنّ الصيغة التفاضلية أعلاه تصبح

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + \upsilon$$

وحلها هو
$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

ليكن مجتمع ما بعدد سكان ابتدائي قدره 1,000,000 نسمة، وأن 435,000 مهاجر انضموا إلى هذا المجتمع خلال السنة الأولى. ووُجد في نهاية السنة الأولى أن تعداد المجتمع هذا كان 1,564,000 نسمة. ولتحديد معدل ولادات هذا المجتمع، علينا تحديد قيمة λ من الصيغة
$$1,564,000 = 1,000,000e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

إن الطرائق العددية التي نقدمها في هذا الباب تستخدم في تقريب الحلول لمثل هذه الصيغ، في الحالات التي يتعذر إيجاد حلول لها بالطرائق الجبرية. وسنتناول حل هذه الصيغة بعينها في التمرين (24) من الفصل (3.2).

1.2 طريقة التنصيف The Bisection Method

سنتناول في هذا الفصل واحدة من المسائل الرئيسة للتقريب العددي، وهي مسألة إيجاد جذور الصيغ. ويتضمن هذا الأسلوب إيجاد جذر أو حل لصيغة بالصيغة $f(x) = 0$، للدّالة f، ويسمّى جذر هذه الصيغة صفرًا للدّالة f أيضًا.

إن مسألة إيجاد تقريب لجذور الصيغة يعود إلى ما قبل العام 1700 قبل الميلاد، فقد كان من ضمن مجموعة Yale البابلية جدول بالرموز المسمارية يعود إلى تلك الحقبة، ويعطي عددًا ذا الأساس 60، ويعادل العدد 1,414222، كقيمة تقريبية للجذر $\sqrt{2}$، وهي تمهيدية تقترب دقتها إلى حد 10^{-5}. ويمكن إيجاد هذا التقريب بتطبيق أسلوب تناولناه في التمرين (19) من الفصل (2.2).

كما يشير اسمها "ثنائية التجزئة"، هـو التقسـيم (في هذه الحالـة هي الفترة) لجزأين (في هذه الحالـة متكافئين) اثنين.

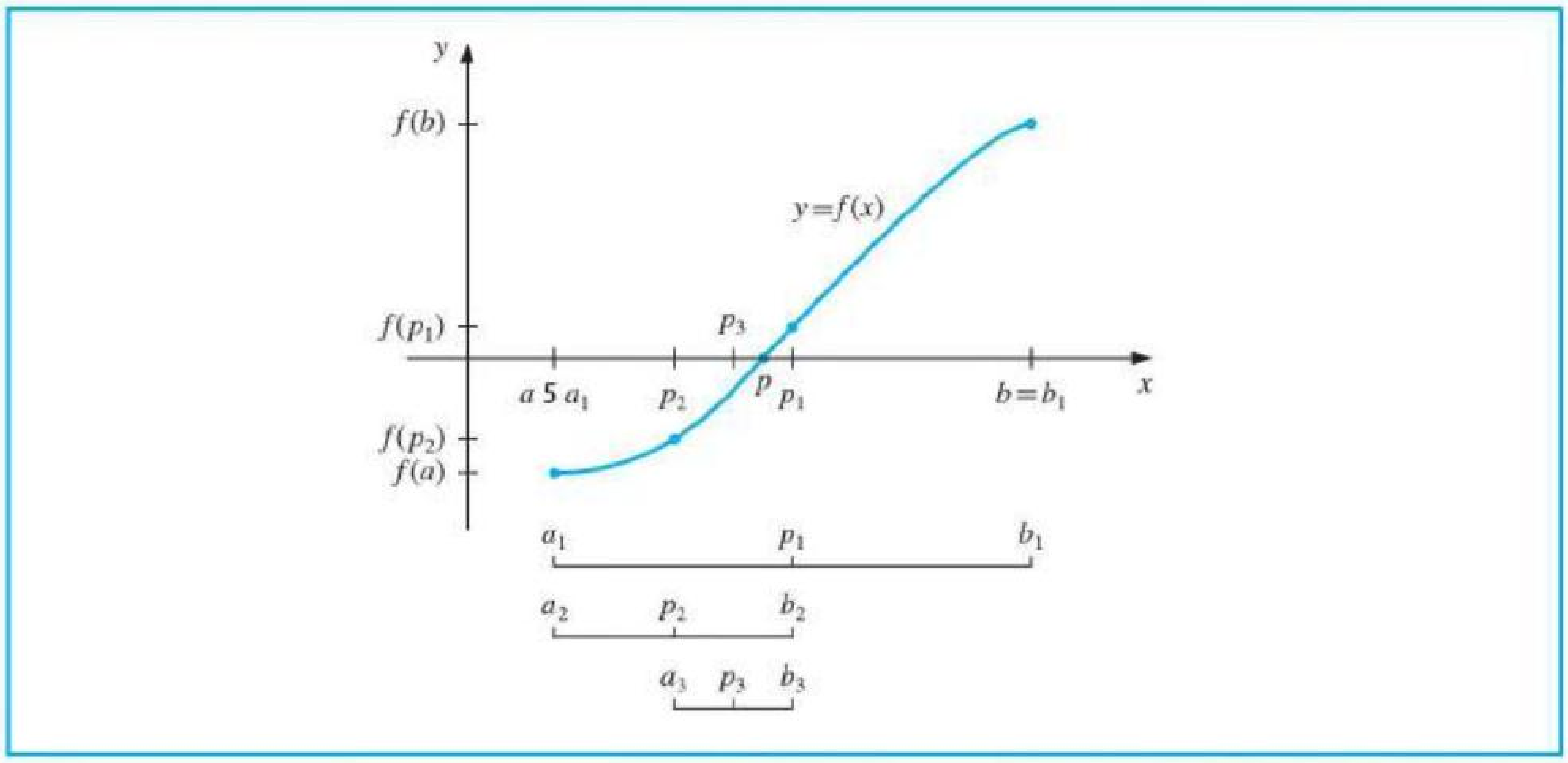
يعتمد الأسلوب الأول على مبرهنة القيمة الوسطية، ويسمّى "طريقة التنصيف". وهنا نفترض أن f تمثّل دالّة متصلة ومعرّفة على الفترة $[a, b]$ مع كون كل من الدّوال $f(a)$ و $f(b)$ ذات إشارة مختلفة. ووفقًا لمبرهنة القيمة الوسطية، فمن المؤكد وجود العدد p في الفترة (a, b) بحيث يكون $f(p) = 0$. وعلى الرغم من أن العملية قائمة على وجود عدد من الجذور يزيد عن واحد في الفترة (a, b) فإنّنا – ولغرض التبسيط – نفترض وحدانية الجذر. وتستدعي الطريقة تكرار تنصيف الفترات الجزئية للفترة $[a, b]$، وتحديد النصف الذي يحتوي p في كل خطوة.

في علم الحاسوب، فإن عملية تقسـيم مجموعة باسـتمرار إلى نصفين للبحث عن حل للمسـألة – كما تفعل طريقة التنصيف– تُعرف بأنها عملية البحث الثنائي binary.

ليكن $a_1 = a$ و $b_1 = b$ في البداية، وليمثل p_1 منتصف الفترة $[a, b]$. أي أن
$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$
إذا كانت $f(p_1) = 0$ فإنّ $p = p_1$، وبهذا نكون قد انتهينا من الحل. أما إذا كانت $f(p_1) \neq 0$ فإنّ إشارة $f(p_1)$ هي إما إشارة $f(a_1)$ أو إشارة $f(b_1)$. فإذا كانت $f(p_1)$ و $f(a_1)$ لهما الإشارة نفسها، تكون $p \in (p_1, b_1)$ ونعطي القيم $a_2 = p_1$ و $b_2 = b_1$. أمّا إذا كانت $f(p_1)$ و $f(a_1)$ لهما إشارتان مختلفتان، فعندها تكون $p \in (a_1, p_1)$، ونعطي القيم $a_2 = a_1$ و $b_2 = p_1$. وعندئذٍ

نعيد تكرار الخطوة على الفترة $[a_2,b_2]$، وبهذا نحصل على الطريقة الموضحة في الخوارزمية (1.2). (انظر شكل 1.2).

شكل 1.2



ALGORITHM

الخوارزمية 1.2

التنصيف Bisection

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ للدالّة f المتصلة على الفترة $[a, b]$ مع اختلاف إشارة $f(a)$ و $f(b)$.

المدخلات: نقاط النهاية a, b الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$ ، $FA = f(a)$.
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = a + (b - a)/2$ (احسب p_i) $FP = f(p)$.
4	إذا حصل $FP = 0$ ، أو $(b - a)/2 < TOL$. المُخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	إذا حصل $FA \cdot FP > 0$ فضع $a = p$ (واحسب a_i, b_i)، $FA = FP$ وخلاف ذلك ضع $b = p$.
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 =', N_0$) توقف.

■

يمكن تطبيق عمليات إيقاف أخرى في الخطوة (4) من الخوارزمية (1.2) أو في أي أسلوب

تكرار ضمن هذا الباب. ويمكننا على سبيل المثال اختيار حد السماح $\varepsilon > 0$ وتوليد $p_1, \dots, p_N$ لتحقّق أحد الشروط الآتية:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \tag{1.2}$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon\,, \quad p_N \neq 0 \tag{2.2}$$

أو

$$|f(p_N)| < \varepsilon \tag{3.2}$$

وتجدر الإشارة هنا إلى بعض الصعوبات التي يمكن أن تظهر عند تطبيق أي من قواعد الإيقاف هذه. فعلى سبيل المثال يمكن أن تؤول نهاية المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ مع خاصية الفروقات $p_n - p_{n-1}$ إلى الصفر، حيث ليس للمتتالية نفسها نهاية محدودة. (انظر تمرين 17).
ومن المحتمل أن تقترب $f(p_n)$ من الصفر أيضًا، حيث تختلف p_n منطقيًّا عن p.
(انظر تمرين 16) تعدّ المتباينة (2.2) أفضل قاعدة إيقاف؛ لكونها تقترب من اختبار الخطأ النسبي دون أي معلومات إضافية حول f أو p.

وعند استخدام الحاسوب لتوليد التقريبات؛ فمن الأفضل تحديد الحد الأعلى لعدد مرات التكرار. وهذا من شأنه استبعاد إمكانية إدخال عدد لانهائي من التدويرات، وهي حالة يمكن حدوثها عندما لا يكون للمتتالية نهاية محدودة (عند ترميز البرنامج ترميزًا خطأً أيضًا). وقد تضمنت الخطوة (2) من الخوارزمية (1.2) ذلك، حيث حدَّدنا N_0 مع إيقاف العملية عندما يكون $i > N_0$.

لاحظ أنه عند البدء بخوارزمية التنصيف، يتعين إيجاد الفترة $[a, b]$ مع $f(a) \,.\, f(b) < 0$.
ومن المعلوم في كل خطوة أن مدى الفترة المتضمن صفرًا لـِ f ينقص بمقدار 2، لذا يفضل اختيار الفترة الابتدائية $[a, b]$ أصغر ما يمكن. وعلى سبيل المثال إذا كانت $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ يكون لدينا كل من

$$f(0) \cdot f(1) < 0 \quad \text{و} \quad f(-4) \cdot f(4) < 0$$

وبناءً عليه فإنّ خوارزمية التنصيف يمكن استخدامها لأي من الفترتين $[-4, 4]$ أو $[0, 1]$ وعلى أي حال فإنّ استخدام الفترة $[0, 1]$ بدلًا من $[-4, 4]$ سيقلّص عدد مرات التكرار المطلوبة إلى 3 مرات، للوصول إلى الدقة المحددة. ويوضح المثال الآتي خوارزمية التنصيف. وتتوقف عملية التكرار في هذا المثال عندما يكون الخطأ النسبي أقل من 0.0001، أي عندما تكون

$$\frac{|p - p_n|}{|p|} < 10^{-4}$$

مثال 1 الصيغة $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ لها جذر ضمن $[1, 2]$؛ لأن $f(1) = -5$ و $f(2) = 14$ وتعطي خوارزمية التنصيف القيم في جدول (1.2). ونلاحظ بعد 13 تكرارًا أن $p_{13} = 1.365112305$ يقرب الجذر p بخطأ مقداره

$$|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |\,1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070$$

ولكون $|a_{14}| < |p|$ فإن $\dfrac{|p - p_{13}|}{|p|} < \dfrac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \leq 9.0 \times 10^{-5}$

وبناءً عليه فإنّ التقريب إلى أربع منازل عشرية على الأقل صحيح. والقيمة الصحيحة لـِ p لتسع منازل هي 1.365230013، لاحظ أن p_9 تكون أقرب إلى p من التقريب الأخير p_{13}.

جدول 1.2

$f(p_n)$	p_n	b_n	a_n	n
2.375	1.5	2.0	1.0	1
− 1.79687	1.25	1.5	1.0	2
0.16211	1.375	1.5	1.25	3
− 0.84839	1.3125	1.375	1.25	4
− 0.35098	1.34375	1.375	1.3125	5
− 0.09641	1.359375	1.375	1.34375	6
0.03236	1.3671875	1.375	1.359375	7
− 0.03215	1.36328125	1.3671875	1.359375	8
0.000072	1.365234375	1.3671875	1.36328125	9
− 0.01605	1.364257813	1.365234375	1.36328125	10
− 0.00799	1.364746094	1.365234375	1.364257813	11
− 0.00396	1.364990235	1.365234375	1.364746094	12
− 0.00194	1.365112305	1.365234375	1.364990235	13

قد نستغرب حدوث ذلك؛ لأن $|f(p_9)| < |f(p_{13})|$، ولكن ليس بالإمكان التأكد منه إلا عند معرفة الجواب الصحيح. ■

وعلى الرغم من وضوح مفهوم طريقة التنصيف، إلا أنها تتضمن عيوبًا ملموسة؛ فهي بطيئة في تقاربها (أي أن N قد تكون كبيرة قليلًا قبل الحصول على قيمة صغيرة ملموسة لـِ $|p - p_N|$) بالإضافة إلى إمكانية تجاهل وسيط جيد للمقاربة دون الوقوف عنده. وعلى الرغم من ذلك، فإنّ الطريقة هذه تتسم بالجودة؛ كونها تتقارب إلى حل محدود دائمًا، ولهذا السبب فهي تستخدم بداية في طرائق أخرى أكثر جدوى غالبًا، وسنتناولها في آخر هذا الباب.

مبرهنة 1.2 ليكن $f \in C[a, b]$ و $f(a) \cdot f(b) < 0$، عندئذ تولد طريقة التنصيف المتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ التي تقترب من الجذر p للدّالة f حيث

$$|p_n - p| \le \frac{b-a}{2^n} \quad \text{عندما} \quad n \ge 1$$ ■

البرهان لكل $n \ge 1$ يكون لدينا

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a) \quad \text{و} \quad p \in (a_n, b_n)$$

وبما أن $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ لكل $n \ge 1$ فإنّ ذلك يؤدي إلى

$$|p_n - p| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}$$ ■ ■ ■

ولأن

$$|p_n - p| \le (b-a)\frac{1}{2^n}$$

فإنّ المتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو p مع معدل تقارب $O(1/2^n)$. أي أن

$$p_n = p + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

ومن الضروري إدراك أن المبرهنة (1.2) تعطي حدًّا فقط لخطأ التقريب، وربما يكون هذا الحد ليس

دقيقًا بالقدر المطلوب. وقد طُبِّق هذا الحد في مسألة المثال (1) للدلالة على ذلك، ويضمن فقط

$$|p - p_9| \leq \frac{2-1}{2^9} \approx 2 \times 10^{-3}$$

حيث إن الخطأ الحقيقي أصغر من ذلك كثيرًا، وهو

$$|p - p_9| = |\ 1.365230013 - 1.365234375| \approx 4.4 \times 10^{-6}$$

مثال 2 لتحديد عدد مرات التكرار الضرورية لحل $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ بدقة 10^{-3} وباستخدام $a_1 = 1$ و $b_1 = 2$ يجب إيجاد عدد صحيح N يحقّق

$$|p_N - p| \leq 2^{-N}(b-a) = 2^{-N} < 10^{-3}$$

سنستخدم اللوغارتمات لتحديد N. وعلى الرغم من أن اللوغارتمات لأي أساس تفي بالغرض، إلا أننا سنستخدم الأساس 10، ولأن $2^{-N} < 10^{-3}$ تؤدي إلى كون $\log_{10} 2^{-N} < \log_{10} 10^{-3} = -3$ فإنّنا نحتاج إلى أن يكون لدينا

$$-N \log_{10} 2 < -3 \quad \text{ومن ثم} \quad N > \frac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.96$$

وبناءً على ذلك، فإنّ 10 تكرارات ستُضمّن بدقة ضمن 10^{-3} تقريبًا، ويظهر الجدول (1.2) أن القيمة $p_9 = 1.365234375$ ضمن 10^{-4} بدقة. ومرة أخرى فإن تحليل الخطأ يعطي حدًّا لعدد مرات التكرار فقط، ومن الضروري أن يُعلم أن هذا الحد يكون في حالات كثيرة أكبر كثيرًا من العدد الحقيقي المطلوب. ■

إن عدد التكرارات في طريقة التنصيف تفترض أن الحسابات تجري باستخدام حساب الخانات غير المنتهية. وعندما تُنفّذ في الحاسبة يتعين عندئذ أخذ تقريب الخطأ في الحسبان. ويتحتم إيجاد حساب نقطة التنصيف للفترة $[a_n, b_n]$ على سبيل المثال وفق الصيغة

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$$

بدلًا من الصيغة الجبرية المكافئة لها

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

فالصيغة الأولى تضيف تصحيحًا بسيطًا وهو $(b_n - a_n)/2$ للقيمة المعلومة a_n. فعندما تكون $b_n - a_n$ قريبة من الدقة العظمى للآلة فإنّ ثمة خطأً ضمن هذا التصحيح على الرغم من أنه لن يؤثر بوضوح في القيمة المحسوبة لـ p_n. لذا عندما يحدث ذلك فإنّ من الممكن لـ $(b_n - a_n)/2$ تكرار نقطة التنصيف التي لا تكون أَصلًا في الفترة $[a_n, b_n]$.

الكلمة اللاتينية signum تعني رمز "token" أو إشارة "sign"، لذا فالاقتران الرمزي يعيد بشكل طبيعي إشارة الرقم (ما لم يكن الرقم صفرًا).

ملحوظة أخيرة، لتحديد أي جزء من الفترة $[a_n, b_n]$ يتضمن الجذر f؛ فمن المستحسن توظيف دالّة Signum التي تعرّف بالآتي:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

إن الاختبار سيكون

$$f(a_n)\cdot f(p_n) > 0 \text{ بدلاً من } \operatorname{sgn}(f(a_n))\cdot \operatorname{sgn}(f(p_n)) > 0$$

وسيعطي النتائج نفسها، لكنه يتجنب احتمال التضخيم أو التقليص في عملية ضرب $f(a_n)$ و $f(p_n)$.

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 1.2

1. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد p_3 للدالّة $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ في الفترة $[0, 1]$.
2. ليكن $f(x) = 3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد p_3 للفترات الآتية:
   أ. $[-2, 1.5]$ ب. $[-1.25, 2.5]$
3. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-2} للصيغة $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ وللفترات الآتية:
   أ. $[0, 1]$ ب. $[1, 3.2]$ ج. $[3.2, 4]$
4. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-2} للصيغة $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ وللفترات الآتية:
   أ. $[-2, -1]$ ب. $[0, 2]$ ج. $[2, 3]$ د. $[-1, 0]$
5. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} للمسائل الآتية:
   أ. $x - 2^{-x} = 0$ لكل $0 \le x \le 1$.
   ب. $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ لكل $0 \le x \le 1$.
   ج. $2x\cos(2x) - (x+1)^2 = 0$ لكل $-3 \le x \le -2$ و $-1 \le x \le 0$.
   د. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ لكل $0.2 \le x \le 0.3$ و $1.2 \le x \le 1.3$.
6. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} للمسائل الآتية:
   أ. $3x - e^x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$.
   ب. $x + 3\cos x - e^x = 0$ لكل $0 \le x \le 1$.
   ج. $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$ و $2 \le x \le 4$.
   د. $x + 1 - 2\sin \pi x = 0$ لكل $0 \le x \le 0.5$ و $0.5 \le x \le 1$.
7. أ. ارسم الشكل $y = x$ و $y = 2\sin x$.
   ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} لأول قيمة موجبة لـ x حيث $x = 2\sin x$.
8. أ. ارسم الشكل $y = x$ و $y = \tan x$.
   ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} لأول قيمة موجبة لـ x حيث $x = \tan x$.
9. أ. ارسم الشكل $y = e^x - 2$ و $y = \cos(e^x - 2)$.
   ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} لقيمة ضمن $[0.5, 1.5]$ حيث $e^x - 2 = \cos(e^x - 2)$.
10. ليكن $f(x) = (x+2)(x+1)^2 x(x-1)^3(x-2)$ لأي صفر لـِ f، تتقارب طريقة التنصيف عند تطبيقها على الفترات الآتية:
   أ. $[-1.5, 2.5]$ ب. $[-0.5, 2.4]$ ج. $[-0.5, 3]$ د. $[-3, -0.5]$
11. ليكن $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$ لأي صفر لـِ f، تتقارب طريقة التنصيف عند تطبيقها على الفترات الآتية:
   أ. $[-3, 2.5]$ ب. $[-2.5, 3]$ ج. $[-1.75, 1.5]$ د. $[-1.5, 1.75]$

12. أوجد تقريبًا صحيحًا إلى $\sqrt{3}$ للحد 10^{-4} مستخدمًا خوارزمية التنصيف (افترض $f(x) = x^2 - 3$).

13. أوجد تقريبًا صحيحًا إلى $\sqrt[3]{25}$ للحد 10^{-4} مستخدمًا خوارزمية التنصيف.

14. استخدم المبرهنة (1.2) لإيجاد الحد لعدد التكرارات اللازمة للوصول إلى تقريب بدقة 10^{-3} لحل $x^3 + x - 4 = 0$ واقعًا في الفترة $[1, 4]$. أوجد تقريبًا للجذر بنفس درجة الدقة هذه.

15. استخدم المبرهنة (1.2) لإيجاد الحد لعدد التكرارات اللازمة للوصول إلى تقريب بدقة 10^{-4} لحل $x^3 - x - 1 = 0$ واقعًا في الفترة $[1, 2]$. أوجد تقريبًا للجذر بنفس درجة هذه الدقة.

16. ليكن $f(x) = (x - 1)^{10}$، $p = 1$ و $p_n = 1 + 1/n$. أثبت أن $|f(p_n)| < 10^{-3}$ عندما $n > 1$ ولكن $|p - p_n| < 10^{-3}$ يتطلب كون $n > 1000$.

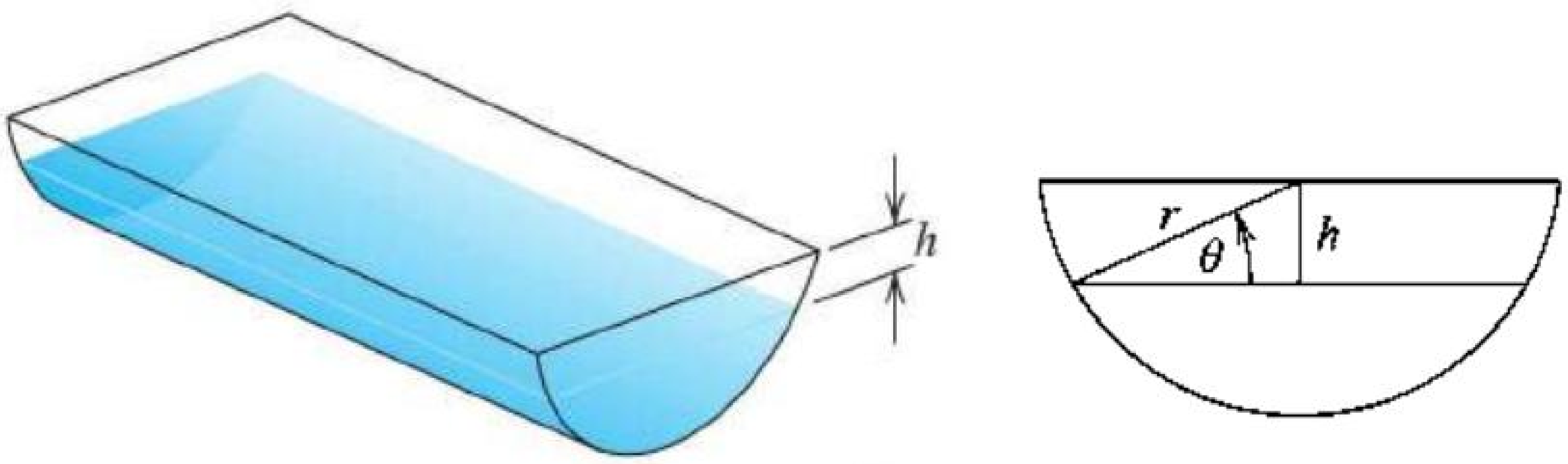
17. ليكن $\{p_n\}$ عبارة عن متتالية معرفة بـ $p_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$. أثبت أن $\{p_n\}$ غير متقاربة حتى لو كان $\lim_{n\to\infty}(p_n - p_{n-1}) = 0$.

18. تتضمن الدّالة $f(x) = \sin \pi x$ أصفارًا عند كل عدد صحيح. أثبت أنه عندما تكون $-1 < a < 0$ و $2 < b < 3$، فإنّ طريقة التنصيف تتقارب إلى:

أ. 0 إذا كان $a + b < 2$ ب. 2 إذا كان $a + b > 2$ أ. 1 إذا كان $a + b = 2$

19. حوض بطول L له مقطع على شكل نصف دائرة قطرها r (انظر شكل)، وعند ملئه بالماء لغاية البعد h عن السطح العلوي فإنّ حجم الماء يكون

$$V = L\left[0.5\pi r^2 - r^2 \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) - h(r^2 - h^2)^{1/2}\right]$$

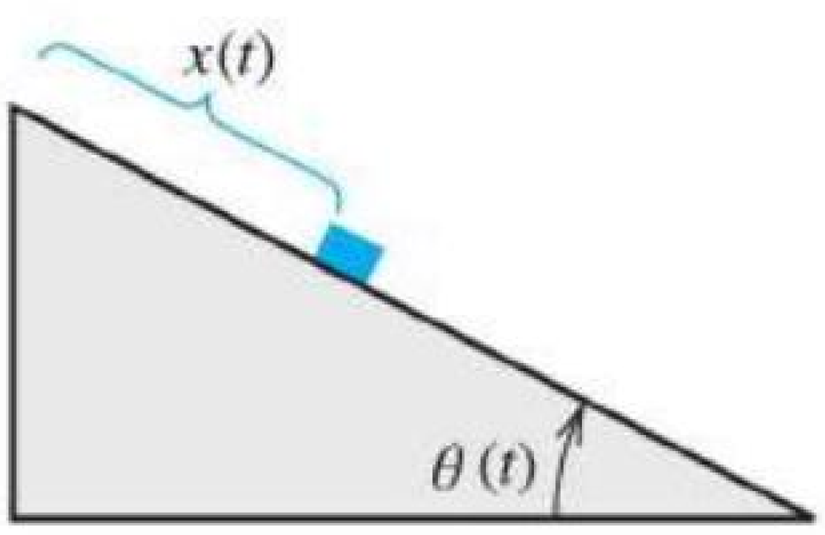


ليكن $L = 10$ ft، $r = 1$ ft و $V = 12.4$ ft^3. أوجد عمق الماء في الحوض لحد 0.01 ft.

20. بدأ جسم بالحركة من السكون على سطح مائل (انظر شكل) بزاوية θ، ويتغير بمعدل ثابت $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$ ومع نهاية t من الثواني، فإنّ موقع الجسم يكون

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin \omega t\right)$$

ليكن الجسم قد تحرك 1.7 ft في 1 s. أوجد ضمن 10^{-5} المعدل ω الذي تتغير عنده θ. ليكن $g = 32.17$ ft/s^2.



2.2 تكرار النقطة الثابتة Fixed – Point Iteration

نتائج النقطة الثابتة تظهر في مجالات رياضية عديدة. وهي أدوات رئيسة للاقتصاديين لبرهنة نتائج تتعلق بالتوازن equilibria. وعلى بالرغم من كون فكرة الأسلوب قديمة. فإن المصطلح قد استخدم للمرة الأولى من قبل الرياضي الهولندي براور (1966 — 1881) L. E. J. brouwer في بداية الحقبة 1900.

العدد p هو نقطة ثابتة للدالّة g إذا كانت $g(p) = p$. سنناقش في هذا الفصل مسألة إيجاد حلول لمسائل النقطة الثابتة وعلاقة ذلك بمسائل إيجاد الجذر التي نرغب في حلها، ومسائل كلا الحالتين فئات متكافئة من حيث المعطيات الآتية:

- في مسألة إيجاد الجذر $f(p) = 0$، نستطيع تعريف الدّوال g بنقطة ثابتة عند p بعدة طرائق، ومثال ذلك عندما $g(x) = x - f(x)$ أو $g(x) = x + 3f(x)$.
- وبالعكس، إذا كان للدالّة g نقطة ثابتة عند p، فإنّ للدالّة $f(x) = x - g(x)$ صفرًا عند p.

وعلى الرغم من أن المسائل التي نرغب في حلها تكون بصيغة إيجاد الجذر، فإنّ صيغة النقطة الثابتة أسهل من حيث التحليل، وثمة اختيارات قوية جدًّا للنقطة الثابتة تؤدي إلى أساليب إيجاد الجذر.

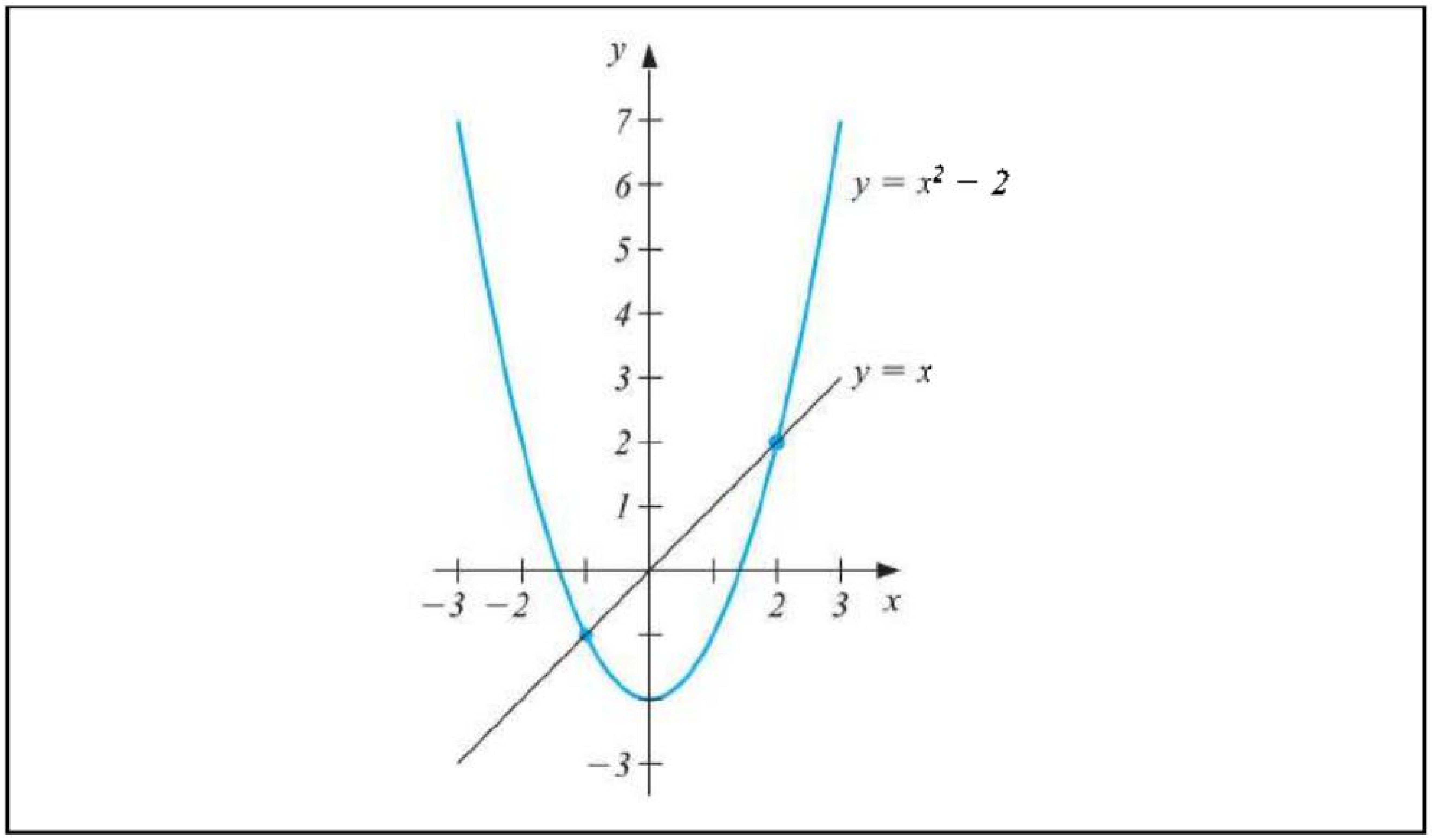
نحتاج في البداية إلى أن نطمئن لهذا النوع الجديد من المسائل، ثم نقرر متى يكون للدالّة نقطة ثابتة، وكيف يمكن تقريب النقاط الثابتة ضمن دقة محددة.

مثال 1 للدالّة $g(x) = x^2 - 2$ لكل $-2 \le x \le 3$ نقاط ثابتة عند $x = -1$ و $x = 2$ بما أن

$$g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \quad \text{و} \quad g(2) = 2^2 - 2 = 2$$

ويمكن ملاحظة هذا في شكل (2.2).

شكل 2.2

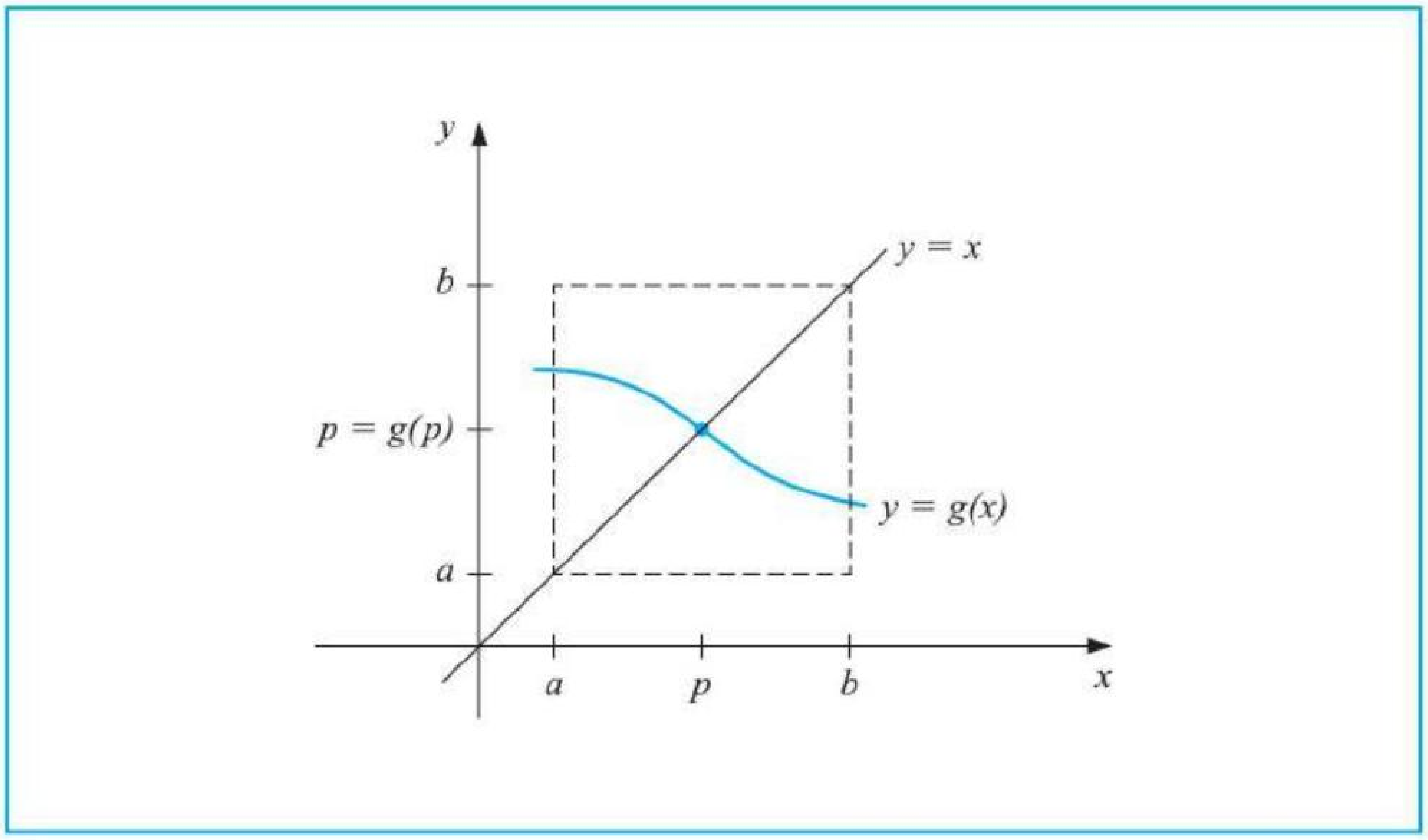


تحقّق المبرهنة الآتية حالات مناسبة لوجود النقطة الثابتة ووحدانيتها.

مبرهنة 2.2 أ. إذا كانت $g \in C[a,b]$ و $g(x) \in [a,b]$ لكل $x \in [a,b]$ فيوجد للدّالة g نقطة ثابتة في $[a,b]$.
ب. وبالإضافة إلى ذلك، إذا كانت $g'(x)$ موجودة في (a,b)، ويوجد ثابت موجب $k < 1$ حيث $|g'(x)| \leq k$ لكل $x \in (a,b)$ فإنّ النقطة الثابتة في $[a,b]$ تكون وحيدة. ■

(انظر شكل 3.2).

شكل 3.2



البرهان

أ. إذا كان $g(a) = a$ أو $g(b) = b$ فإنّ للدّالة g نقطة ثابتة في طرف الفترة. وخلاف ذلك فإنّ $g(a) > a$ و $g(b) < b$. الدّالة $h(x) = g(x) - x$ متصلة ضمن $[a,b]$، مع $h(a) = g(a) - a > 0$ و $h(b) = g(b) - b < 0$. واستنادًا إلى مبرهنة القيمة الوسطية، توجد $p \in (a,b)$ تحقق $h(p) = 0$. هذا العدد p هو نقطة ثابتة للدّالة g، لأن

$0 = h(p) = g(p) - p$ تؤدي إلى $g(p) = p$.

ب. بالإضافة إلى ذلك، ليكن $|g'(x)| \leq k < 1$، وإن p و q كليهما نقطة ثابتة في $[a,b]$. وإذا كان $p \neq q$ فإنّ مبرهنة القيمة الوسيطية تضمن لنا وجود عدد $\xi\ (p,q)$ وفق القيم في $[a,b]$ حيث

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi)$$

إذن

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|$$

وهذا تناقض. ومصدر هذا التناقض افتراض $p \neq q$. إذن $p = q$ وتكون النقطة الثابتة في $[a,b]$ وحيدة. ■ ■ ■

مثال 2 أ. ليكن $g(x) = (x^2 - 1)/3$ في الفترة $[-1, 1]$. تفيد مبرهنة القيمة المتطرفة في ظهور الحد الأدنى المطلق للدالّة g عندما $x = 0$ و $g(0) = -\frac{1}{3}$. وإن الحد الأعلى المطلق للدالّة g يظهر عند $x = \pm 1$ أيضًا، وله قيمة $g(\pm 1) = 0$. بالإضافة إلى ذلك، فإنّ الدالّة g متصلة أيضًا، وإن

$$|g'(x)| = \left|\frac{2x}{3}\right| \leq \frac{2}{3} \quad \text{لكل} \quad x \in (-1, 1)$$

وإنّ الدّالــة g تحقّــق عندئــذ فرضيات المبرهنــة (2.2) جميعها، ولها نقطــة ثابتة وحيدة ضمن $[-1, 1]$ وإن النقطة الثابتة الوحيدة p في الفترة $[-1, 1]$ يمكن تحديدها جبريًّا في هذا المثال. فإذا كان

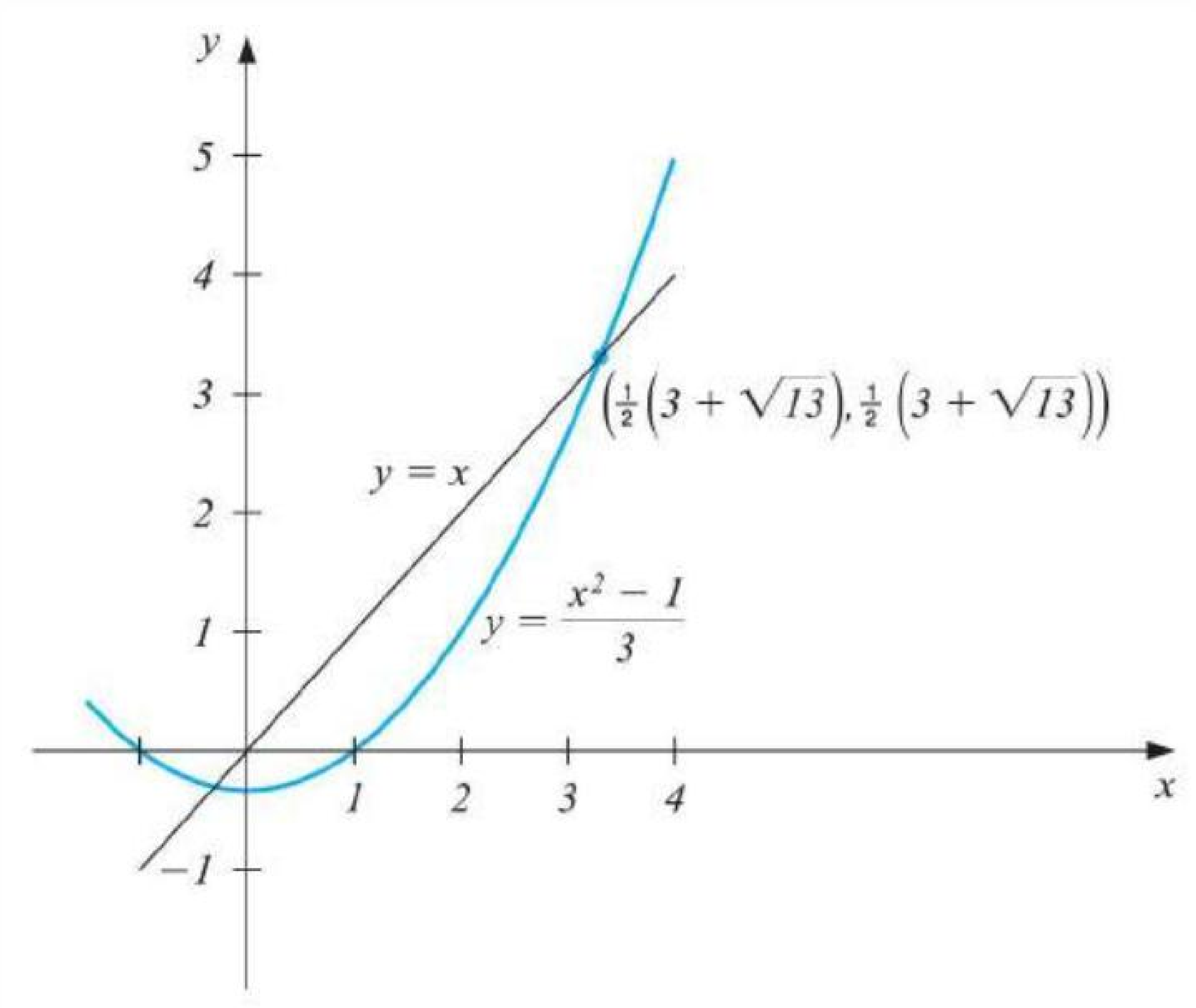
$$p = g(p) = \frac{p^2 - 1}{3} \quad \text{ثم} \quad p^2 - 3p - 1 = 0$$

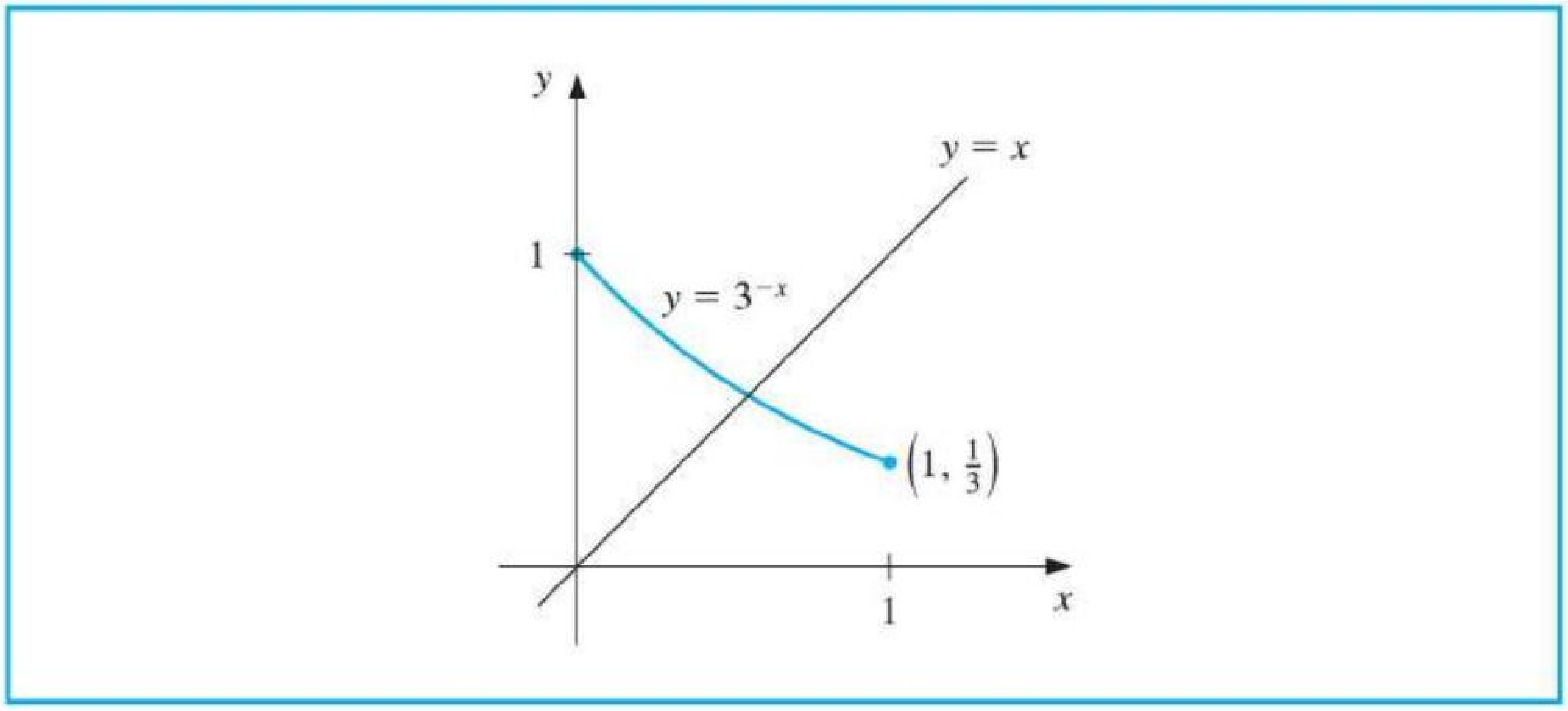
التي تعطي بحسب الصيغة التربيعية

$$p = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$$

لاحظ أن للدالّة g نقطة ثابتة وحيدة أيضًا هي $p = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ للفترة $[3, 4]$. وعلى أي حال $g(4) = 5$ و $g'(4) = \frac{8}{3} > 1$، بناءً عليه فإنّ الدّالة g لا تحقّق فرضيات المبرهنة (2.2) عند $[3, 4]$. وعندئذ فإنّ فرضيات المبرهنة (2.2) كافية لضمان نقطة ثابتة وحيدة لكنها غير ضرورية. (انظر شكل 4.2).

شكل 4.2





شكل 5.2

ب. ليكن $g(x) = 3^{-x}$. بما أن $g'(x) = -3^{-x}\ln 3 < 0$ في $[0, 1]$، فإنّ الدّالة g متناقصة على $[0, 1]$. من ثم

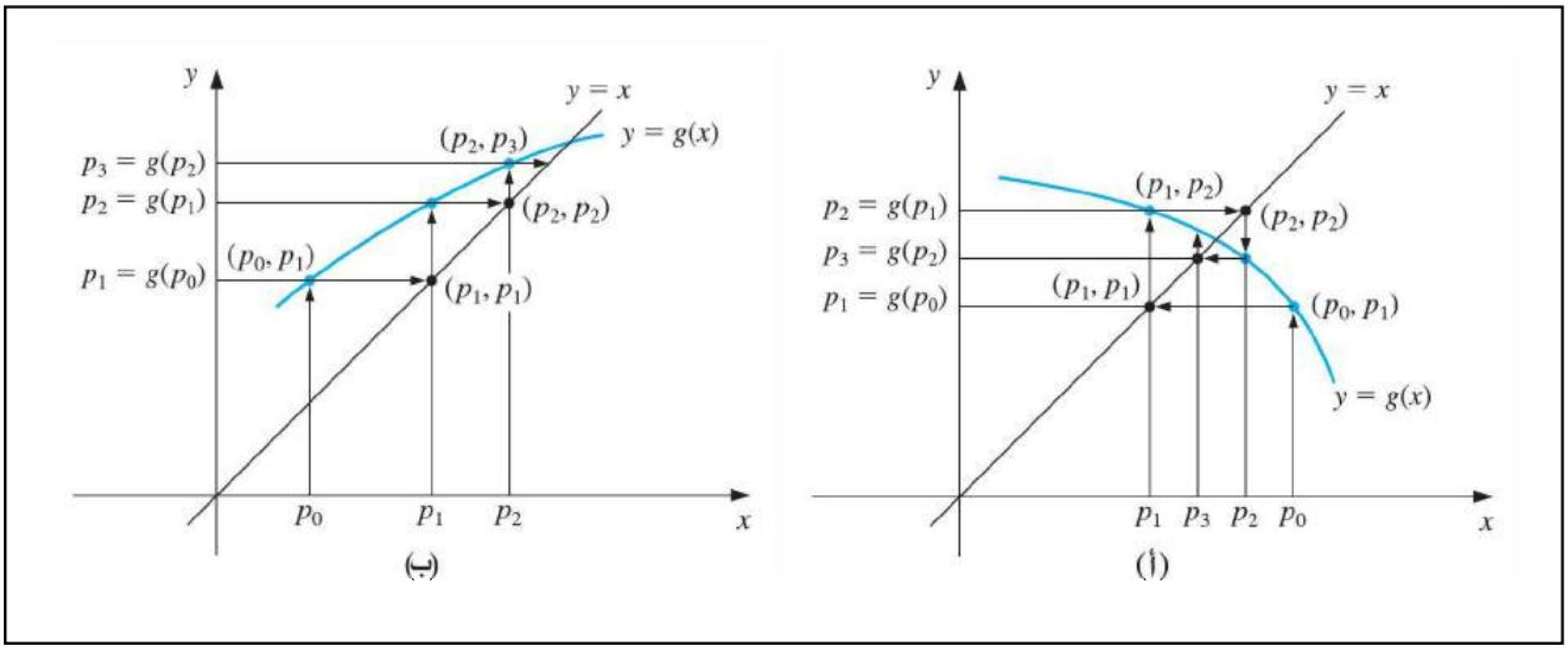
$$g(1) = \frac{1}{3} \le g(x) \le 1 = g(0) \quad \text{لكل} \quad 0 \le x \le 1$$

عندئذ إذا كان $x \in [0, 1]$ فإن $g(x) \in [0, 1]$، وللدّالة g نقطة ثابتة في $[0, 1]$. حيث

$$g'(0) = -\ln 3 = -1.098612289$$

و $|g'(x)| \nleq 1$ في $(0, 1)$، وأن المبرهنة (2.2) لا يمكن استخدامها لتحديد الوحدانية، فإن الدّالة g متناقصة دائمًا، ويتضح من شكل (5.2) حتمية كون النقطة الثابتة وحيدة. ■

شكل 5.2



نختار تقريبًا ابتدائيًا p_0 وتوليد المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ بجعل $p_n = g(p_{n-1})$ لكل $n \geq 1$ لتقريب النقطة الثابتة للدّالة g. وإذا تقاربت المتتالية إلى p و g متصلة فإنّ

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}\right) = g(p)$$

وسيوجد حل لـ $x = g(x)$. ويسمى هذا الأسلوب "تكرار النقطة الثابتة" أو "التكرار الداليّة". والعملية مفصلة في الخوارزمية (2.2) وموضحة في شكل (6.2).

ALGORITHM
الخوارزمية
2.2

تكرار النقطة الثابتة Fixed-Point Iteration

لإيجاد حل لـ $p = g(p)$ بوجود التقريب الابتدائي p_0؛

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة (فشل).

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$.
2	ما دام $i \leq N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = g(p_0)$ (احسب p_i).
4	إذا كان $\lvert p - p_0 \rvert < TOL$ فالمخرج (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	ضع $p_0 = p$ (تحديث p_0).
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 =', N_0$) توقف.

■

ويوضح المثال الآتي التكرارت الدّالية.

مثال 3 الصيغة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ لها جذر وحيد في $[1, 2]$. وتوجد عدة طرائق لتغيير الصيغة إلى صيغة النقطة الثابتة $x = g(x)$ مستخدمين ترتيبًا جبريًا بسيطًا. فلإيجاد الدّالة g الموضح في الفقرة (ج) على سبيل المثال؛ نستطيع ترتيب الصيغة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ على النحو الآتي:

$$4x^2 = 10 - x^3 \quad \text{ولذلك} \quad x^2 = \tfrac{1}{4}(10 - x^3) \quad \text{و} \quad x = \pm\, \tfrac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$$

ولإيجاد حل موجب؛ نختار $g_3(x)$. وليس من الضروري اشتقاق الدّوال المبينة هنا، لكن عليك التأكد من أن النقطة الثابتة لكل منها هي في الواقع حل للصيغة الأصلية $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

أ. $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$.

ب.

$$x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$$

ج. $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$.

د. $x = g_4(x) = \left(\dfrac{10}{4 + x}\right)^{1/2}$

هـ. $x = g_5(x) = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

وعند $p_0 = 1.5$، يبين جدول (2.2) نتائج تكرار النقطة الثابتة لكل الخيارات الخمسة للدالّة g. الجذر الحقيقي هو 1.365230013 كما لوحظ في المثال (1) من الفصل (1.2). وبمقارنة نتائج خوارزمية التنصيف المعطاة ضمن ذلك المثال، يمكن ملاحظة النتائج الرائعة للاختيارات (ج)، (د)، (هـ) حيث تتطلب طريقة التنصيف 27 تكرارًا لهذه الدقّة. ولعله من المفيد ملاحظة أن الاختيار (أ) كان غير متقارب، وأن (ب) كان غير معرّف بسبب احتوائه على جذر تربيعي لعدد سالب. ■

جدول 2.2

n	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	−0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	−469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

ومع أن دوالّ مختلفة في المثال (3) هي مسائل النقطة الثابتة لمسألة إيجاد الجذر نفسها، إلا أنها تختلف إلى حد كبير بوصفها أساليب لتقريب حل مسألة إيجاد الجذر. والغرض منه إيضاح أن السؤال الحقيقي الذي يتطلب الإجابة هو:

- كيف يمكننا إيجاد مسألة النقطة الثابتة التي تنتج متتالية تتقارب على نحو موثوق ومتكرر لحل مسألة إيجاد الجذر؟

تعطينا المبرهنة الآتية ونتيجتها بعض المفاتيح بشأن المسارات التي يتعين علينا سلوكها، وربما يُعدّ رفضنا لبعض منها أكثر أهمية.

مبرهنة 3.2 مبرهنة النقطة الثابتة Fixed-Point Theorem

ليكن $g \in C[a, b]$ حيث $g(x) \in [a, b]$ لكل قيم x في $[a, b]$. وبالإضافة إلى ذلك، لتكن الدالّة g' موجودة في (a, b) وأن ثابت $0 < k < 1$ موجود مع

$$|g'(x)| \leq k \quad \text{لكل} \quad x \in (a, b)$$

لذا لأي عدد p_0 ضمن $[a, b]$، فإنّ المتتالية

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

تتقارب إلى نقطة ثابتة وحيدة p ضمن $[a, b]$. ■

البرهان تشير المبرهنة (2.2) إلى أن النقطة الثابتة الوحيدة موجودة ضمن $[a, b]$. حيث إن الدّالة g تنقل $[a, b]$ إلى نفسها، فإنّ المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ معرّفة لكل $n \geq 0$، و $p_n \in [a, b]$ لكل n وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطية، وحقيقة كون $|g'(x)| \leq k$، يكون لدينا لكل n

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p|$$

حيث إن $\xi_n \in (a, b)$ وبتطبيق هذه المتباينة نستنتج أن

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq k^2|p_{n-2} - p| \leq \cdots \leq k^n|p_0 - p| \tag{4.2}$$

وحيث إن $0 < k < 1$ يكون لدينا $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ و

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p| = 0$$

ومن ثم فإنّ $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p. ■ ■ ■

تمهيدية 4.2 إذا كانت الدّالة g تحقّق فرضيات المبرهنة (3.2) فإنّ حدود الخطأ ضمن استخدام p_n لتقريب p هي

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

و

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0| \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$ ■

البرهان حيث $p \in [a, b]$، فإنّ الحد الأول الناتج من المتباينة (4.2) هو

$$|p_n - p| \leq k^n|p_0 - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

وعندما $n \geq 1$، فإنّ العملية المستخدمة في برهنة المبرهنة (3.2) تعطي

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k|p_n - p_{n-1}| \leq \cdots \leq k^n|p_1 - p_0|$$

ومن ثم عندما $m > n \geq 1$ يكون

$$\begin{aligned}
|p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - \cdots + p_{n+1} - p_n| \\
&\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\
&\leq k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \cdots + k^n|p_1 - p_0| \\
&= k^n|p_1 - p_0|(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1})
\end{aligned}$$

واستنادًا إلى المبرهنة (3.2) $\lim_{m\to\infty} p_m = p$، وبهذا نجد

$$|p - p_n| = \lim_{m\to\infty} |p_m - p_n| \le \lim_{m\to\infty} k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \le k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

لكن $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ سلسلة هندسية بنسبة مشتركة k و $0 < k < 1$. وهذه المتتالية تتقارب إلى $1/(1-k)$ الذي يعطي الحد الثاني

$$|p - p_n| \le \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$$

■ ■ ■

تربط المتباينتان كلتاهما في هذه التمهيدية معدل تقارب $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ للحد k بالمشتقة الأولى، وإن معدل التقارب يعتمد على العامل k^n، فكلما كانت قيمة k صغيرة كان التقارب أسرع، ويكون بطيئًا جدًّا عندما تقترب k من 1. وأعيد في المثال الآتي اعتماد طرائق النقطة الثابتة المستخدمة في المثال (3.2) في ضوء النتائج المبينة في المبرهنة (3.2) ونتيجتها.

مثال 4 أ. مع $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$، لدينا $g_1(1) = 6$ و$g_1(2) = -12$، لذا فالدّالة g_1 لا تنقل $[1, 2]$ إلى نفسها. وأكثر من ذلك $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$، ومن ثم فإن $|g_1'(x)| > 1$ لكل x ضمن $[1, 2]$. وعلى الرغم من أن المبرهنة (3.2) لا تضمن فشل الطريقة عند هذا الاختيار للدّالة g، فلا يوجد سبب لتوقع حصول التقارب.

ب. مع $g_2(x) = [(10/x) - 4x]^{1/2}$، يمكن أن نرى الدّالة g_2 لا تنقل $[1, 2]$ إلى نفسها، وأن المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ غير معرّفة عندما $p_0 = 1.5$. وأكثر من ذلك، لا توجد فترة تحتوي $p \approx 1.365$ بحيث

$$|g_2'(x)| < 1 \quad \text{لأن} \quad |g_2'(p)| \approx 3.4$$

ولا يوجد أي مبرر لنتوقع أن هذه الطريقة ستتقارب.

ج. للدالّة $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$

$$g_3'(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0 \quad \text{في الفترة } [1, 2]$$

لذا g_3 متناقصة حتمًا ضمن $[1, 2]$. وعلى أي حال $|g_3'(2)| \approx 2.12$، لذا فإنّ الشرط $|g_3'(x)| \le k < 1$ يقع ضمن $[1, 2]$. وعند التمعن في المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ بدءًا بـ $p_0 = 1.5$ نجد أن افتراض الفترة $[1, 1.5]$ بدلًا من $[1, 2]$ كافيًا. ضمن هذه الفترة، ما زال صَحيحًا كون $g_3'(x) < 0$ و g_3 متناقصة حتمًا، لكن أيضًا

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \le g_3(x) \le g_3(1) = 1.5$$

لكل $x \in [1, 1.5]$. وهذا يرينا أن g_3 تنقل الفترة $[1, 1.5]$ إلى نفسها. ولكون $|g_3'(x)| \le |g_3'(1.5)| \approx 0.66$ صحيحًا أيضًا ضمن هذه الفترة؛ فإنّ المبرهنة (3.2) تؤكد التقارب الذي نحن بصدده.

د. مع $g_4(x) = (10/(4 + x))^{1/2}$، يكون لدينا

$$|g_4'(x)| = \left| \frac{-5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} \right| \le \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} < 0.15 \quad \text{لكل } x \in [1, 2].$$

والحد على المقدار $g_4'(x)$ أقل كثيرًا من الحد الذي ظهر في (د) على المقدار $g_3'(x)$ الذي يفسر

تقاربًا أكثر تسارعًا باستخدام g_4.

هـ. المتتالية أدناه

$$g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

تتقارب بسرعة أكثر مما هي عليه عند اختياراتنا الأخرى، وسنرى في البنود الآتية من أين جاء هذا الاختيار والسبب وراء فاعليته هذه. ■

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 2.2

1. استخدم المعالجة الجبرية لإثبات أن لكل من الدّوال الآتية نقطة ثابتة عند p تحديدًا عندما $f(p) = 0$، حيث $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$:

أ. $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$

ب. $g_2(x) = \left(\frac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$

ج. $g_3(x) = \left(\frac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$

د. $g_4(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

2. أ. نفّذ أربعة تكرارات إذا أمكن على كل دالّة g ذكرت في التمرين (1) أعلاه. وليكن $p_0 = 1$ و $p_{n+1} = g(p_n)$ لكل $n = 0, 1, 2, 3$.

ب. أي من هذه الدّوال تعطي أفضل تقريب للحل؟

3. استخدم الطرائق الأربع الآتية لحساب $21^{1/3}$، ورتّبها بحسب سرعة التقارب لكل منها عندما يكون $p_0 = 1$:

أ. $p_n = \frac{20p_{n-1} + 21/p_{n-1}^2}{21}$

ب. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$

ج. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^4 - 21p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21}$

د. $p_n = \left(\frac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$

4. استخدم الطرائق الأربع الآتية لحساب $7^{1/5}$، ورتّبها بحسب سرعة التقارب لكل منها عندما يكون:

أ. $p_n = p_{n-1}\left(1 + \frac{7 - p_{n-1}^5}{p_{n-1}^2}\right)^3$

ب. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{p_{n-1}^2}$

ج. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{5p_{n-1}^4}$

د. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{12}$

5. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-2} لِـ $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ في $[1, 2]$. استخدم $p_0 = 1$.

6. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-2} لِـ $x^3 - x - 1 = 0$ في $[1, 2]$. $[0, 2\pi]$ استخدم $p_0 = 1$.

7. استخدم المبرهنة (2.2) لإثبات أن $g(x) = \pi + 0.5\sin(x/2)$ لها نقطة ثابتة وحيدة في $[0, 2\pi]$. استخدم تكرار النقطة الثابتة لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة بدقة 10^{-2}. استخدم التمهيدية (4.2) لتقدير عدد مرات التكرار المطلوبة لتحقيق هذه الدقة، ثم قارن هذا التقدير النظري بالعدد الفعلي المطلوب.

8. استخدم المبرهنة (2.2) لإثبات أن $g(x) = 2^{-x}$ لها نقطة ثابتة وحيدة في $[\frac{1}{3}, 1]$. استخدم تكرار النقطة الثابتة لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة بدقة 10^{-4}. استخدم التمهيدية (4.2) لتقدير عدد

التكرارات المطلوبة لتحقيق هذه الدقة 10^{-4}، ثم قارن هذا التقدير النظري بالعدد الفعلي المطلوب.

9. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد التقريب إلى $\sqrt{3}$ بدقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية وعدد التكرارت المطلوبة بإجابة التمرين (10) من الفصل (1.2).

10. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد التقريب إلى $\sqrt[3]{25}$ بدقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية وعدد التكرارت المطلوبة بإجابة التمرين (11) من الفصل (1.2).

11. حدِّد الفترة $[a, b]$ التي يتقارب عندها التكرار بالنقطة الثابتة لكل من الصيغ الآتية:
أ. قدّر عدد التكرارت المطلوبة لتحقيق التقريبات بدقة 10^{-5}.
ب. نفّذ الحسابات.

أ. $x = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3}$ ب. $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$ ج. $x = \left(\dfrac{e^x}{3}\right)^{1/2}$

ج. $x = 5^{-x}$ د. $x = 6^{-x}$ هـ. $x = 0.5(\sin x + \cos x)$

12. استخدم الفترة المعطاة لكلٍ من الصيغ الآتية، أو حدِّد الفترة $[a, b]$ التي يتقارب عندها التكرار بالنقطة الثابتة:
أ. قدّر عدد التكرارت المطلوبة لتحقيق التقريبات بدقة 10^{-5}.
ب. نفّذ الحسابات.

أ. $2 + \sin x - x = 0$ باستخدام $[2, 3]$ ب. $x^3 - 2x - 5 = 0$ باستخدم $[2, 3]$

ج. $3x^2 - e^x = 0$ د. $x - \cos x = 0$

13. أوجد الأصفار كلها لـ $f(x) = x^2 + 10\cos x$ باستخدام تكرار النقطة الثابتة لدالّة التكرار المناسب g. أوجد الأصفار بدقّة 10^{-4}.

14. استخدم طريقة تكرار بالنقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-4} لـ $x = \tan x$ لـ x ضمن $[4, 5]$.

15. استخدم طريقة تكرار بالنقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-2} لـِ $2\sin \pi x + x = 0$ لـِ x ضمن $[1, 2]$. استخدم $p_0 = 1$.

16. ليكن A ثابتًا موجبًا و $g(x) = 2x - Ax^2$:
أ. أثبت أنه في حالة تقارب تكرار النقطة الثابتة لحدٍ ليس صفرًا، فإنّ الحد هو $p = 1/A$، ويمكن أخيرًا إيجاد معكوس العدد باستخدام عمليات الضرب والطرح فقط.
ب. أوجد فترة حول $1/A$ يتقارب عندها تكرار النقطة الثابتة، وتضمن وجود p_0 في الفترة.

17. أوجد الدّالة g معرفًا على $[0, 1]$ التي لا تحقّق أيًّا من فرضيات المبرهنة (2.2) ولها نقطة ثابتة وحيدة في $[0, 1]$.

18. أ. أثبت أن المبرهنة (2.2) صحيحة إذا استبدل $|g'(x)| \le k$ بـ $g'(x) \le k$ لكل $x \in (a, b)$
(تلميح: الوحدانية فقط موضع النقاش).
ب. أثبت أن المبرهنة (3.2) لا تتحقق في حالة استبدال $|g'(x)| \le k$ بـ $g'(x) \le k$.
(ملحوظة: أثبت أن $g(x) = 1 - x^2$ لكل x في الفترة $[0, 1]$ يحقّق مثال المعكوس).

19. أ. استخدم المبرهنة (3.2) لإثبات كون المتتالية

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \quad \text{لكل } n \ge 1$$

تتقارب إلى $\sqrt{2}$ عندما يكون $x_0 > \sqrt{2}$.

ب. استخدم حقيقة كون $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$ عندما يكون $x_0 \ne \sqrt{2}$ لإثبات أنه في حالة كون

فإنّ $0 < x_0 < \sqrt{2}$ $x_1 < \sqrt{2}$

ج. استخدم تمهيدية الفقرتين (أ) و (ب) لإثبات كون المتتالية في (أ) تتقارب إلى $\sqrt{2}$ عندما يكون $x_0 > 0$.

20. أ. أثبت أنه لو كان A أي عدد موجب، فإنّ المتتالية

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

تتقارب إلى $\sqrt{A}$ عندما يكون $x_0 > 0$.

ب. ماذا يحدث لو أن $x_0 < 0$ ؟

21. استبدل الافتراض "العدد الموجب $k < 1$ موجود مع $|g'(x)| \leq k$ " بافتراض "g تحقّق شرط لبشتز عند الفترة $[a, b]$ مع ثابت لبشتز $L < 1$". (انظر التمرين (25) من الفصل (1.1)) أثبت أن استنتاجات هذه المبرهنة ما زالت متحقّقة.

22. افترض أن الدّالة g قابلة للاشـتقاق باسـتمرار عند الفـترة (c, d) التي تتضمن النقطة الثابتة p للدّالة g. أثبت أنه إذا كانت $|g'(p)| < 1$ فإنّ $\delta > 0$ موجودة بحيث لو كان $|p_0 - p| \leq \delta$، فإنّ تكرار النقطة الثابتة يتقارب.

23. يتعرض الجسم عند سقوطه عموديًّا في الهواء لمقاومة اللزوجة إلى جانب قوة الجاذبية. افترض أن جسمًا بكتلة m أسقط من ارتفاع s_0، وأن ارتفاع الجسم بعد t من الثواني هو

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m})$$

بحيث إن $g = 32.17\ \text{ft/s}^2$، وk يمثّل معامل مقاومة الهواء بوحدات lb-s/ft. افترض $s_0 = 300\ \text{ft}$ و $m = 0.25\ \text{lb}$ و $k = 0.1\ \text{lb-s/ft}$ أوجد ضمن 0.01 s الوقت الذي يستغرقه الجسم للوصول إلى الأرض.

24. ليكن $g \in C^1[a, b]$ و p ضمن (a, b) مع $g(p) = p$ و $|g'(p)| > 1$. أثبت وجود $\delta > 0$ بحيث لو كانت $0 < |p_0 - p| < \delta$ فإنّ $|p_0 - p| < |p_1 - p|$. من ثم فهمها كان التقريب الابتدائي p_0 متقاربًا إلى p، فإنّ التكرار الآتي p_1 أكثر بعدًا، وأخيرًا فإنّ تكرار النقطة الثابتة لا يتقارب إذا كان $p_0 \neq p$.

3.2 طريقة نيوتن Newton's Method

طريقة نيوتن (أو نيوتن–رافسون) هي إحدى أكثر الطرائق العددية كفاءة في حل مسائل إيجاد الجذر. وهناك عدة أساليب لتقديم هذه الطريقة.

فإذا كنا نريد الخوارزمية فقط يمكننا اعتماد أسلوب الشكل البياني، كما هو الحال غالبًا في التفاضل والتكامل، ويمكن أيضًا اشتقاق طريقة نيوتن بوصفها أسلوبًا لإيجاد تقارب أسرع مما تعطيه أنواع أخرى من التكرار الدّالي، كما كان في الفصل (4.2). وستُعرَض لاحقًا طريقة ثالثة لاستخدام طريقة نيوتن تعتمد كثيرة حدود تايلور.

كان إسحق نيوتن
Isaac Newton (1642-1727)
واحد من العلماء الأكثر عبقرية في كل الأزمنة. في أواخر القرن السابع عشر 17 th كانت فترة تذبذب للعلوم والرياضيات. وقد لامس عمل نيوتن كل جانب من الرياضيات تقريبا. وقد قدّمت طريقته لحل المعادلات لإيجاد جذر المعادلة $x^3 - 2x - 5 = 0$. وهي مسألة تم تناولها في التمرين 5 (أ). و على الرغم من أنه عرض الطريقة بالنسبة لكثيرات الحدود. فمن الواضح أنه أدرك تطبيقاتها الواسعة

لنفترض أن $f \in C^2[a, b]$، وليكن $p_0 \in [a, b]$ تقريبًا للحل p إلى $f(x) = 0$ بحيث $f'(p_0) \neq 0$ و $|p - p_0|$ صغير. لنفترض أننا وجدنا كثيرة حدود تايلور الأولى للدّالة $f(x)$ حول p_0 وحسبناها عند $x = p$ لنحصل على

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

حيث إن $\xi(p)$ تقع ما بين p و p_0. وبما أن $f(p) = 0$، تعطي هذه الصيغة

أعطى جوزيف رافسون
Joseph Raphson (1648 – 1715)
توضيحا للطريقة المنسوبة إلى إسحق نيوتن عام 1690 معترفا بأن نيوتن هو مصدر الاكتشاف . فنيوتن و رافسون لم يستخدما بالضبط المشتقة في شرحهما، لأن كليهما تناولا كثيرات الحدود فقط. رياضيون آخرون وخصوصا جيمس كريكوري
James Gregory (1636 – 1675)
كانوا يدركون العملية قيد البحث عند هذا الوقت أو قبله.

$$0 = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

ويمكن اشتقاق طريقة نيوتن على افتراض أنه ما دامت $|p - p_0|$ صغيرة، فإنّ الحد الذي يتضمن $(p - p_0)^2$ سيكون أصغر كثيرًا، لذا

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$$

وبحل p نحصل على

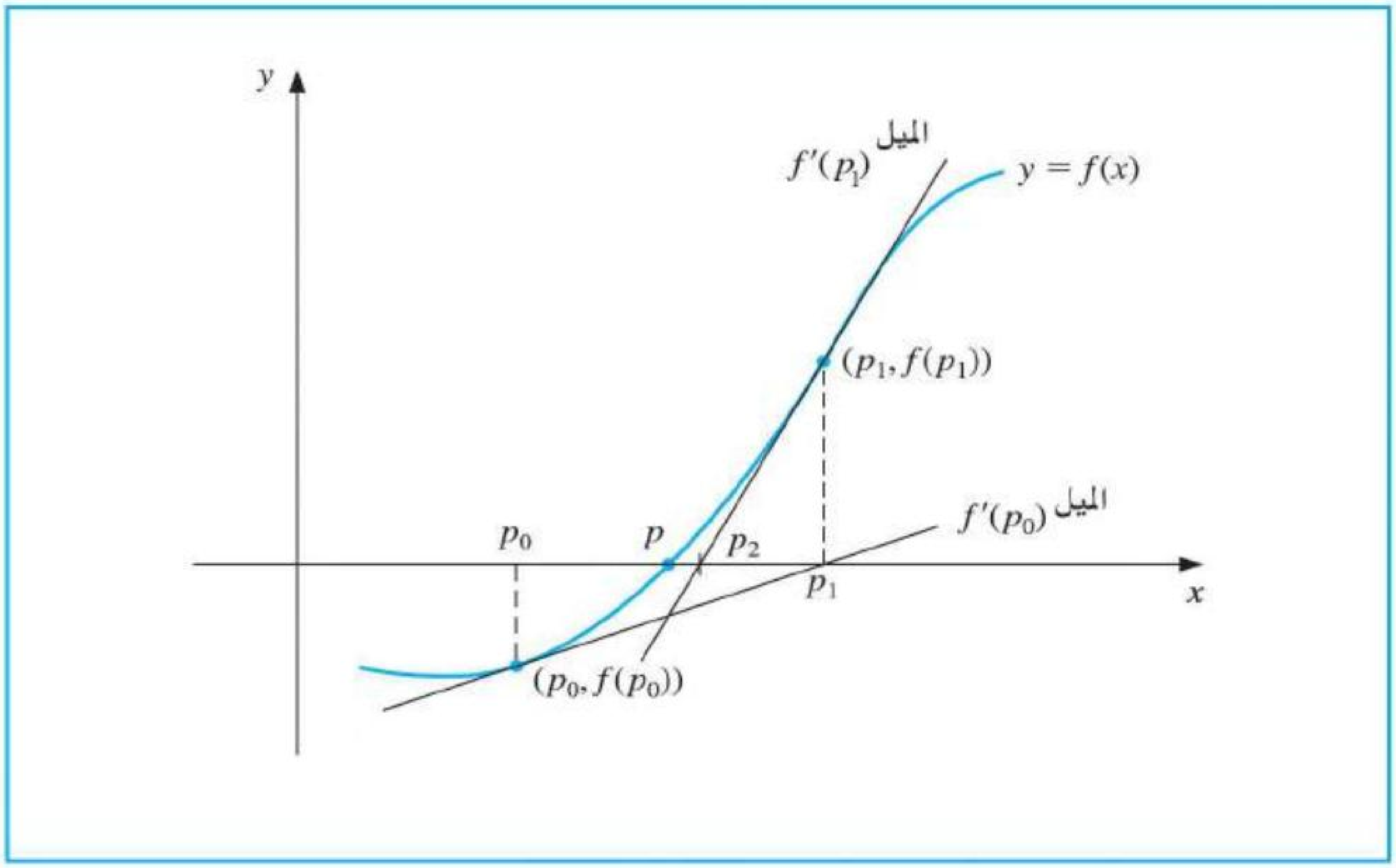
$$p \approx p_1 \equiv p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

وهذه خطوة نحو طريقة نيوتن التي تبدأ بتقريب ابتدائي p_0 ثم توليد المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ باستخدام

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1 \tag{5.2}$$

ويوضح شكل (7.2) كيفية إيجاد التقريب باستخدام المماسات المتتابعة. (انظر التمرين (15) أيضًا) نبدأ بتقريب ابتدائي p_0، يمثّل التقريب p_1 مقطع محور x من قبل خط المماس للدّالة f عند $(p_0, f(p_0))$، يمثّل التقريب p_2 مقطع محور x من قبل خط المماس للدّالة f عند $(p_1, f(p_1))$ وهكذا. وتتبع الخوارزمية (3.2) هذا الأسلوب.

شكل 7.2



ALGORITHM
الخوارزمية
3.2

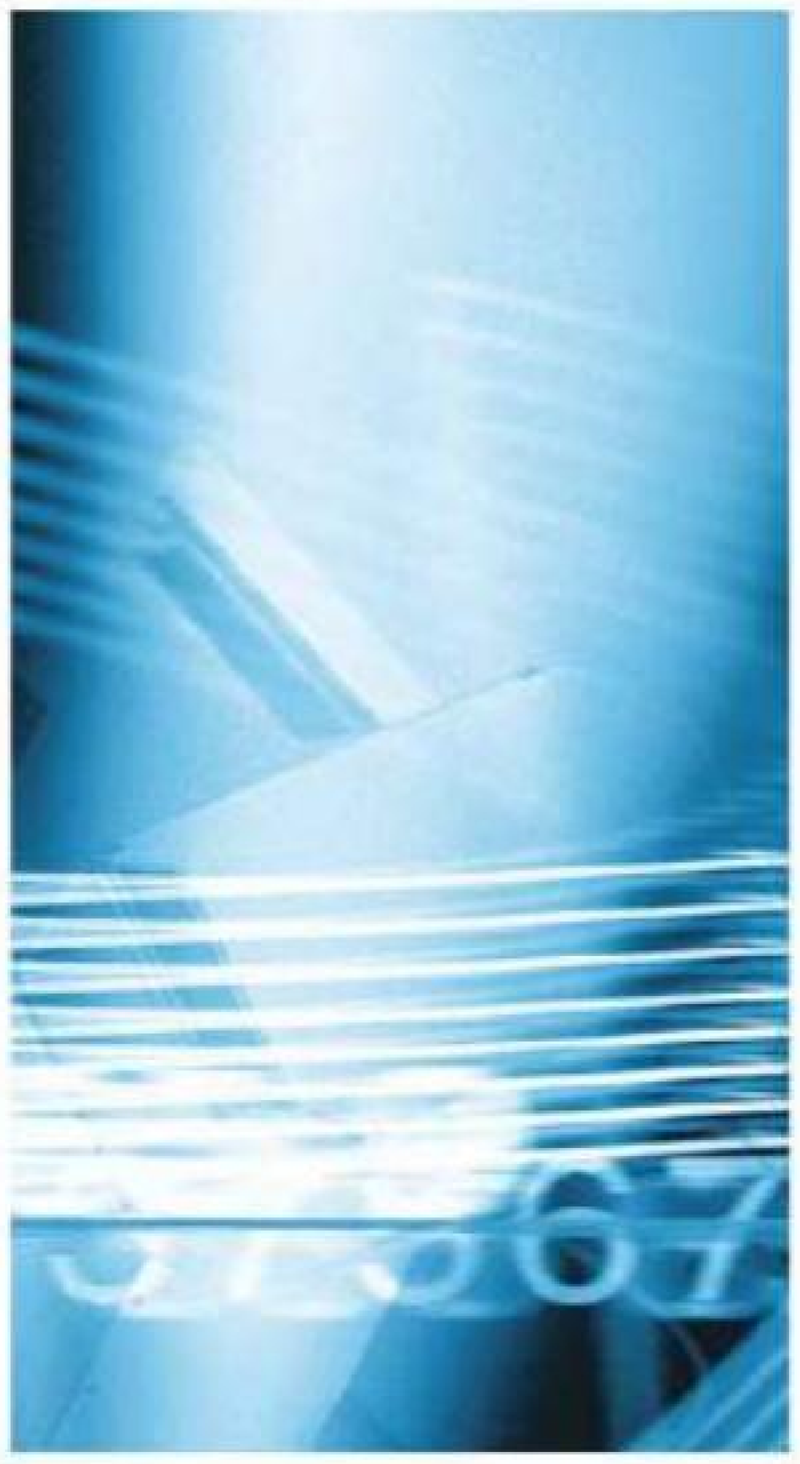
خوارزمية نيوتن Newton's Algorithm

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع تقريب ابتدائي p_0:

المدخلات: تقريب أوّلي p_0، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد للتكرارات N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$.
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$ (احسب p_i).
4	إذا كان $\|p - p_0\| < TOL$. المُخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	ضع $p_0 = p$ (تحديث p_0).
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 =', N_0$) توقف.



■

إن تباينات أسلوب التوقف المصاحبة لطريقة التنصيف يمكن تطبيقها في طريقة نيوتن. حيث نختار حد السماح $\varepsilon > 0$، ثم نوجد $p_1, \ldots p_N$ حتى

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \qquad (6.2)$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon\,, \quad p_N \neq 0 \qquad (7.2)$$

أو

$$|f(p_N)| < \varepsilon \qquad (8.2)$$

تستخدم صيغة من المتباينة (6.2) في الخطوة 4 من الخوارزمية (3.2). لاحظ أن المتباينة (8.2) قد لا تعطي الكثير من المعلومات حول الخطأ الحقيقي $|p_N - p|$. (انظر التمرين (16) من الفصل 1.2) وإن طريقة نيوتن عبارة عن أسلوب تكرارات داليّة بصيغة $p_n = g(p_{n-1})$ حيث

$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1 \qquad (9.2)$$

وفي الواقع هذا أسلوب تكرارات داليّة استُخدم ليعطي تقاربًا متسارعًا كما رأيناه في الفقرة (هـ) من المثال (3) من الفصل (2.2). ويتضح من الصيغة (9.2) أن طريقة نيوتن لا يمكنها الاستمرار إذا كان $f'(p_{n-1}) = 0$ لبعض قيم n. وفي الواقع سنرى أن الطريقة أكثر جدوى عندما تُحدّد f' بعيدًا عن الصفر وبالقرب من p.

جدول 3.2

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

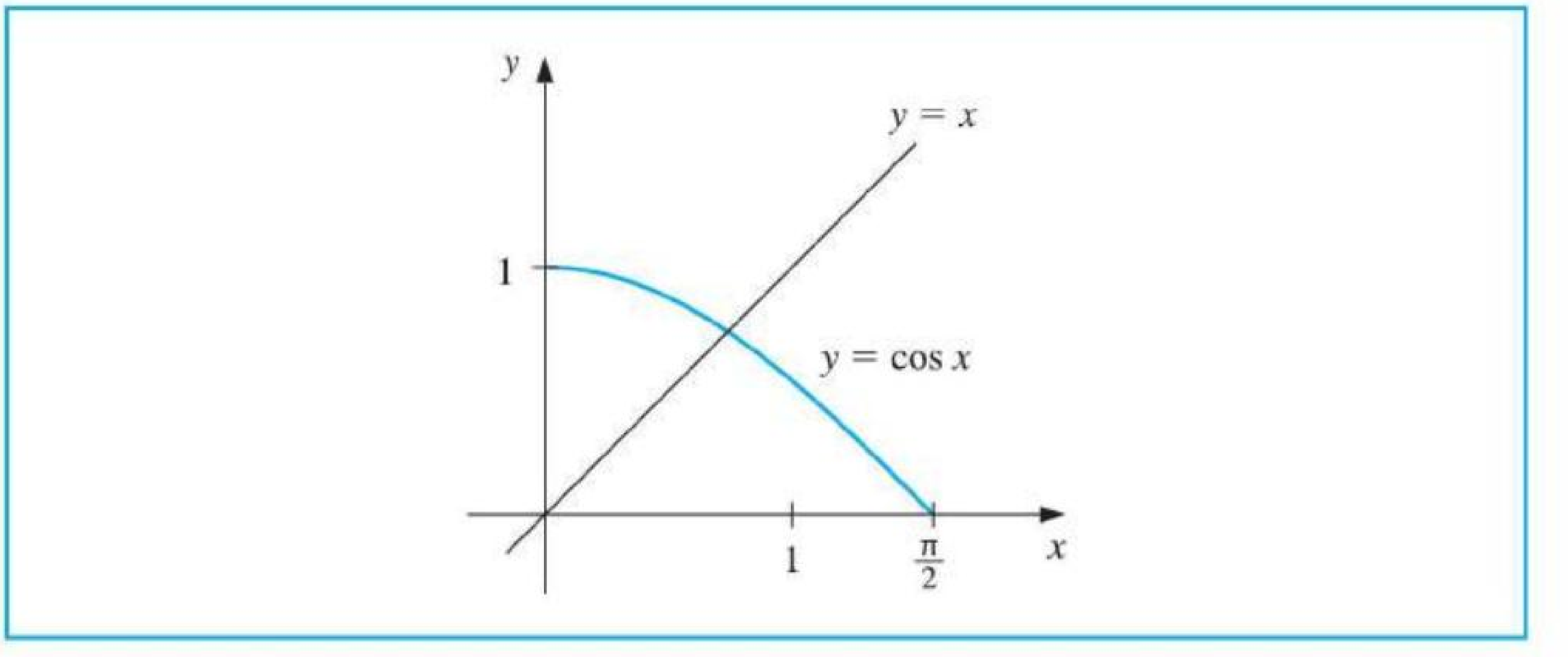
مثال 1

لنفترض أننا نريد تقريب حل للدّالة $f(x) = \cos x - x = 0$. إن حل مسألة إيجاد الجذر هذه هو حل لمسألة النقطة الثابتة $x = \cos x$ أيضًا، ويشير الرسم في شكل (8.2) إلى أن نقطة ثابتة واحدة p تقع في الفترة $[0, \pi/2]$. ويوضح الجدول (3.2) نتائج تكرار النقطة الثابتة مع $p_0 = \pi/4$، ومنها نستنتج أن أفضل قيمة هي $p \approx 0.74$.

ولتناول هذه المسألة على نحو مختلف؛ عرّف $f(x) = \cos x - x$، وطبّق طريقة نيوتن. وما دام $f'(x) = -\sin x - 1$، فإنّ المتتالية تتولد عن طريق

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\sin p_{n-1} - 1} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

شكل 8.2



ويتضمن جدول (4.2) تقريبات تولّدت مع $p_0 = \pi/4$، ونلاحظ تقريبًا متميزًا عند $n = 3$. ونتوقع أن يكون هذا التقريب دقيقًا للمنازل الموضحة بسبب التوافق بين p_3 و p_4. ■

جدول 4.2

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

ويشير اشتقاق سلسلة تايلور لطريقة نيوتن في بداية هذا الفصل إلى ضرورة دقة التقدير الابتدائي. والافتراض الضروري هو كون الحد المتضمن $(p - p_0)^2$ صغيرًا مقارنة بـ $|p - p_0|$ على أنه من الممكن حذفه. وهذا بالتأكيد لن يتحقّق ما لم يكن p_0 تقريبًا جيدًا إلى p. وإذا لم يكن p_0 قريبًا بما يكفي من الجذر الحقيقي فإن هناك سببًا ضعيفًا لملاحظة تقارب طريقة نيوتن نحو الجذر. وعلى أي حال قد ينتج في بعض الحالات وحتى في حالة التقريب الضعيف تقارب. (ويوضح التمرينان (20) و (21) بعض هذه الحالات).

وتوضح مبرهنة التقارب التالية لطريقة نيوتن الأهمية المبرهنة لاختيار p_0.

مبرهنة 5.2 ليكن $f \in C^2[a, b]$. إذا كان $p \in [a, b]$ حيث $f(p) = 0$ و $f'(p) \neq 0$، فيوجد $\delta > 0$ بحيث تولّد طريقة نيوتن المتتالية المتقاربة $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى p ولأي تقريب ابتدائي $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$. ■

البرهان البرهان مبني على تحليل طريقة نيوتن بوصفه أسلوب تكرارات داليّة $p_n = g(p_{n-1})$ لكل $n \geq 1$ مع

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ليكن k ضمن $(0, 1)$. في البداية توجد الفترة $[p - \delta, p + \delta]$ على أن g تنقلها إلى نفسها حيثما $|g'(x)| \leq k$ لكل $x \in (p - \delta, p + \delta)$.

وحيث إن f' متصلة، وإن $f'(p) \neq 0$، فإنّ الفقرة (a) من تمرين (27) فصل (1.1) يؤدي إلى حتمية وجود $\delta_1 > 0$ حيث $f'(x) \neq 0$ لـ $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1] \subseteq [a, b]$. وأخيرًا تكون الدالّة g معرفة ومتصلة ضمن $[p - \delta_1, p + \delta_1]$، كما أن

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

لـ $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$. بحيث إن $f \in C^2[a, b]$، تكون $g \in C^1[p - \delta_1, p + \delta_1]$، وبفرض $f(p) = 0$، فإنّ

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

ولأن g' متصلة و $0 < k < 1$، فإن الفقرة (ب) من التمرين (27) في الفصل (1.1) يؤدي إلى حتمية وجود δ مع $0 < \delta < \delta_1$، وأن

$$|g'(x)| \le k \text{ لكل } x \in [p-\delta, p+\delta]$$

ونحتاج الآن إلى إثبات كون الدالّة g تنقل $[p-\delta, p+\delta]$ إلى $[p-\delta, p+\delta]$، فإذا كان $x \in [p-\delta, p+\delta]$ فإنّ مبرهنة القيمة الوسطى تؤدي إلى أنه لعدد ما ξ بين x و p، يكون لدينا $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p|$ بالتالي

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p| \le k|x-p| < |x-p|$$

وحيث إن $x \in [p-\delta, p+\delta]$، فإنّ $|x-p| < \delta$ و $|g(x) - p| < \delta$، ومن ثم فإنّ الدالّة g تنقل $[p-\delta, p+\delta]$ إلى $[p-\delta, p+\delta]$.

إن الفرضيات كلها لمبرهنة النقطة الثابتة متحقّقة الآن، وأخيرًا فالمتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرّفة بـ

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

تتقارب إلى p لأي $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$. ■ ■ ■

تنص المبرهنة (5.2) على أنه: "في حالة الافتراضات المعقولة تتقارب طريقة نيوتن عند تحقّق اختيار تقريب ابتدائي ذي دقة معقولة". وتؤدي إلى أن الثابت k الذي يحد اشتقاق الدالّة g، ويشير أخيرًا إلى سرعة التقارب للطريقة يتناقص إلى الصفر مع استمرار العملية أيضًا. وهذا التمهيد مهم لطريقة نيوتن، لكن من النادر استخدامها عند التطبيق؛ لأنها لا تعلمنا كيفية تحديد δ. في التطبيق العملي يُختار تقريب ابتدائي، وتولّد التقريبات التالية بطريقة نيوتن، وهذه عمومًا إما أن تتقارب بسرعة إلى الجذر، وإما أنه سيكون واضحًا أن التقارب غير ممكن.

إن طريقة نيوتن تمثل أسلوبًا فائق القوة، لكن لها جانبًا سلبيًّا رئيسًا، وهو حاجتنا إلى معرفة قيمة اشتقاق الدالّة f عند كل تقريب. وغالبًا ما يكون $f'(x)$ أكثر صعوبة، ويحتاج إلى عمليات حسابية أكثر لحسابه مقارنة بـ $f(x)$.

وللإحاطة بمسألة تقييم الاشتقاق لطريقة نيوتن؛ نقدم شيئًا مختلفًا قليلًا. ومن خلال التعريف

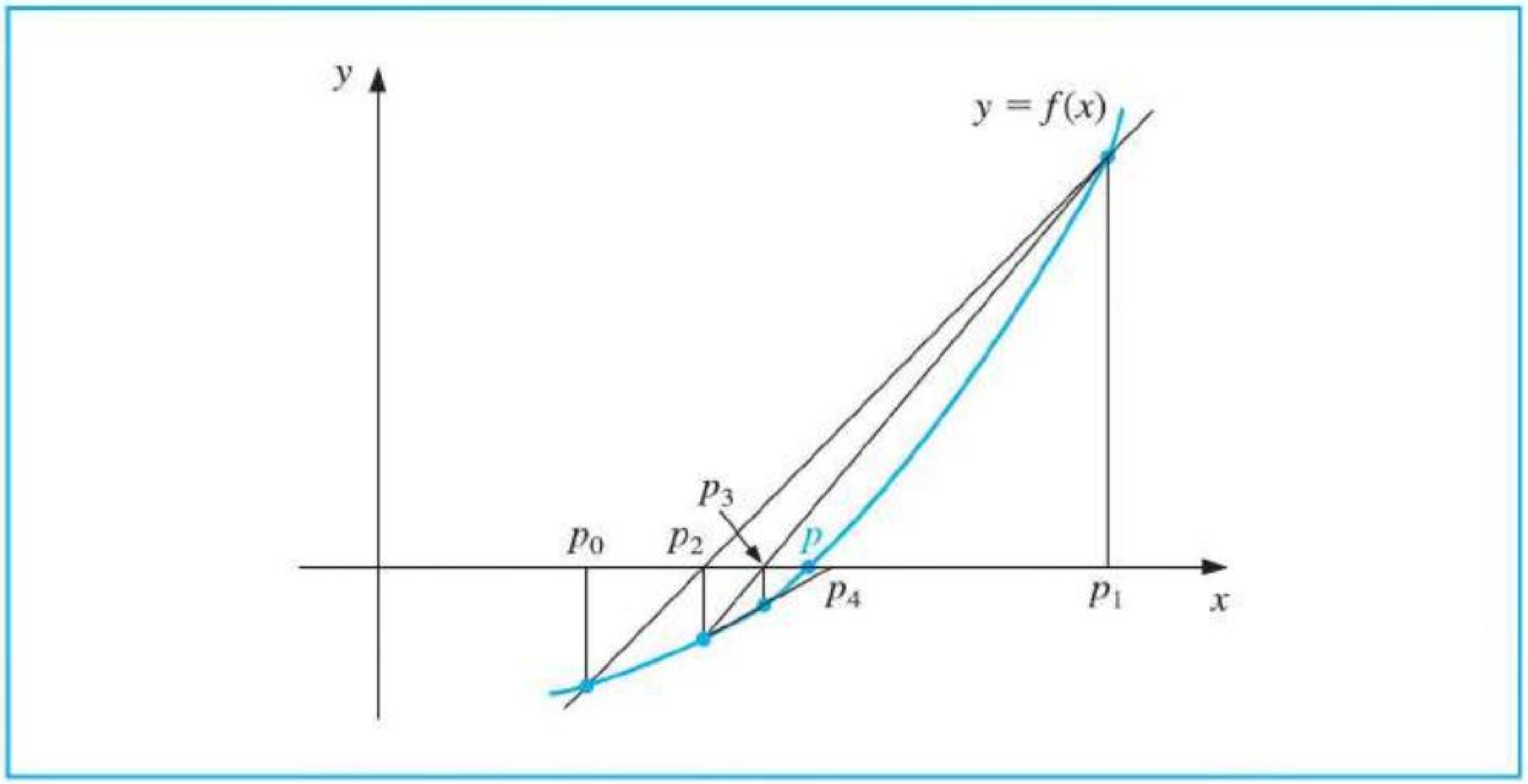
$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

وبجعل $x = p_{n-2}$، لدينا

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

وباستخدام هذا التقريب إلى $f'(p_{n-1})$ في صيغة نيوتن نحصل على

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \tag{10.2}$$



شكل 9.2

إن كلمة قاطع مشتقة من الكلمة اللاتينية secan التي تعني القطع. إن طريقة القاطع تستخدم خط القاطع، وهو الخط الواصل بين نقطتين تقطعان المنحنى لتقريب الجذر.

ويدعى هذا الأسلوب "طريقة القاطع Secant Method" ونعرضه في الخوارزمية (4.2). (انظر شكل 9.2) مبتدئين بتقريبين ابتدائيين p_0 و p_1، فإنّ التقريب p_2 عبارة عن تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$. والتقريب p_3 عبارة عن تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$ وهكذا.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.2

القاطع Secant

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع تقريب ابتدائي p_0 و p_1؛

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0 و p_1، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 2$ و $q_0 = f(p_0)$ و $q_1 = f(p_1)$.
2	ما دام $i \leq N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$ (احسب p_i).
4	إذا كان $\lvert p - p_1 \rvert < TOL$ فإن المخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	ضع $p_0 = p_1$ (حيث p_0, q_0, p_1, q_1) $q_0 = q_1$ $p_1 = p$ $q_1 = f(p)$
7	المخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و N_0 ,' $= N_0$) توقف.

■

ويتضمن المثال الآتي مسألة سبقت دراستها في المثال (1) عندما استخدمنا طريقة نيوتن مع $p_0 = \pi/4$.

مثال 2

استخدم طريقة القاطع لإيجاد حل لـ $x = \cos x$. قارنا في المثال (1) تكرار الدّالة وطريقة نيوتن بتقريب ابتدائي $p_0 = \pi/4$. وهنا نحتاج إلى تقريبين ابتدائيين. ويدرج جدول (5.2) الحسابات مع $p_0 = 0.5$، $p_1 = \pi/4$ والصيغة

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1} - p_{n-2})(\cos p_{n-1} - p_{n-1})}{(\cos p_{n-1} - p_{n-1}) - (\cos p_{n-2} - p_{n-2})} \quad \text{لكل} \quad n \geq 2$$

من الخوارزمية (4.2). ■

جدول 5.2

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

وبمقارنة النتائج هنا بتلك التي في المثال (1)، نرى أن p_5 دقيق لغاية الرتبة الكسرية العاشرة. إن تقارب طريقة القاطع أسرع كثيرًا من تكرار الدّالة، لكنها أبطأ قليلًا من طريقة نيوتن التي تعطي هذه الرتبة من الدقة مع p_3، وهذا صحيح عمومًا. (انظر التمرين (14) من الفصل 4.2).

تُستخدم طريقة نيوتن أو طريقة القاطع في تنقية الجواب المعطى بأسلوب آخر غالبًا مثل طريقة التنصيف، لكون هذه الطرائق تتطلب تقريبًا ابتدائيًّا جيدًا، لكنها عمومًا تعطي تقاربًا سريعًا. وإن كل زوج من التقريبات المتتابعة في طريقة التنصيف يحوّط جذر الصيغة p، أي أنه للعدد الصحيح الموجب n كله جذر ما بين a_n و b_n. وهذا يؤدي إلى أنه لأي n، فإنّ تكرارات طريقة التنصيف تحقّق

$$|p_n - p| < \tfrac{1}{2}|a_n - b_n|$$

التي تحقّق حدًّا خطأً سهل الحساب للتقريبات. إن إحاطة الجذر ليس مضمونًا لطريقة نيوتن أو طريقة القاطع. ويتضمن جدول (4.2) نتائج لطريقة نيوتن طبّقت على $f(x) = \cos x - x$ حيث وُجد جذر تقريبي مقداره 0.7390851332. لاحظ أن هذا الجذر ليس محوطًا بـ p_0, p_1 أو p_1, p_2. إن تقريبات طريقة القاطع في هذه المسألة م عطاة في جدول (5.2). فالتقريبان الابتدائيّان p_0 و p_1 يحوطان الجذر، لكن زوج التقريبين p_3 و p_4 قد فشل في عمل ذلك.

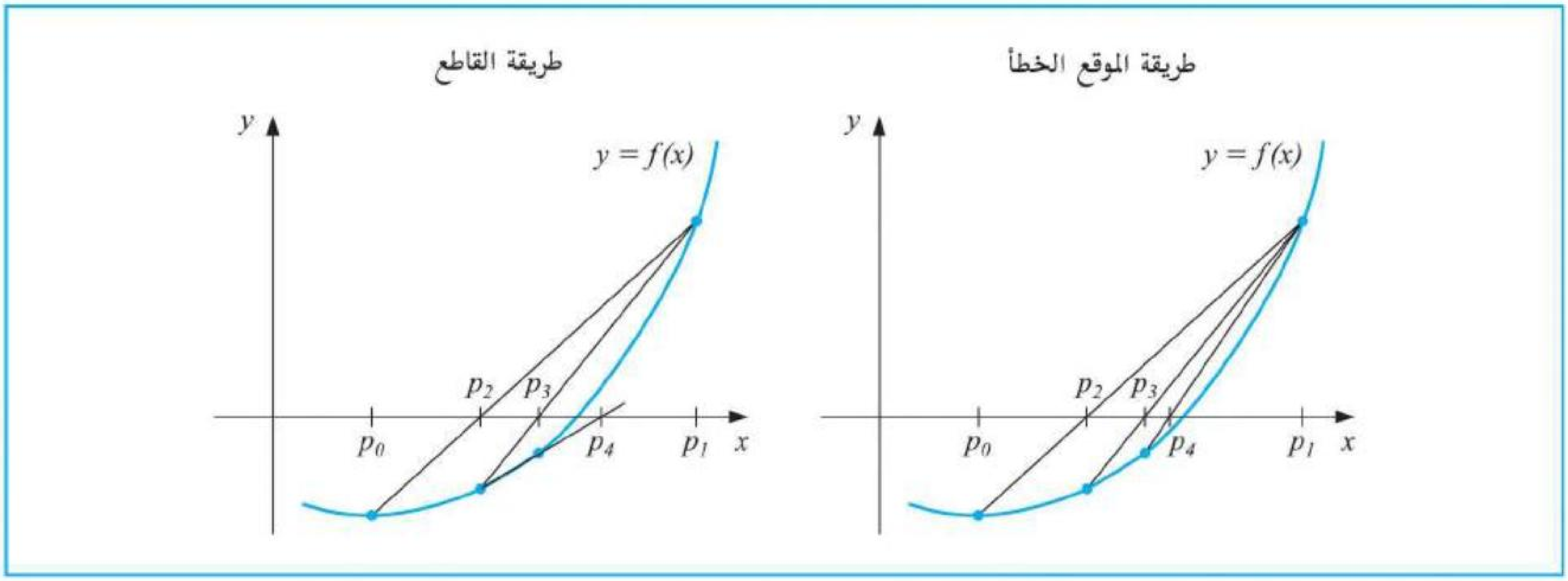
إن المصطلح **Regule Falsi** الذي يعنـي القاعدة الزائفة أو الموقع الزائف يشير إلى كون تقنية استخدام النتائـج زائفة، ولكن ضمن أسـلوب خـاص، لإيجـاد تقـارب لنتيجة صحيحة. ويمكن إيجاد مسائل الموقع الخاطىء على برديات Rhind يعود تاريخهـا إلـى 1650 تقريبًـا قبل الميلاد.

إن طريقة الموقع الخطأ **False Position** تولّد تقريبات بطريقة القاطع نفسها، لكنها تتضمن اختبارًا لضمان كون الجذر محوّطًا دائمًا ما بين تكرارات متتالية. وعلى الرغم من أنها ليست الطريقة التي نوصي بها عمومًا، إلا أنها توضح كيفية اتحاد المحوطات.

يُختار p_0 و p_1 مع $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$ في البداية. ويُختار التقريب p_2 بأسلوب طريقة القاطع نفسه، مثل تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$. ولتحديد خط قاطع نستخدم حساب p_3، ونحتاج إلى تدقيق $f(p_2) \cdot f(p_1)$. فإذا كان هذا المقدار سالبًا فإنّ p_1 و p_2 يحوطان الجذر، ونختار p_3 على أنه تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$. وبعكس ذلك نختار p_3 على أنه تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_2, f(p_2))$. ومن ثم نبدل القياس على p_0 و p_1. و بالأسلوب نفسه عند إيجاد p_3، فإنّ إشارة $f(p_3) \cdot f(p_2)$

تحدد ما إذا كان علينا استخدام p_2 و p_3 أو p_3 و p_1 لحساب p_4، وتعاد تسمية p_1 و p_2 في الحالة الأخيرة. وتضمن تكرار التسمية هذه أن الجذر محاط بتكرارات متتالية. والعملية موضحة في الخوارزمية (5.2)، ويوضح شكل (10.2) كيف تختلف التكرارات عما هي عليه في طريقة القاطع؛ إذ التقريبات الثلاثة الأولى متماثلة، إلا الرابع فمختلف.

شكل 10.2



ALGORITHM
الخوارزمية 5.2

الموقع الخطأ False Position

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع كون f دالّة متصلة على الفترة $[p_0, p_1]$، بحيث إن $f(p_0)$ و $f(p_1)$ لهما إشارة مختلفة.

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0 و p_1 الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 2$ $q_0 = f(p_0)$ و $q_1 = f(p_1)$
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات ٣ – ٧ الآتية:
3	ضع $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$ (احسب p_i)
4	إذا كان $\|p - p_1\| < TOL$ فإن المخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$ و $q = f(p)$
6	إذا $q \cdot q_1 < 0$ ضع $p_0 = p_1$ $q_0 = q_1$

7	ضع $p_1 = p$ $q_1 = q$
8	المخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $(N_0 = ', N_0)$) توقف.

■

جدول 6.2

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390848638
5	0.7390851305
6	0 7390851332

وضح جدول (6.2) نتائج طريقة الموقع الخطأ المطبقة على $f(x) = \cos x - x$ مع التقريبات نفسها التي استخدمناها في طريقة القاطع في المثال (2). لاحظ أن التقريبات تتّفق من خلال p_3، وأن طريقة الموقع الخطأ تتطلب تكرارات إضافية لإعطاء الدقة نفسها لطريقة القاطع.

يتطلب الضمان المضاف إلى طريقة الموقع الخطأ حسابات أكثر مقارنة بطريقة القاطع، بالضبط مثل التبسيط الذي توفره طريقة القاطع مقارنةً بطريقة نيوتن التي تأتي على حساب تكرارات إضافية. ويمكن رؤية أمثلة أخرى على خصائص هذه الطرائق الإيجابية والسلبية من خلال التمرينين العمليين (17) و (18).

مجموعة التمارين 3.2 EXERCISE SET

1. ليكن $f(x) = x^2 - 6$ و $p_0 = 1$. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد p_2.
2. ليكن $f(x) = -x^3 - \cos x$ و $p_0 = -1$. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد p_2. هل يمكن استخدام $p_0 = 0$؟
3. ليكن $f(x) = x^2 - 6$. أوجد p_3 عندما $p_0 = 3$ و $p_1 = 2$.
   أ. استخدم طريقة القاطع.
   ب.استخدم طريقة الموقع الخطأ.
   ج. أيهما أقرب إلى $\sqrt{6}$؟
4. ليكن $f(x) = -x^3 - \cos x$. أوجد p_3 عندما $p_0 = -1$ و $p_0 = 1$.
   أ. استخدم طريقة القاطع.
   ب. استخدم طريقة الموقع الخطأ.
5. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-4} للمسائل الآتية:
   أ. $x^3 - 2x^2 - 5 = 0, \quad [1, 4]$
   ب. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0, \quad [-3, -2]$
   ج. $x - \cos x = 0, \quad [0, \pi/2]$
   د. $x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0, \quad [0, \pi/2]$
6. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-5} للمسائل الآتية:
   أ. $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ لكل $1 \le x \le 2$
   ب. $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ لكل $1.3 \le x \le 2$
   ج. $2x \cos 2x - (x-2)^2 = 0$ لكل $2 \le x \le 3$ و $3 \le x \le 4$
   د. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$ و $e \le x \le 4$
   هـ. $e^x - 3x^2 = 0$ لكل $0 \le x \le 1$ و $3 \le x \le 5$
   و. $\sin x - e^{-x} = 0$ لكل $0 \le x \le 1$، $3 \le x \le 4$ و $6 \le x \le 7$
7. كرر العمل على تمرين (5) مستخدمًا طريقة القاطع.
8. كرر العمل على تمرين (6) مستخدمًا طريقة القاطع.
9. كرر العمل على تمرين (5) مستخدمًا طريقة الموقع الخطأ.
10. كرر العمل على تمرين (6) مستخدمًا طريقة الموقع الخطأ.
11. استخدم الطرائق الثلاث في هذا الفصل لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-5} للمسائل الآتية:
   أ. $3x - e^x = 0 \quad \text{for } 1 \le x \le 2$
   ب. $x + 3\cos x - e^x = 0 \quad \text{for } 0 \le x \le 1$

12. استخدم الطرائق الثلاث في هذا الفصل لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-7} للمسائل الآتية:

أ. $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$ و $2 \le x \le 4$.

ب. $x + 1 - 2\sin \pi x = 0$ لكل $0 \le x \le \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

13. استخدم طريقة نيوتن للتقريب بدقّة 10^{-4}، لتقريب قيمة x والتي تعطي النقطة الأقرب إلى $(1, 0)$ على المنحنى $y = x^2$. [ملحوظة: صغّر إلى $[d(x)]^2$، حيث يمثّل $d(x)$ المسافة ما بين (x, x^2) إلى $(1, 0)$].

14. استخدم طريقة نيوتن للتقريب بدقّة 10^{-4}، لتقريب قيمة x والتي تعطي النقطة الأقرب إلى $(2, 1)$ على المنحنى $y = 1/x$.

15. فيما يأتي توضيح لطريقة نيوتن بالشكل البياني: افترض أن $f'(x)$ موجود ضمن $[a, b]$، وأن $f'(x) \neq 0$ ضمن $[a, b]$. وأكثر من ذلك، افترض حتمية وجود $p \in [a, b]$ واحدة بحيث $f(p) = 0$، وليكن $p_0 \in [a, b]$ بصورة غير منهجية. لتكن p_1 نقطة على خط المماس لـ f عند $(p_0, f(p_0))$ قاطعًا محور x. ليمثل p_n تقاطع خط المماس لـ f لمحور x عند $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$ اشتق الصيغة التي توضح هذه الطريقة.

16. استخدم طريقة نيوتن لحل الصيغة

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x \quad \text{مع} \quad p_0 = \frac{\pi}{2}$$

طبّق التكرار مستخدمًا طريقة نيوتن حتى تحقّق الدقة 10^{-5}. وضح لماذا تكون التمهيدية غير اعتيادية بالنسبة إلى طريقة نيوتن. أيضًا حل الصيغة باستخدام القيم $p_0 = 5\pi$ و $p_0 = 10\pi$.

17. عديدة حدود من الرتبة الرابعة

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

لها صفران حقيقيان، أحدهما ضمن $[-1, 0]$ والآخر ضمن $[0, 1]$. حاول تقريب هذين الصفرين لغاية 10^{-6} مستخدمًا:

أ. طريقة الموقع الخطأ

ب. طريقة القاطع

ج. طريقة نيوتن،

استخدم النقاط الطرفية لكل فترة على نحو تقريبات ابتدائية في (أ) و(ب) والنقاط الوسطية في(ج).

18. للدالّة $f(x) = \tan \pi x - 6$ صفر عندما $(1/\pi)\ \arctan 6 \approx 0.447431543$. ليكن $p_0 = 0$ و $p_1 = 0.48$. استخدم عشر تكرارات لكل من الطرائق الآتية لتقريب هذا الجذر. أي الطرائق أنجح؟ ولماذا؟

أ. طريقة التنصيف

ب. طريقة الموقع الخطأ

ج. طريقة القاطع

19. يمكن كتابة صيغة التكرار لطريقة القاطع بصيغة أبسط هي

$$p_n = \frac{f(p_{n-1})p_{n-2} - f(p_{n-2})p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

وضح لماذا تبدو صيغة التكرار هذه عمومًا أقل دقة من تلك المعطاة في الخوارزمية (4.2).

20. للصيغة $x^2 - 10\cos x = 0$ حلان ± 1.3793646. استخدم طريقة نيوتن لتقريب الحلول لغاية دقة 10^{-5} مع هذه القيم لـ p_0:

أ. $p_0 = -100$ ب. $p_0 = -50$ ج. $p_0 = -25$

د. $p_0 = 25$ هـ. $p_0 = 50$ و. $p_0 = 100$

21. للصيغة $4x^2 - e^x - e^{-x} = 0$ أربعة حلول $\pm x_1$ و $\pm x_2$. استخدم طريقة نيوتن لتقريب الحل لغاية 10^{-5} مع هذه القيم لـ p_0:

أ. $p_0 = -10$	ب. $p_0 = -5$	ج. $p_0 = -3$
د. $p_0 = -1$	هـ. $p_0 = 0$	و. $p_0 = 1$
ز. $p_0 = 3$	ح. $p_0 = 5$	ط. $p_0 = 10$

22. استخدم **Maple** لتحديد عدد مرات التكرار اللازمة لطريقة نيوتن مع $p_0 = \pi/4$ لإيجاد جذر $f(x) = \cos x - x$ ضمن 10^{-100}.

23. الدّالة $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x} \cos \pi x$ له عدد لانهائي من الأصفار

أ. حدد ضمن 10^{-6} الأصفار السالبة فقط.

ب. حدد ضمن 10^{-6} أصغر أربعة أصفار موجبة.

ج. حدد تقريبًا ابتدائيًّا معقولًا لإيجاد أصغر صفر موجب من الرتبة n لـِ f. (ملحوظة: ارسم شكلًا تقريبيًّا لـ f.)

د. استخدم الفقرة (ج) لتحديد الصفر الخامس والعشرين الأصغر الموجب لـِ f.

24. أوجد تقريبًا دقيقًا ضمن 10^{-4} لصيغة المجتمع

$$1,564,000 = 1,000,000e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

التي شرحت في مقدمة هذا الفصل. استخدم هذه القيمة للتنبؤ بحجم المجتمع عند نهاية السنة الثانية، مفترضًا أن معدل الهجرة السنوي 435,000 شخص خلال هذه السنة.

25. عددان مجموعهما 20. إذا أضيف كل عدد إلى جذره التربيعي فإنّ حاصل ضرب المجموعين يكون 155.55. حدد هذين العددين ضمن 10^{-4}.

26. القيمة التراكمية لحساب التوفير مبنية على دفعات دورية اعتيادية يمكن تحديدها من خلال صيغة الأقساط المستحقة

$$A = \frac{P}{i}[(1 + i)^n - 1]$$

في هذه الصيغة، تمثّل A الرصيد في هذا الحساب، وتمثّل p المبلغ المودع اعتياديًّا، وتمثل i معدل الفائدة خلال فترة محددة، ولعدد n من هذه الفترات. يرغب أحد المهندسين في امتلاك حساب توفير بمبلغ 750,000$ عند تقاعده بعد 20 سنة، ويستطيع إيداع 1500$ شهريًّا لتحقيق هذا الهدف. فما أقل معدل فائدة لاستثمار هذا المبلغ مفترضًا حسابها شهريًّا؟

27. مسائل حول كمية الأموال المطلوب تسديدها بقرض ضمن فترة زمنية محددة تتضمن الصيغة

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$$

المعروفة بصيغة الأقساط الاعتيادية. في هذه الصيغة، تمثّل A مبلغ القرض، و p مبلغ الدفعات المسددة كلها، وتمثّل i معدل الفائدة خلال فترة محددة ولعدد n من هذه الفترات. افترض وجود حاجة إلى قرض مقداره 130,000$ ومدته 30 سنة لشراء دار، وأن المقترض بوسعه تسديد القرض بدفعات شهرية لا تزيد على 1000$. فما أعلى معدلٍ فائدة تناسب قدرة المقترض؟

28. إن حقن دواء لمريض يؤدي إلى تركيز الدم وفقًا للصيغة $c(t) = Ate^{-t/3}$ ملجم لكل مللتر، بعد زمن t ساعة من حقن A من الوحدات. والتركيز الأعلى الآمن هو 1 mg/ml.

أ. ما الكمية الواجب حقنها للوصول إلى هذا التركيز الآمن؟

ب. وجب حقن كمية إضافية من هذا الدواء للمريض عقب انخفاض التركيز إلى 0.25 mg/ml. حدد متى يجب إعطاء هذه الزيادة إلى أقرب دقيقة.

ج. افترض أن التركيز من حقن متتالية بسمة (تراكمية)، وأن 75% من الكمية التي حُقنت تعطى خلال الجرعة الثانية. فمتى تكون الجرعة الثالثة؟

29. لتكن $f(x) = 3^{3x+1} - 7 \cdot 5^{2x}$

أ. استخدم أوامر **Maple** solve and fsolve لمحاولة إيجاد جذور f جميعها.

ب. ارسم $f(x)$ لإيجاد تقريبات ابتدائية لجذور f.

ج. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذور f ضمن 10^{-16}.

د. أوجد الحلول الصحيحة لِـ $f(x) = 0$ دون استخدام **Maple**.

30. أعد التمرين (29) مستخدمًا $f(x) = 2^{x^2} - 3 \cdot 7^{x+1}$.

31. إن النموذج اللوجستي للنمو السكاني تعبر عنه الصيغة

$$P(t) = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt}}$$

بحيث إن P_L، c و $k > 0$ عبارة عن ثوابت، و$P(t)$ تمثل عدد السكان عند الزمن t وإن $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_L$. استخدم بيانات التعداد السكاني للسنوات 1950، 1960 و 1970 المبينة في الجدول أدناه لتحديد الثوابت أعلاه لنموذج النمو اللوجستي. استخدم النموذج اللوجستي للتنبؤ بعدد سكان الولايات المتحدة عام 1980 وعام 2010 مفترضًا $t = 0$ في عام 1950. قارن بين التنبؤ عام 1980 والعدد الحقيقي.

32. نموذج كومبرتس للنمو السكاني هو

$$P(t) = P_L e^{-ce^{-kt}}$$

حيث إن P_L، c و $k > 0$ عبارة عن ثوابت، و$P(t)$ تمثّل عدد السكان عند الزمن t. أعد التمرين (27) مستخدمًا نموذج كومبرتس للنمو السكاني بدلًا من النموذج اللوجستي.

33. يتغلب اللاعب A (يربح 21 نقطة مقابل 0) على اللاعب B في لعبة كرة المضرب باحتمال

$$P = \frac{1+p}{2}\left(\frac{p}{1-p+p^2}\right)^{21}$$

حيث تمثل P احتمال ربح A لأي مباراة محددة (دون ارتباط ذلك بمن يستهل الضرب). (انظر *[Keller, J], p. 267.*) حدد – ضمن 10^{-3} –القيمة الصغرى لِـ p التي تضمن تغلب A على p بنصف عدد المباريات بينهما على الأقل.

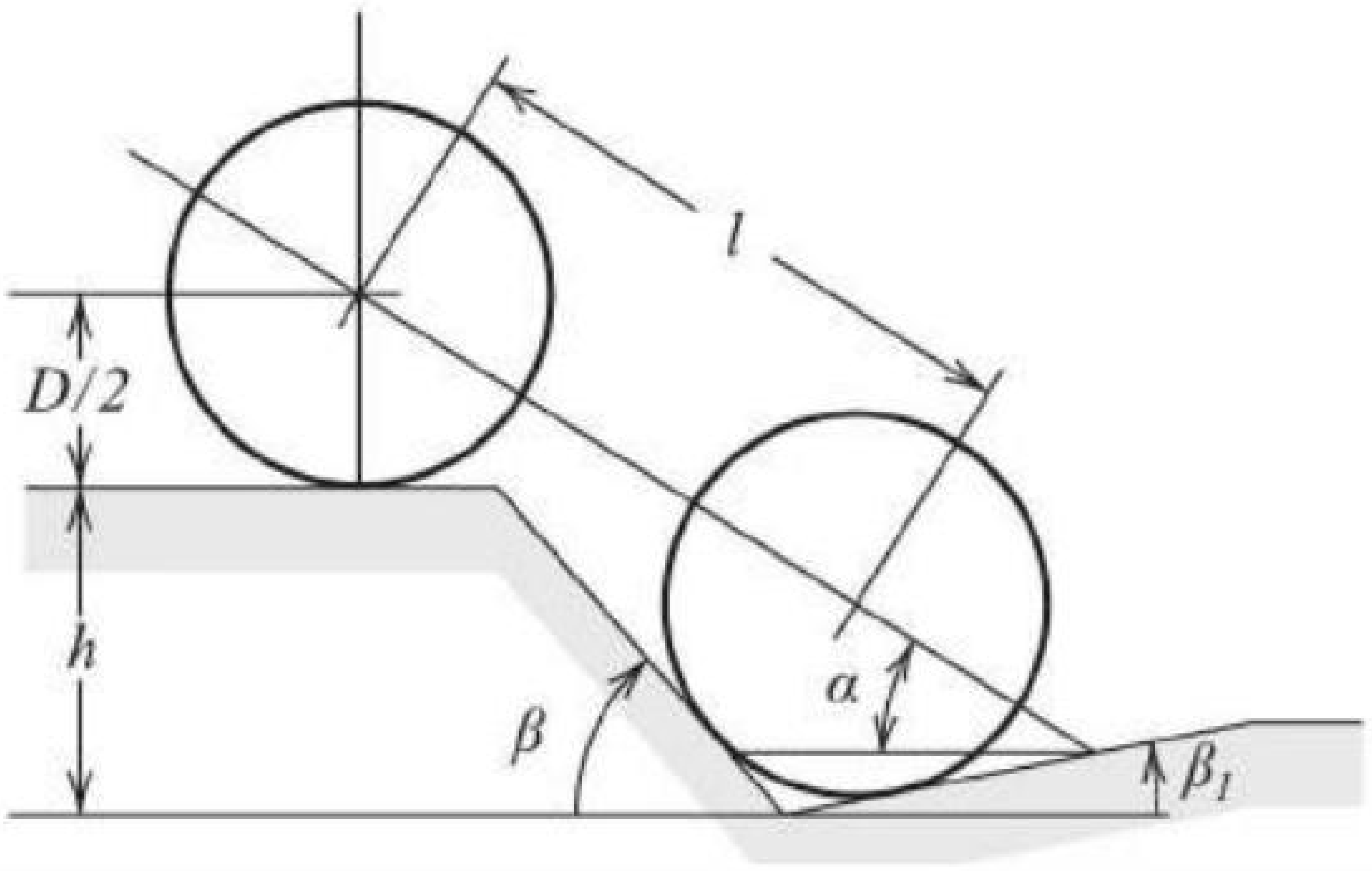
34. عند تصميم مركبة السباق يؤخذ في الحسبان نوعان من كيفية فشل المركبة في تجاوز العقبات. يحدث الأول عندما تلامس بطن المركبة الأرض في أثناء تجاوزها العقبة، ويحدث الثاني عندما تلامس مقدمة المركبة الأرض في أثناء تجاوزها العقبة. والشكل أدناه مأخوذ من *[Bek]*، ويوضح العناصر المصاحبة للنوع الثاني من الفشل. ويلاحظ فيه إمكانية تطابق الزاوية الكبرى α التي يمكن للمركبة ميلانها حيث تمثل β الزاوية الكبرى التي لا يظهر عندها فشل المركبة من النوع الأول مع الصيغة

$$A \sin\alpha \cos\alpha + B \sin^2\alpha - C \cos\alpha - E \sin\alpha = 0$$

حيث

$$A = l \sin\beta_1, \quad B = l \cos\beta_1, \quad C = (h + 0.5D)\sin\beta_1 - 0.5D\tan\beta_1$$

$$E = (h + 0.5D)\cos\beta_1 - 0.5D$$



أ. أثبت الادعاء الآتي:
"عندما $l = 89\ in,\ h = 49\ in,\ D = 55\ in,\ and\ \beta_1 = 11.5^\circ$ فإنّ الزاوية $\alpha = 33^{\circ}$"

ب. أوجد α في حالة كون l, h و β_1 مساوية لما هو في الفقرة (أ) لكن $D = 30 in$.

4.2 تحليل الخطأ لطرائق التكرار Error Analysis for Iterative

سنتفحص في هذا الفصل رتبة التقارب لأساليب التكرار الدّالية، ونتناول طريقة نيوتن من خلال كونها طريقة لإيجاد التقارب السريع. سنأخذ في الحسبان طرائق تسريع التقارب لطريقة نيوتن في حالات خاصة أيضًا. ونحتاج إلى عملية لقياس مدى التسارع في تقارب المتتالية في البداية.

تعريف 6.2 افترض المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p و $p_n \neq p$ لقيم n كلها. فعند وجود الثوابت λ و α حيث

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda$$

نقول: إن المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p بالرتبة α، مع خطأ مقارب يساوي الثابت λ.
ويوصف أسلوب التكرار ذو الصيغة $p_n = g(p_{n-1})$ بأنه من الرتبة α إذا تقاربت المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ للحل $p = g(p)$ من الرتبة α. ■

وتتقارب المتتالية ذات الرتبة العليا للتقارب عمومًا بسرعة أكبر من المتتالية ذات الرتبة الدنيا. إن ثابت المقاربة يؤثر في سرعة التقارب، ولكنه ليس في مستوى أهمية الرتبة. وتتطلب حالتان من الرتبة اهتمامًا خاصًّا منا وهما:

- إذا كانت $\alpha = 1$ و $\lambda < 1$ فإنّ المتتالية متقاربة خطيًّا.
- إذا كانت $\alpha = 2$ فإنّ المتتالية متقاربة تربيعيًّا.

ويقارن المثال الآتي بين الحالتين، بحيث نرى لماذا نحاول إيجاد طرائق تؤدي إلى متتاليات ذات تقارب من الرتبة أعلى.

مثال 1 افترض $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربة خطيًّا إلى (0) مع

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} = 0.5$$

وأن $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربة تربيعيًّا إلى الصفر مع ثابت الخطأ المقارب نفسه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\tilde{p}_{n+1}|}{|\tilde{p}_n|^2} = 0.5$$

ولغرض التبسيط، افترض أن

$$\frac{|\tilde{p}_{n+1}|}{|\tilde{p}_n|^2} \approx 0.5 \quad \text{و} \quad \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} \approx 0.5$$

أما أسلوب التقارب الخطي، فإنّ هذا يعني

$$|p_n - 0| = |p_n| \approx 0.5|p_{n-1}| \approx (0.5)^2|p_{n-2}| \approx \cdots \approx (0.5)^n|p_0|$$

بحيث يكون لأسلوب التقارب التربيعي

$$\begin{aligned}|\tilde{p}_n - 0| = |\tilde{p}_n| &\approx 0.5|\tilde{p}_{n-1}|^2 \approx (0.5)[0.5|\tilde{p}_{n-2}|^2]^2 = (0.5)^3|\tilde{p}_{n-2}|^4\\ &\approx (0.5)^3[(0.5)|\tilde{p}_{n-3}|^2]^4 = (0.5)^7|\tilde{p}_{n-3}|^8\\ &\approx \cdots \approx (0.5)^{2^n-1}|\tilde{p}_0|^{2^n}\end{aligned}$$

ويوضح جدول (7.2) السرعة النسبية لتقارب المتتالية إلى الصفر عندما $|p_0| = |\tilde{p}_0| = 1$.

جدول 7.2

n	متتالية التقارب الخطي sequence $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0.5)^n$	متتالية التقارب التربيعي sequence $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0.5)^{2^n-1}$
1	5.0000×10^{-1}	5.0000×10^{-1}
2	2.5000×10^{-1}	1.2500×10^{-1}
3	1.2500×10^{-1}	7.8125×10^{-3}
4	6.2500×10^{-2}	3.0518×10^{-5}
5	3.1250×10^{-2}	4.6566×10^{-10}
6	1.5625×10^{-2}	1.0842×10^{-19}
7	7.8125×10^{-3}	5.8775×10^{-39}

ويقع التقارب التربيعي للمتتالية ضمن 10^{-38} من الصفر بالحد السابع. ونحتاج إلى **126** حدًّا على الأقل لضمان هذه الدقة بالنسبة إلى التقارب الخطي للمتتالية. ■

وتتقارب المتتاليات المتقاربة تربيعيًّا عمومًا بسرعة أكبر من تلك التي تتقارب فقط خطيًّا.

مبرهنة 7.2 ليكن $g \in C[a, b]$ بحيث $g(x) \in [a, b]$ لكل $x \in [a, b]$. وافترض بالإضافة إلى ذلك أن g' متصلة على (a, b)، وأن الثابت الموجب $k < 1$ موجود بحيث

$$|g'(x)| \le k \quad \text{لكل} \quad x \in (a, b)$$

فإذا كانت $g'(p) \neq 0$ فإنّه لأي عدد p_0 في $[a, b]$، فإنّ المتتالية

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad \text{لـ} \quad n \geq 1$$

تتقارب خطيًّا فقط إلى نقطة ثابتة ووحيدة p في $[a, b]$. ■

البرهان نحن نعلم من مبرهنة النقطة الثابتة (3.2) من الفصل (2.2) أن المتتالية تتقارب إلى p بحيث تكون g' موجودة ضمن (a, b)، ويمكننا تطبيق مبرهنة القيمة الوسطى للدّالة g لإثبات أنه ولأي n

$$p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p) = g'(\xi_n)(p_n - p)$$

بحيث تقع ξ_n ما بين p_n و p. وحيث إن g' متصلة على (a, b)، يكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty} g'(\xi_n) = g'(p)$$

عندئذ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \lim_{n\to\infty} g'(\xi_n) = g'(p) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = |g'(p)|$$

وبناءً على ما تقدم، إذا كانت $g'(p) \neq 0$ فإنّ تكرار النقطة الثابتة ينتج تقاربًا خطيًّا مع خطأ مقارب ثابت $|g'(p)|$. ■ ■ ■

وتشير مبرهنة (7.2) إلى أن تقاربًا من الرتبة العليا لطرائق النقطة الثابتة يمكن ظهوره فقط عندما $g'(p) = 0$. وتوضح التمهيدية الآتية شروطًا إضافية تضمن التقارب التربيعي الذي نريد.

مبرهنة 8.2 ليكن p حلاً للصيغة $x = g(x)$. افترض أن $g'(p) = 0$، وأن g'' حيث $|g''(x)| < M$ متصلة على فترة مفتوحة I تحتوي على p. عندها يوجد عدد $\delta > 0$، بحيث $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$، والمتتالية $p_n = g(p_{n-1})$ عند $n \geq 1$ تتقارب تربيعيًّا على الأقل إلى p. وعلاوة على ذلك، لقيم n الكبيرة بقدر كافٍ، تكون

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2$$ ■

البرهان اختر k ضمن $(0, 1)$ و $\delta > 0$ بحيث عندما تكون الفترة $[p - \delta, p + \delta]$ في الفترة I يكون لدينا $|g'(x)| \leq k$ و g'' متصلة. وبما أن $|g'(x)| \leq k < 1$ ، فإنّ المنطق الذي استخدم في مبرهنة (5.2) من الفصل (3.2) يثبت أن حدود المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تكون ضمن $[p - \delta, p + \delta]$ وتوسيع $g(x)$ إلى كثيرة حدود تايلور الخطية وإلى $x \in [p - \delta, p + \delta]$ يعطي

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x - p) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - p)^2$$

بحيث تقع ξ ما بين x و p. والفرضيتان $g(p) = p$ و $g'(p) = 0$ تؤديان إلى حصول

$$g(x) = p + \frac{g''(\xi)}{2}(x - p)^2$$

وعندما $x = p_n$ خصوصًا فإنّ

$$p_{n+1} = g(p_n) = p + \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n - p)^2$$

مع وجود ξ_n ما بين p_n و p. وبذلك فإن

$$p_{n+1} - p = \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n - p)^2$$

حيث $|g'(x)| \le k < 1$ على $[p-\delta, p+\delta]$ وأن الدّالة g تنقل $[p-\delta, p+\delta]$ إلى نفسها، فإنه بناءً على مبرهنة النقطة الثابتة تتقارب $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ إلى p. لكن ξ_n ما بين p و p_n لكل n، فإنّ $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب أيضًا إلى p، وإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^2} = \frac{|g''(p)|}{2}$$

وهذه التمهيدية تؤدي إلى أن المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب تربيعيًّا عندما $g''(p) \neq 0$ وتتقارب من الرتبة أعلى عندما $g''(p) = 0$. ولأن g'' متصلة ومحددة حصريًّا بـ M في الفترة $[p-\delta, p+\delta]$، وهذا يعني أنه لقيم n الكبيرة بقدر كافٍ تكون

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2 \qquad ■■■$$

وتعلمنا النظريتان (7.2) و(8.2) أن بحثنا عن تقارب تربيعي بطرائق النقطة الثابتة يجب أن يكون في اتجاه الدّوال ذوات المشتقة صفر عند النقطة الثابتة.

إن أسهل طريقة لإنشاء مسألة النقطة الثابتة متوافقة مع مسألة إيجاد الجذر $f(x) = 0$ هي بطرح مضاعف $f(x)$ من x. دعنا عندئذ نفترض أن

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad \text{لكل } n \ge 1$$

للدّالة g وفقًا للصيغة

$$g(x) = x - \phi(x)f(x)$$

حيث إن ϕ دالّة قابل للاشتقاق وقد اختير لاحقًا.

ومن أجل تقارب تربيعي وفق أسلوب تكرار اشتقاقه من g، فإنّنا نحتاج إلى $g'(p) = 0$ عندما $f(p) = 0$. وحيث إن

$$g'(x) = 1 - \phi'(x)f(x) - f'(x)\phi(x)$$

يكون لدينا

$$g'(p) = 1 - \phi'(p)f(p) - f'(p)\phi(p) = 1 - \phi'(p)\cdot 0 - f'(p)\phi(p) = 1 - f'(p)\phi(p)$$

وأن $g'(p) = 0$ فقط وفي أثناء $\phi(p) = 1/f'(p)$ فقط.

وإذا جعلنا $\phi(x) = 1/f'(x)$ فإنّنا نضمن أن $\phi(p) = 1/f'(p)$، ومن ثم نحصل على عملية التقارب التربيعية

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

هذه هي طريقة نيوتن.

من خلال ما سبق، جعلنا القيد $f'(p) \neq 0$، حيث p هو الحل لـ $f(x) = 0$. ومن تعريف طريقة نيوتن، من الواضح أن ثمة صعوبات قد تظهر فيما لو ذهبت $f'(p_n)$ إلى الصفر آنيًّا مع $f(p_n)$. إن طريقة نيوتن وطريقة القاطع خصوصًا تؤديان عمومًا إلى مشاكل إذا كان $f'(p) = 0$ في أثناء $f(p) = 0$. ولتفحّص هذه الصعوبات بتفصيل أكثر؛ نقدم التعريف الآتي:

تعريف 9.2 لنفترض أن p حل للدّالة $f(x) = 0$. نقول: إن p صفرًا (أو جذرًا) مضاعفًا m من المرات للدّالة f حيث $x \neq p$، ويمكننا كتابة $f(x) = (x-p)^m q(x)$ ، حيث إن $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$.

وخلاصة القول، تمثّل $q(x)$ ذلك الجزء من $f(x)$ الذي لا يسهم في صفرية f. تعطي التمهيدية الآتية سبلًا لتحديد أصفار بسيطة لدالّة ما ولها مضروب الواحد.

مبرهنة 10.2 $f \in C^1[a, b]$ لها صفر بسيط عند p في (a, b) إذا وفقط إذا كان

$$f(p) = 0 \text{ لكن } f'(p) \neq 0$$ ■

البرهان

إذا كان لـ f صفر بسيط عند p ضمن (a, b)، فإنّ $f(p) = 0$ و $f(x) = (x-p)q(x)$ بحيث $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$. حيث إن $f \in C^1[a, b]$

$$f'(p) = \lim_{x\to p} f'(x) = \lim_{x\to p}[q(x) + (x-p)q'(x)] = \lim_{x\to p} q(x) \neq 0$$

وعلى عكس ذلك، إذا كان $f(p) = 0$ لكن $f'(p) \neq 0$ فإنّ f تمتد في كثيرة حدود تايلور الصفرية حول p.

بالنسبة إلى كثيرات الحدود فإن p عبارة عن صفر المضاعف m إلى f إذا كان $f(x) = (x-p)^m q(x)$ حيث إن $q(x)$ عبارة عن كثيرة الحدود مع $q(p) \neq 0$.

عندئذ تكون $f(x) = f(p) + f'(\xi(x))(x-p) = (x-p)f'(\xi(x))$

حيث $\xi(x)$ ما بين x و p. ولكون $f \in C^1[a, b]$، فإنّ

$$\lim_{x\to p} f'(\xi(x)) = f'\left(\lim_{x\to p} \xi(x)\right) = f'(p) \neq 0$$

ونَدَعُ $q = f' \circ \xi$ تعطينا $f(x) = (x-p)q(x)$ حيث إن $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$. وعلى هذا النحو فإنّ لـ f صفرًا بسيطًا عند p. ■ ■ ■

وقد أُخذ التعميم الآتي للمبرهنة (10.2) في الحسبان في التمرين (12).

مبرهنة 11.2 للدالّة $f \in C^m[a, b]$ صفر مضاعف m مرّة عند p في الفترة (a, b) إذا وفقط إذا كان

$$0 = f(p) = f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p) \text{ لكن } f^{(m)}(p) \neq 0$$ ■

تفيد تمهيدية المبرهنة (10.2) بأن الفترة حول p موجودة، حيث تتقارب طريقة نيوتن تربيعيًا إلى p ولأي تقريب ابتدائي $p_0 = p$، حيث p هي صفر بسيط. ويوضح المثال الآتي أن التقارب التربيعي قد لا يظهر إذا لم يكن الصفر بسيطًا.

مثال 4 افترض $f(x) = e^x - x - 1$. وكون $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ و $f'(0) = e^0 - 1 = 0$، لكن $f''(0) = e^0 = 1$، فإنّ لـ f صفرًا للمضروب 2 عند $p = 0$. في الحقيقة يمكن التعبير عن $f(x)$ بالصيغة

$$f(x) = (x-0)^2 \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

حيث نجد عن طريق "قاعدة لوبيتال" أن

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

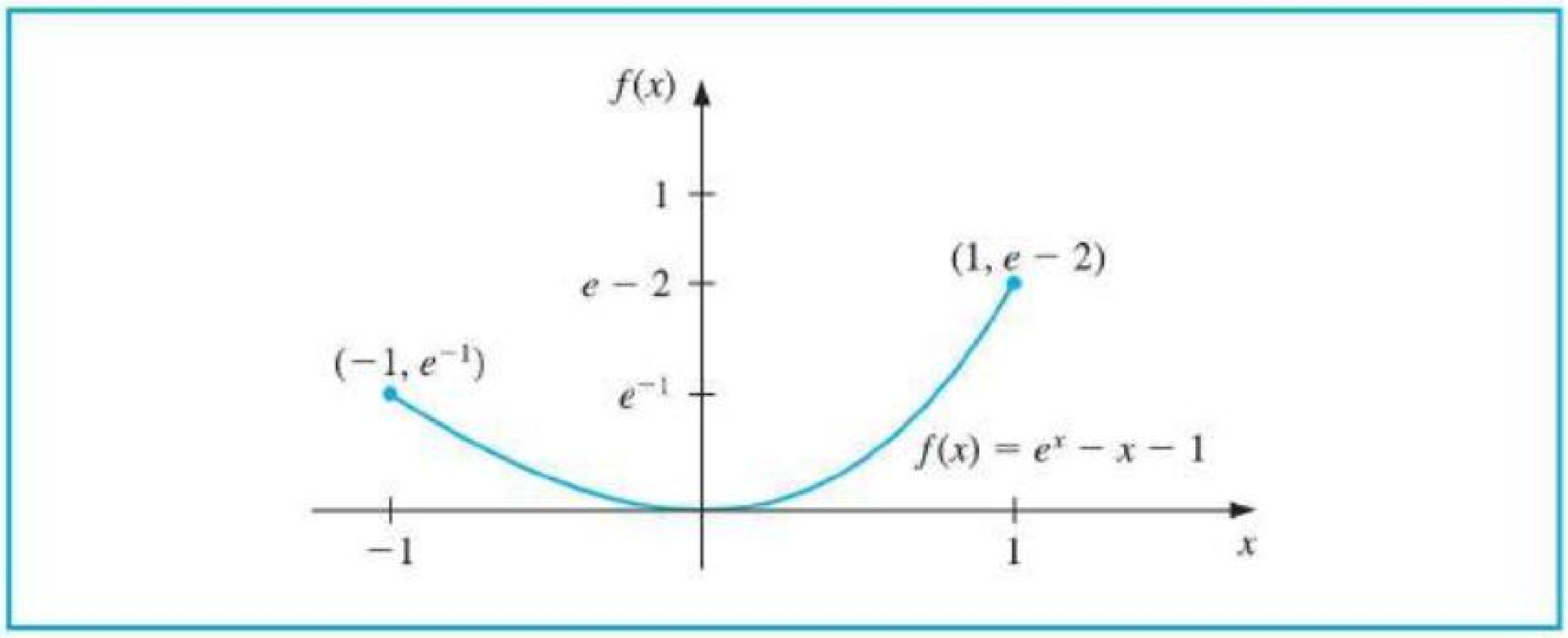
الحدود الناتجة بطريقة نيوتن المطبقة على f مع $p_0 = 1$ مبينة في الجدول (8.2). وتتقارب المتتالية بوضوح تام إلى (0)، ولكن ليس تربيعيًا.

ويبين شكل (11.2) رسمًا لـ f. ■

جدول 8.2

n	p_n	n	p_n
0	1.0	9	2.7750×10^{-3}
1	0.58198	10	1.3881×10^{-3}
2	0.31906	11	6.9411×10^{-4}
3	0.16800	12	3.4703×10^{-4}
4	0.08635	13	1.7416×10^{-4}
5	0.04380	14	8.8041×10^{-5}
6	0.02206	15	4.2610×10^{-5}
7	0.01107	16	1.9142×10^{-6}
8	0.005545		

شكل 11.2



توجد طريقة واحدة تتناول مسألة الجذور المضاعفة، وهي أن نعرّف

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

وإذا كان p هو الصفر للدّالة f مضاعفًا m مرّة وكانت $f(x) = (x-p)^m q(x)$ فإنّ

$$\mu(x) = \frac{(x-p)^m q(x)}{m(x-p)^{m-1}q(x) + (x-p)^m q'(x)}$$

$$= (x-p)\frac{q(x)}{mq(x) + (x-p)q'(x)}$$

ولها صفر عند p. على أي حال $q(p) \neq 0$ وعندئذ

$$\frac{q(p)}{mq(p) + (p - p)q'(p)} = \frac{1}{m} \neq 0$$

و p هو صفر بسيط لـ μ. ويمكن إذن تطبيق طريقة نيوتن على μ لتعطينا

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)/f'(x)}{\{[f'(x)]^2 - [f(x)][f''(x)]\}/[f'(x)]^2}$$

أو

$$g(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} \qquad (11.2)$$

جدول 9.2

n	p_n
1	$-2.3421061 \times 10^{-1}$
2	$-8.4582788 \times 10^{-3}$
3	$-1.1889524 \times 10^{-5}$
4	$-6.8638230 \times 10^{-6}$
5	$-2.8085217 \times 10^{-7}$

إذا كانت g تملك الشروط المطلوبة للاستمرار، فإنّ تكرار الدّالة على g ستكون متقاربة بغض النظر عن مضروب الصفر لـ f. عيب هذه الطريقة الوحيد من الناحية المبرهنة هو الحسابات الإضافية لـ $f''(x)$ مع عمل مختبري أكثر لحساب التكرارات. وعلى أي حال يمكن عند التطبيق أن تسبب الجذور المتعددة مشاكل جدية في جدولة التكرار؛ لكون مقام الصيغة (11.2) يتضمن الفرق بين عددين كل منهما قريب من الصفر.

مثال 3 يبيِّن جدول (9.2) تقريبات مضاعف الصفر عند $x = 0$ إلى $f(x) = e^x - x - 1$ باستخدام $p_n = g(p_{n-1})$ لكل $n \geq 1$، حيث g معطى في الصيغة (11.2). وسجِّلت النتائج باستخدام حاسبة ذات عشر منازل من الدقة. وقد اختير التقريب الابتدائي بموجب $p_0 = 1$ ليكون بالإمكان مقارنة المدخلات بتلك التي في جدول (8.2)، والذي لا يبيِّنه جدول (9.2) هو عدم ظهور تحسن للتقريب الصفري $-2.8085217 \times 10^{-7}$ خلال الحسابات المتتالية باستخدام هذه الحاسبة' لكون البسط والمقام كليهما يقترب إلى الصفر. ■

مثال 4 قمنا في مثال (3) من الفصل (2.2) بحل $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ بإيجاد الصفر $p = 1.36523001$. ولمقارنة التقارب لصفر الصيغة المضاعف مرّة واحدة في واحد بطريقة نيوتن، وطريقة نيوتن المختصرة المبينة في الصيغة (11.2)؛ افترض

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10}{3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1}} \qquad \text{(i)}$$

من طريقة نيوتن ومن كون $p_n = g(p_{n-1})$، حيث الدّالة g على صورة الصيغة (11.2)، نحصل على:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10)(3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1})}{(3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1})^2 - (p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10)(6p_{n-1} + 8)} \qquad \text{(ii)}$$

خذ $p_0 = 1.5$،تكون التكرارات الثلاثة الأولى لـ (i) و (ii) مبينة في جدول (10.2). وتوضح النتائج التقارب المتسارع لكلا الطريقتين في حالة الصفر البسيط. ■

جدول 10.2

	(i)	(ii)
p_1	1.37333333	1.35689898
p_2	1.36526201	1.36519585
p_3	1.36523001	1.36523001

EXERCISE SET مجموعة التمارين 4.2

1. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة ضمن 10^{-5} للمسائل الآتية:

أ. $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0$ لكل $0 \le x \le 1$

ب. $\cos(x + \sqrt{2}) + x(x/2 + \sqrt{2}) = 0$ لكل $-2 \le x \le -1$

ج. $x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x} = 0$ لكل $0 \le x \le 1$

د. $e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3 = 0$ لكل $-1 \le x \le 0$

2. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة ضمن 10^{-5} للمسائل الآتية:

أ. $1 - 4x\cos x + 2x^2 + \cos 2x = 0$ لكل $0 \le x \le 1$

ب. $x^2 + 6x^5 + 9x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ لكل $-3 \le x \le -2$

ج. $\sin 3x + 3e^{-2x}\sin x - 3e^{-x}\sin 2x - e^{-3x} = 0$ لكل $3 \le x \le 4$

د. $e^{3x} - 27x^6 + 27x^4e^x - 9x^2e^{2x} = 0$ لكل $3 \le x \le 5$

3. كرّر التمرين (1) مستخدمًا طريقة نيوتن–رافسون المختصرة والموضحة في الصيغة (11.2). هل يوجد ثمة تحسن في سرعة ما كان عليه التمرين (1) أو دقته؟

4. كرّر التمرين (2) مستخدمًا طريقة نيوتن–رافسون المختصرة والموضحة في الصيغة (11.2). هل يوجد ثمة تحسن في سرعة ما كان عليه التمرين (2) أو دقته؟

5. استخدم طريقة نيوتن وطريقة نيوتن–رافسون المختصرة في الصيغة (11.2) لإيجاد حل دقيق ضمن 10^{-5} للمسألة الآتية:

$$e^{6x} + 1.441e^{2x} - 2.079e^{4x} - 0.3330 = 0 \quad \text{لكل} \quad -1 \le x \le 0$$

هذا شبيه بالمسألة 1 (د) مع استبدال المعاملات بتقريباتها ذات المنازل الأربع. قارن بين النتائج في 1 (د) و 2 (د).

6. أثبت أن المتتاليات الآتية تتقارب خطيًّا إلى $p = 0$. كم كانت n كبيرة قبل أن يكون لدينا $|p_n - p| \le 5 \times 10^{-2}$!

أ. $p_n = \frac{1}{n}, \quad n \ge 1$ ب. $p_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \ge 1$

7. أ. أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب k، فإنّ المتتالية المعرفة وفق $p_n = 1/n^k$ تتقارب خطيًّا إلى $p = 0$.

ب. لأي زوج من الأعداد الصحيحة k و m، حدِّد العدد N بحيث $1/N^k < 10^{-m}$.

8. أ. أثبت أن المتتالية $p_n = 10^{-2^n}$ تتقارب تربيعيًّا إلى الصفر.

ب. أثبت أن المتتالية $p_n = 10^{-n^k}$ لا تتقارب تربيعيًّا إلى الصفر، بغض النظر عن مقدار الأسّ $k > 1$.

9. أ. كوّن متتالية تتقارب إلى الصفر من الرتبة 3.

ب. افترض أن $\alpha > 1$. كوّن متتالية تتقارب إلى الصفر من الرتبة α.

10. افترض أن p صفر للدّالة f مضاعفًا m مرّة، حيث إن $f^{(m)}$ متصلة على الفترة المفتوحة والمتضمنة لـ p. أثبت أن طريقة النقطة الثابتة الآتية لها $g'(p) = 0$:

$$g(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$$

11. أثبت أن خوارزمية التنصيف (1.2) تعطي متتالية بحد خطأ يتقارب خطيًّا إلى الصفر.

12. افترض أن الدّالة f لها m من المشتقات المتصلة. عدّل برهان المبرهنة (10.2) لإثبات أن الدّالة f لها صفر مضاعف m مرّة عند p إذا وفقط إذا كان

$$0 = f(p) = f'(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p) \quad \text{لكن} \quad f^{(m)}(p) \ne 0$$

13. إن طريقة التكرار لحل $f(x) = 0$ معطاة ضمن طريقة النقطة الثابتة $g(x) = x$، حيث

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} - \frac{f''(p_{n-1})}{2f'(p_{n-1})}\left[\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}\right]^2 \quad \text{لكل} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

له $g'(p) = g''(p) = 0$. وهذا يعطي عمومًا تقاربًا مكعبًا ($\alpha = 3$). وسّع تحليل المثال (1) لمقارنة التقارب التربيعي بالتقارب التكعيبي.

14. من الممكن إثبات (انظر على سبيل المثال [DaB, pp 228-229]) أنه إذا كانت $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربة وفقًا لطريقة القاطع لـ p الذي هو حلٌّ لـ $f(x) = 0$، فإنّ الثابت C يظهر حيث $|p_{n+1} - p| \approx C|p_n - p||p_{n-1} - p|$ عند قيم كبيرة نسبيًّا لـ n. افترض أن $\{p_n\}$ تتقارب إلى p من الرتبة α، وأثبت أن $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.

(إرشاد: هذا يؤدي إلى أن رتبة التقارب لطريقة القاطع هي 1.62 تقريبًا).

5.2 تسريع التقارب — Accelerating Convergence

تشير المبرهنة (7.2) إلى ندرة الوصول إلى حالة مقبولة جدًّا في تقارب تربيعي. والآن سنأخذ في الحسبان أسلوبًا يدعى "طريقة أيكن **Aitken's Δ² method**" التي يمكن استخدامها لتسريع تقارب المتتالية ذات التقارب الخطي بغض النظر عن أصلها وطبيعة تطبيقها.

افترض أن $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية تتقارب خطيًّا إلى p. وللسعي في تكوين متتالية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب بتسارع أكبر إلى p مما هي عليه $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$. دعنا أولًا نفترض أن إشارات

$p_n - p$، $p_{n+1} - p$ و $p_{n+2} - p$

تتفق مع كون n كبيرة نسبيًّا بأن

$$\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} \approx \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}$$

وبذلك

$$(p_{n+1} - p)^2 \approx (p_{n+2} - p)(p_n - p)$$

لذا

$$p_{n+1}^2 - 2p_{n+1}p + p^2 \approx p_{n+2}p_n - (p_n + p_{n+2})p + p^2$$

و

$$(p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1})p \approx p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2$$

وبحل p نحصل على

$$p \approx \frac{p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

وبجمع الحدود p_n^2 و $2p_np_{n+1}$ وطرحها في البسط وتجميع الحدود تجميعًا مناسبًا نحصل على

$$p \approx \frac{p_np_{n+2} - 2p_np_{n+1} + p_n^2 - p_{n+1}^2 + 2p_np_{n+1} - p_n^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

$$= \frac{p_n(p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n) - (p_{n+1}^2 - 2p_np_{n+1} + p_n^2)}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

وتستند طريقة أيكن Δ^2 إلى الافتراض بأن المتتالية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ والمعرفة بـ

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \qquad (2.12)$$

تتقارب بسرعةٍ أكثر إلى p مما عليه المتتالية الأصلية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

مثال 1 المتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$، حيث تتقارب $p_n = \cos(1/n)$ خطيًّا إلى $p = 1$. والحدود القليلة الأولى للمتتاليتين $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ معطاة في جدول (11.2). وهي حتمًا تظهر أن $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب أسرع من $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى $p = 1$. ■

جدول 11.2

n	p_n	$\hat{p}_n$
1	0.54030	0.96178
2	0.87758	0.98213
3	0.94496	0.98979
4	0.96891	0.99342
5	0.98007	0.99541
6	0.98614	
7	0.98981	

ويعود أصل رمز Δ ملازمة هذا الأسلوب إلى التعريف الآتي.

تعريف 12.2 الفرق التتابعي Δp_n (ويقرأ "دلتا p_n") للمتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$. يعرف بالصيغة

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n \quad \text{لكل} \quad n \geq 0$$

والقوى الأعلى للمشغل Δ تعرف بوجه تكراري بالصيغة

$$\Delta^k p_n = \Delta(\Delta^{k-1} p_n) \quad \text{لكل} \quad k \geq 2$$ ■

يؤدي التعريف إلى

$$\Delta^2 p_n = \Delta(p_{n+1} - p_n) = \Delta p_{n+1} - \Delta p_n = (p_{n+2} - p_{n+1}) - (p_{n+1} - p_n)$$

وعندئذ $\Delta^2 p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n$ ويمكن كتابة صيغة $\hat{p}_n$ المعطاة في الصيغة (12.2) بالصيغة

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n} \quad \text{لكل} \quad n \geq 0 \qquad (13.2)$$

وعند نقطة النقاش هذه حول طريقة أيكن Δ^2، نكون قد توصَّلنا إلى أن المتتالية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p أكثر سرعة من المتتالية الأصلية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$، لكننا لم نوضِّح ما نعنيه بعبارة "أكثر سرعة تقارب". وتوضِّح المبرهنة (13.2) هذا الأسلوب وتبرِّره. وبرهان هذه المبرهنة متروك في التمرين (16).

مبرهنة 13.2 افترض أن $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية تتقارب خطيًّا إلى p، وأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} < 1$$

عندئذ فالمتتالية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب نحو p أسرع من $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$. على النحو

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0$$ ■

استخدم ألكسندر آيتكن (1895-1967) Alexander Aitken هذا الأسلوب عام 1926 لتسريع معدل التقارب لسلسلة في ورقة بحثية حول المعادلات الجبرية [Ai]. هذه العملية شبيهة بالتي استخدمت قبل ذلك كثيراً من قبل الرياضي الياباني تاكاكازو سيكي كوا (1642-1708) Takakazo Seki Kowa.

وبتطبيق اختصار طريقة أيكن Δ^2 على متتالية متقاربة خطيًّا وناتجة عن تكرار النقطة الثابتة يمكننا تسريع التقارب في الإطار التربيعي. هذا الأسلوب معروف بطريقة ستيفنسن، ويختلف نوعًا ما عن تطبيق طريقة أيكن Δ^2 مباشرة نحو التقارب الخطي لمتتالية التكرار بالنقطة الثابتة. وتبني طريقة أيكن Δ^2 الحدود وفقًا للترتيب

كتب جوهان فريدرك ستيفنسن (1873–1961) Johan Fredrik Steffensen كتابا معمقا عام 1927 بعنوان الاستيفاء الداخلي.

$$p_0, \quad p_1 = g(p_0), \quad p_2 = g(p_1), \quad \hat{p}_0 = \{\Delta^2\}(p_0), \quad p_3 = g(p_2), \quad \hat{p}_1 = \{\Delta^2\}(p_1), \ldots$$

حيث تشير $\{\Delta^2\}$ إلى استخدام الصيغة (13.2). وتبني طريقة ستيفنسن الحدود الأربعة الأولى $p_0, p_1, p_2,$ و $\hat{p}_0$ نفسها. وعلى أي حال فعند هذه الخطوة يفترض أن تكون $\hat{p}_0$ أفضل تقريب إلى p من p_2، وتطبيق تكرار النقطة الثابتة لِـ $\hat{p}_0$ بدلاً من p_2. وباستخدام هذه الملحوظة تكون المتتالية الناتجة

$$p_0^{(0)}, \quad p_1^{(0)} = g(p_0^{(0)}), \quad p_2^{(0)} = g(p_1^{(0)}), \quad p_0^{(1)} = \{\Delta^2\}(p_0^{(0)}), \quad p_1^{(1)} = g(p_0^{(1)}), \ldots.$$

وينتج كل ثالث حد بالصيغة (13.2)، حيث تستخدم في الحدود الأخرى تكرار النقطة الثابتة للحد الذي يسبقه. والعملية موضحة ضمن الخوارزمية (6.2).



خوارزمية ستيفنسن Steffensen's Algorithm

لإيجاد حل لِـ $p = g(p)$ مع تقريب ابتدائي p_0:

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p_1 = g(p_0)$ (احسب $p_1^{(i-1)}$) $p_2 = g(p_1)$ (احسب $p_2^{(i-1)}$) $p = p_0 - (p_1 - p_0)^2/(p_2 - 2p_1 + p_0)$ (احسب $p_0^{(i)}$)
4	إذا كان $\|p - p_0\| < TOL$ المخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i+1$
6	ضع $p_0 = p$ (تحديث p_0)
7	المخرجات: (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 = ', N_0$) (لم تستكمل العملية بنجاح). توقف.

■

لاحظ أن $\Delta^2 p_n$ قد تكون صفرًا، التي ستظهر صفرًا في مقام التكرار التالية، وهذا إن حدث نحدد المتتالية ونختار $p_2^{(i-1)}$ بمثابة الإجابة التقريبية.

مثال 2 لحل $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ مستخدمًا طريقة ستيفنسن، ضع $x^3 + 4x^2 = 10$، اقسم على $x + 4$ وأعطِ حلاً لـ x. تنتج هذه العملية طريقة النقطة الثابتة

$$g(x) = \left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2}$$

المستخدمة في المثال 3 (د) من الفصل (2.2).

يعطي أسلوب ستيفنسن مع $p_0 = 1.5$ القيم في جدول (12.2). والتكرار $p_0^{(2)} = 1.365230013$ دقيقة لغاية 10^{-9}. ونجد في هذا المثال أن طريقة ستيفنسن تعطي الدقة نفسها لطريقة نيوتن تقريبًا. (انظر مثال 4 من الفصل 4.2). ■

جدول 12.2

k	$p_0^{(k)}$	$p_1^{(k)}$	$p_2^{(k)}$
0	1.5	1.348399725	1.367376372
1	1.365265224	1.365225534	1.365230583
2	1.365230013		

يظهر من المثال (2) أن طريقة ستيفنسن تعطي تقاربًا تربيعيًّا دون تقييم المشتقة، وقد أوضحت المبرهنة (14.2) هذه الحالة. ويمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في [He2, pp. 90–92] أو [IK, pp. 103–107].

مبرهنة 14.2

افترض أن $x = g(x)$ لها حل p حيث $g'(p) \neq 1$. إذا وجد $\delta > 0$ حيث $g \in C^3[p-\delta, p+\delta]$، فإنّ طريقة ستيفنسن تعطي تقاربًا تربيعيًّا لأي $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

■

EXERCISE SET مجموعة التمارين 5.2

1. المتتاليات الآتية متقاربة خطيًّا. ولّد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية $\{\hat{p}_n\}$ مستخدمًا طريقة أيكن Δ^2:
   أ. $p_0 = 0.5, \quad p_n = (2 - e^{p_{n-1}} + p_{n-1}^2)/3, \quad n \geq 1$
   ب. $p_0 = 0.75, \quad p_n = (e^{p_{n-1}}/3)^{1/2}, \quad n \geq 1$
   ج. $p_0 = 0.5, \quad p_n = 3^{-p_{n-1}}, \quad n \geq 1$
   د. $p_0 = 0.5, \quad p_n = \cos p_{n-1}, \quad n \geq 1$
2. افترض الدّالة $f(x) = e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8) e^{4x} - (\ln 2)^3$. استخدم طريقة نيوتن مع $p_0 = 0$ لتقريب صفر الدّالة f. ولّد حدودًا لغاية $|p_{n+1} - p_n| < 0.0002$. كوّن متتالية أيكن Δ^2 وهي $\{\hat{p}_n\}$. هل تحسن التقارب؟
3. ليكن $g(x) = \cos(x-1)$ و $p_0^{(0)} = 2$. استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد $p_0^{(1)}$.
4. ليكن $g(x) = 1 + (\sin x)^2$ و $p_0^{(0)} = 1$. استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد $p_0^{(1)}$ و$p_0^{(2)}$.
5. طُبّقت طريقة ستيفنسن على الدّالة $g(x)$ باستخدام $p_0^{(0)} = 1$ و$p_2^{(0)} = 3$ لإيجاد $p_0^{(1)} = 0.75$ فما $p_1^{(0)}$؟
6. طُبّقت طريقة ستيفنسن على الدّالة $g(x)$ باستخدام $p_0^{(0)} = 1$ و $p_1^{(0)} = \sqrt{2}$ لإيجاد $p_0^{(1)} = 2.7802$ فما $p_2^{(0)}$؟
7. استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد – ضمن دقة 10^{-4} – جذر $x^3 - x - 1 = 0$ ضمن $[1, 2]$، وقارن هذا بنتائج التمرين (6) من الفصل (2.2).
8. استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد – ضمن دقة 10^{-4} – جذر $x - 2^{-x} = 0$ ضمن $[0, 1]$، وقارن هذا بنتائج التمرين (8) من الفصل (2.2).
9. استخدم طريقة ستيفنسن مع $p_0 = 2$ لحساب تقريب إلى $\sqrt{3}$ ضمن دقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية بنتائج التمرين (9) من الفصل (2.2) ونتائج التمرين (12) من الفصل (1.2).
10. استخدم طريقة ستيفنسن مع $p_0 = 3$ لحساب تقريب إلى $\sqrt[3]{25}$ ضمن دقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية بنتائج التمرين (10) من الفصل (2.2) ونتائج التمرين (13) من الفصل (1.2).

11. استخدم طريقة ستيفنسن لتقريب حلول الصيغ الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $x = (2 - e^x + x^2)/3$ حيث الدّالة g دالة التمرين 11(أ) من الفصل (2.2).

ب. $x = 0.5(\sin x + \cos x)$ حيث الدّالة g دالة التمرين 11(و) من الفصل (2.2).

ج. $x = (e^x/3)^{1/2}$ حيث الدّالة g دالّة التمرين 11(ج) من الفصل (2.2).

د. $x = 5^{-x}$ حيث الدّالة g دالّة التمرين 11(د) من الفصل (2.2).

12. استخدم طريقة ستيفنسن لتقريب حلول الصيغ الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $2 + \sin x - x = 0$ حيث الدّالة g دالّة التمرين 12(أ) من الفصل (2.2).

ب. $x^3 - 2x - 5 = 0$ حيث الدّالة g دالّة التمرين 12(ب) من الفصل (2.2).

ج. $3x^2 - e^x = 0$ حيث الدّالة g دالّة التمرين 12(ج) من الفصل (2.2).

د. $x - \cos x = 0$ حيث الدّالة g دالّة التمرين 1(د) من الفصل (2.2).

13. تتقارب المتتاليات الآتية إلى الصفر. استخدم طريقة أيكن Δ^2 لتوليد $\{\hat{p}_n\}$ إلى حين ظهور $|\hat{p}_n| \le 5 \times 10^{-2}$:

أ. $p_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \ge 1$

ب. $p_n = \dfrac{1}{n^2}, \quad n \ge 1$

14. توصف المتتالية $\{p_n\}$ بأنها متقاربة بأقصى خطية إلى p إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = 0$$

أ. أثبت أنه إذا كان $p_n \to p$ من الرتبة α و $\alpha > 1$، فإنّ $\{p_n\}$ تتقارب بأقصى خطية إلى p.

ب. أثبت أن $p_n = 1/n^n$ تتقارب بأقصى خطية إلى الصفر، لكنها لا تتقارب إلى الصفر من الرتبة α ولأي $\alpha > 1$.

15. افترض أن $\{p_n\}$ تتقارب بأقصى خطية إلى p. أثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = 1$$

16. برهن على صحة المبرهنة (13.2) [ملحوظة: ليكن $\delta_n = (p_{n+1} - p)/(p_n - p) - \lambda$، وأثبت أن $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$، ثم ضع $(\hat{p}_{n+1} - p)/(p_n - p)$ بدلالة δ_n, δ_{n+1}، λ].

17. لتكن كثيرة حدود تايلور النونية لـ $P_n(x)$ ممتدة حول $x_0 = 0$:

أ. حيث x ثابت، أثبت أن $p_n = P_n(x)$ يحقّق فرضيات المبرهنة (13.2).

ب. ليكن $x = 1$، استخدم طريقة أيكن Δ^2 لتوليد المتتالية $\hat{p}_0, \dots, \hat{p}_8$.

ج. هل طريقة أيكن تُعجّل التقارب في هذه الحالة؟

6.2 أصفار كثيرات الحدود وطريقة مولر
Zeros of Polynomials and Muller's Method

كارول فريدريك جاوس
(1777-1855)
Carl Friedrich Gauss
أحد أعظم الرياضيين في كل الأزمنة قد برهن هذه النتيجة ضمن أطروحته للدكتوراة، ونشرها عام 1799.

الشكل العام لكثيرة الحدود من الرتبة n تكون على الصورة

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث تسمى a_i's معاملات P وهي ثوابت، وإن $a_n \neq 0$. والدّالة الصفرية $P(x) = 0$ لكل x هي كثيرة حدود درجتها غير محددة.

مبرهنة 15.2 المبرهنة الرئيسة للجبر Fundamental Theorem of Algebra

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود رتبتها $n \geq 1$، ومعاملاتها أعداد حقيقية أو مركبة، فيوجد للصيغة $P(x) = 0$ جذر (قد يكون مركبًا) واحد على الأقل. ■

مع أن المبرهنة (15.2) رئيسة لأي دراسة حول دوال ابتدائية، فإنّ البرهان المعتاد يتطلب أساليب دراسة مبرهنة الدّالة المركب. ونحيل القارئ إلى [SaS, p. 155]؛ بهدف تطوير نظم المواضيع المطلوب إثباتها.

ونعرض تمهيدية مهمة للمبرهنة (15.2) كما يلي:

تمهيدية 16.2 إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $n \geq 1$ مع معاملاتها أعداد حقيقية أو مركبة، عندئذ يوجد ثوابت وحيدة $x_1, x_2, \ldots, x_k$ قد تكون مركبة، وأعداد صحيحة موجبة وحيدة $m_1, m_2, \ldots, m_k$ تحقق $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ و

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$ ■

تنص تمهيدية (16.2) على أن مجموعة الأصفار لكثيرة الحدود تكون وحيدة، وأنه إذا عُدّ كل صفر x_i لعدد من المرات قدر مضاعفه m_i، فإنّ كثيرة حدود من الرتبة n لها n من الأصفار تمامًا. تستخدم التمهيدية الآتية لمبرهنة الجبر الرئيسة غالبًا في هذا الباب وفي الأبواب الأخيرة.

تمهيدية 17.2 لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود كل منهما من الرتبة n على الأكثر. إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_k$ حيث $k > n$، أعدادًا مختلفة حيث $P(x_i) = Q(x_i)$ لـ $i = 1, 2, \ldots, k$ فإنّ $P(x) = Q(x)$ لقيم x جميعها. ■

ولاستخدام طريقة نيوتن في تحديد تقريب لأصفار كثيرة الحدود $P(x)$؛ فإنّنا نحتاج إلى تقييم $P(x)$ و $P'(x)$ عند قيم محددة. وحيث إن $P(x)$ و $P'(x)$ كلتيهما كثيرتا حدود، فإنّ كفاءة الحسابات تتطلب كون تقييم هذه الدّوال قد ورد بأسلوب التداخل الذي تناولناه في الفصل (1.2). تتعامل طريقة هورنر Horner's Method مع أسلوب التداخل هذا، وهي تتطلب n من الضرب فقط و n من الجمع لتقييم كثيرة حدود غير منهجية من الرتبة n تمهيدية لذلك.

كان وليم هورنر William Horner (1786-1837) طفلا عبقريًا، وقد أصبح رئيسا لمدرسة في بريستول في سن 18. طريقة هورنر لحل معادلات جبرية قد نُشرت عام 1819 في philosophical Ttransactions للجمعية الملكية.

تمهيدية 18.2 طريقة هورنر Horner's Method

لتكن

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

إذا كان $b_n = a_n$ وكان

$$b_k = a_k + b_{k+1} x_0 \quad \text{لكل} \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$$

فإنّ $b_0 = P(x_0)$. وبالإضافة إلى ذلك، إذا كان

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$$

فإنّ

$$P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0$$ ■

كان باولو روفيني Paolo Ruffini (1765-1822) قد أوضح طريقة مشابهة جعلته يفوز بميدالية ذهبية من الجمعية الرياضية الإيطالية للعلوم. لم يكن روفيني ولا هورنر أول من اكتشف هذه الطريقة، وقد كانت في الصين قبل ذلك بنحو 500 سنة على الأقل.

البرهان من تعريف $Q(x)$

$$\begin{aligned}(x-x_0)Q(x)+b_0 &= (x-x_0)(b_nx^{n-1}+\cdots+b_2x+b_1)+b_0\\ &= (b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x)\\ &\quad -(b_nx_0x^{n-1}+\cdots+b_2x_0x+b_1x_0)+b_0\\ &= b_nx^n+(b_{n-1}-b_nx_0)x^{n-1}+\cdots+(b_1-b_2x_0)x+(b_0-b_1x_0)\end{aligned}$$

وبافتراض $b_n = a_n$ و $b_k - b_{k+1}x_0 = a_k$ يكون

$(x-x_0)Q(x)+b_0 = P(x)$ و $b_0 = P(x_0)$ ■ ■ ■

مثال 1 استخدم طريقة هورنر لتقييم $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ at $x_0 = -2$.

حينما نستخدم حاسبة يدوية في طريقة هورنر، ننشئ –أولًا– جدولًا يبين اسم التجزئة التشبيهية الذي يُعتمد غالبًا. أما هذه المسألة، فيكون الجدول كالآتي:

	المعامل x^4	المعامل x^3	المعامل x^2	المعامل x	الحد الثابت
$x_0 = -2$	$a_4 = 2$	$a_3 = 0$	$a_2 = -3$	$a_1 = 3$	$a_0 = -4$
		$b_4x_0 = -4$	$b_3x_0 = 8$	$b_2x_0 = -10$	$b_1x_0 = 14$
	$b_4 = 2$	$b_3 = -4$	$b_2 = 5$	$b_1 = -7$	$b_0 = 10$

بناءً عليه

$$P(x) = (x+2)(2x^3-4x^2+5x-7)+10$$ ■

إن كلمة "مقلد synthetic" لها جذورها في لغات مختلفة. وفي اللغة الإنجليزية الأساسية توحي بأن شيئا ما "مزيف" أو "مستبدل، ولكنها في الرياضيات تأخذ مفهوم شيء ما دمج معًا. تعامل الهندسة المقلدة الأشكال في مجالها بدلا من كونها أشياء قريبة هي سمة في الهندسة التحليلية.
في القسمة المقلدة لكثيرات الحدود فإن القوى المختلفة للمتغيرات لا تعطى حصريًا، بل تبقى مدمجة معًا.

وميزة إضافية لاستخدام أسلوب هورنر (أو التجزئة التشبيهية) هي كون

$$P(x) = (x-x_0)Q(x)+b_0$$

حيث إن

$$Q(x) = b_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\cdots+b_2x+b_1$$

قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x التي تعطي

$$P'(x) = Q(x)+(x-x_0)Q'(x) \quad \text{و} \quad P'(x_0) = Q(x_0) \qquad (14.2)$$

وعند استخدام طريقة (نيوتن–رافسون) لإيجاد صفر التقريب لكثيرة الحدود، فإنّه يمكن تقييم $P(x)$ و $P'(x)$ بالأسلوب نفسه.

مثال 2 أوجد تقريبًا لأحد أصفار

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$$

مستخدمًا طريقة نيوتن والتجزئة التشبيهية لتقييم $P(x_n)$ و $P'(x_n)$ لكل تكرار x_n عندما تكون $x_0 = -2$ تقريبًا ابتدائيًا.

سبق أن وجدنا $P(-2)$ في المثال (1) من خلال

$x_0 = -2$						
	2	0	−3	3	−4	
		−4	8	−10	14	
	2	−4	5	−7	10	$= P(-2)$

وباستخدام المبرهنة (18.2) والصيغة (14.2) نحصل على

$$P'(-2) = Q(-2) \quad \text{و} \quad Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$$

لذا يمكن إيجاد $P'(-2)$ من خلال تقييم $Q(-2)$ بالأسلوب نفسه

$x_0 = -2$					
	2	−4	5	−7	
		−4	16	−42	
	2	−8	21	−49	$= Q(-2) = P'(-2)$

وإن

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = x_0 - \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = -2 - \frac{10}{-49} \approx -1.796$$

ونعيد العملية لإيجاد x_2:

−1.796						
	2	0	−3	3	−4	
		−3.592	6.451	−6.197	5.742	
	2	−3.592	3.451	−3.197	1.742	$= P(x_1)$
		−3.592	12.902	−29.368		
	2	−7.184	16.353	−32.565	$= Q(x_1)$	$= P'(x_1)$

لذا

$$P(-1.796) = 1.742,\ P'(-1.796) = Q(-1.796) = -32.565$$

و

$$x_2 = -1.796 - \frac{1.742}{-32.565} \approx -1.7425$$

وبأسلوب مماثل، نجد أن $x_3 = -1.73897$. وإن صفرًا حقيقيًا لخمس منازل عشرية يكون (-1.73896). ■

لاحظ أن كثيرة الحدود $Q(x)$ تعتمد على التقريب المستخدم والتغير من تكرار إلى أخرى.

تحسب الخوارزمية (7.2) $P(x_0)$ و $P'(x_0)$ باستخدام طريقة هورنر.

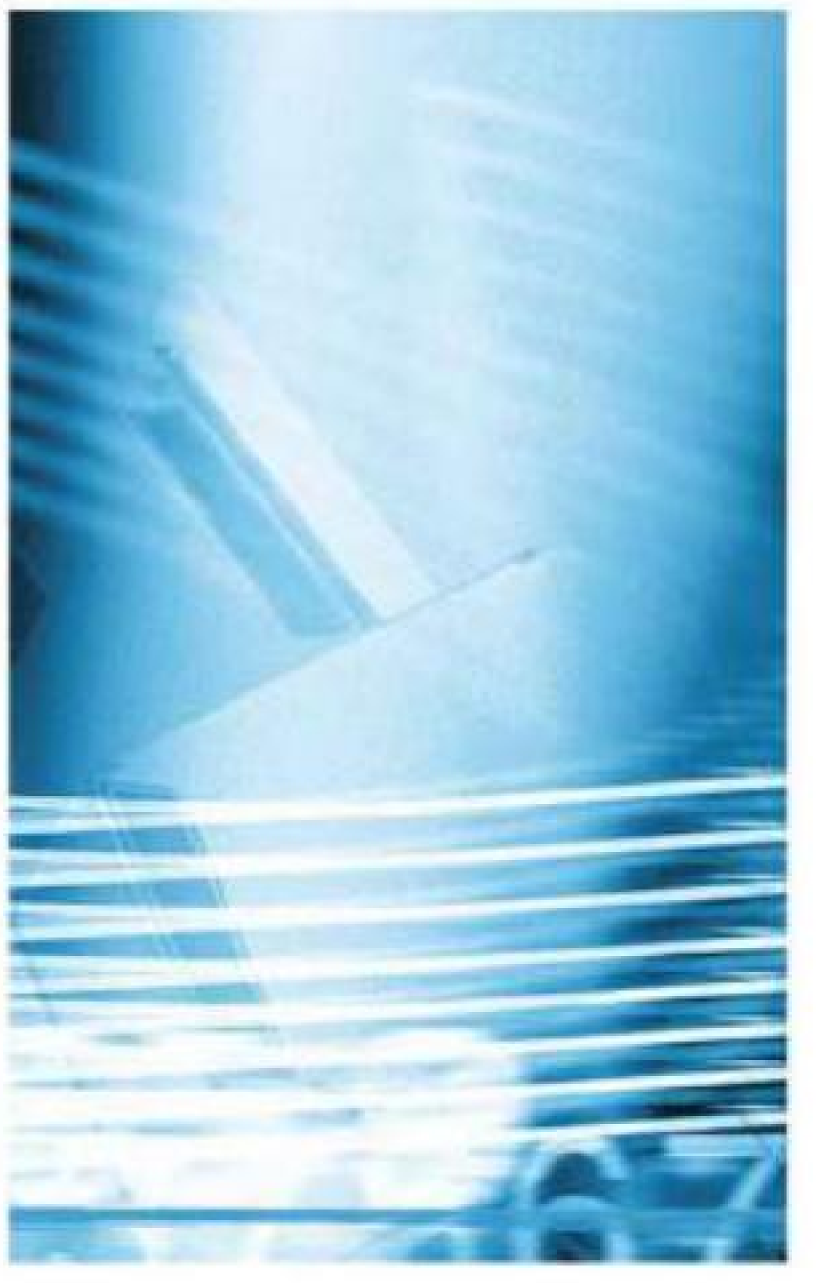
ALGORITHM
الخوارزمية 7.2

خوارزمية هورنر Horner's Algorithm

لحساب قيم كثيرة الحدود

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)Q(x) + b_0$$

ومشتقتها عند x_0:



المدخلات: الرتبة n والمعامل a_n ، ... ، a_0, a_1 ، x_0.

المخرجات: $y = P(x_0)$ ، $z = P'(x_0)$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $y = a_n$ ؛ (احسب b_n لـ P) $z = a_n$ ؛ (احسب b_{n-1} لـ Q)
2	لكل $j = n-1, n-2, \ldots, 1$ ضع $y = x_0 y + a_j$ (احسب b_j لـ P) $z = x_0 z + y$ (احسب b_{j-1} لـ Q)
3	ضع $y = x_0 y + a_0$ (احسب b_0 لـ P)
4	المخرجات (y, z) توقف.

■

إذا كانت N تمثّل التكرار عدد x_N بطريقة نيوتن بمثابة صفر التقريب إلى P فإنّ

$$P(x) = (x - x_N)Q(x) + b_0 = (x - x_N)Q(x) + P(x_N) \approx (x - x_N)Q(x)$$

ومن ثم فإنّ $x - x_N$ عبارة عن عامل تقريب إلى $P(x)$. وبجعل التقريب إلى P صفرًا، وأن عامل التقريب $Q(x) \equiv Q_1(x)$ نجد أن

$$P(x) \approx (x - \hat{x}_1)Q_1(x)$$

ونستطيع إيجاد صفر تقريب ثانٍ إلى P عبر تطبيق طريقة نيوتن على $Q_1(x)$. فإذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n مع n من الأصفار الحقيقية، فعند تطبيق هذه العملية على نحو متتالٍ سينتج في النهاية $(n-2)$ من أصفار التقريب إلى P وعامل تقريب تربيعي $Q_{n-2}(x)$. وعند هذه المرحلة يمكن حل $Q_{n-2}(x) = 0$ بالصيغة التربيعية لإيجاد آخر صفر تقريب إلى P. وعلى الرغم من أن هذه الطريقة يمكن استخدامها لإيجاد أصفار التقريب جميعها، فإنّها تعتمد على تكرار استخدام التقريبات، ومن ثم يمكن أن تؤدي إلى نتائج غير دقيقة.

تُسمّى العملية التي شرحت توًّا الانكماش. ومن صعوبات تحقّق الدقة عبر استخدام الانكماش أنه عند إيجادنا لأصفار التقريب إلى $P(x)$، فإنّ طريقة نيوتن تطبّق على كثيرة الحدود المختزلة $Q_k(x)$، ومفادها أن كثيرة الحدود تمتلك صفة كون

$$P(x) \approx (x - \hat{x}_1)(x - \hat{x}_2)\cdots(x - \hat{x}_k)Q_k(x)$$

وصفر تقريب $\hat{x}_{k+1}$ إلى Q_k لا يقرب جذر $P(x) = 0$ عمومًا بجودة جذر الصيغة المختزلة نفسها $Q_k(x) = 0$، ويزداد عدم الدقة مع ازدياد قيمة k. وللحد من هذه الصعوبة؛ يمكننا استخدام الصيغ المختزلة لإيجاد تقريبات $\hat{x}_2, \hat{x}_3, \ldots, \hat{x}_k$ لأصفار P، وبعدئذ تتحسّن التقريبات بتطبيق طريقة نيوتن لكثيرة الحدود الأصلية $P(x)$.

تكمن المشكلة الوحيدة عند تطبيق طرائق القاطع، الموقع الفاشل، أو نيوتن على متعددات الحدود في احتمال أن يكون لكثيرة الحدود جذور معقدة حتى عندما تكون المعاملات جميعها أعدادًا حقيقية. ويمكننا البدء بتقريب ابتدائي مركب للتغلب على هذه الصعوبة وعمل جميع الحسابات مستخدمين العمليات الرياضية المركبة. وتتمثّل أسس الأسلوب البديل بالمبرهنة الآتية.

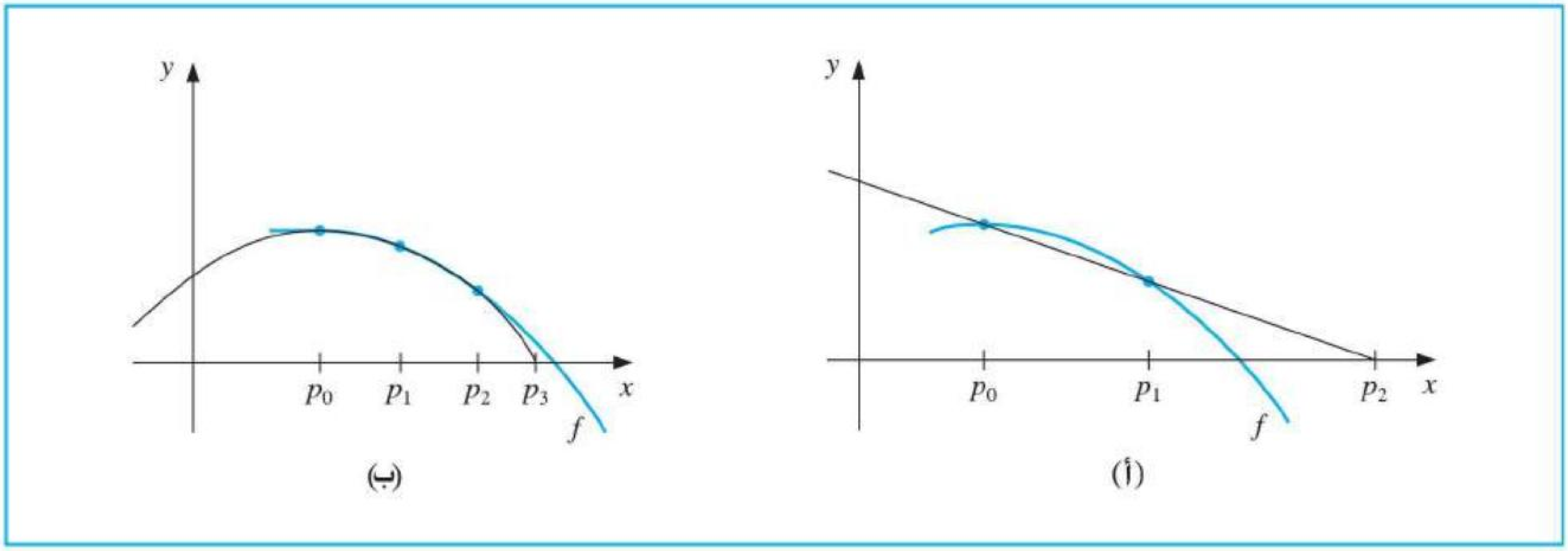
مبرهنة 19.2 إذا كان $z = a + bi$ صفرًا مركبًا مضاعفًا عدد m من المرات لكثيرة الحدود $P(x)$ ذات المعاملات الحقيقية فإنّ $\bar{z} = a - bi$ صفرًا مضاعفًا عدد m من المرات لكثيرة الحدود $P(x)$، وأن $(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^m$ قاسم لكثيرة الحدود $P(x)$. ■

إن طريقة مولر شبيهة بطريقة القاطع. لكن طريقة القاطع تستخدم خطًا عبر نقطتين على المنحنى لتقريب الجذر. فإن طريقة مولر تستخدم القطع المكافئ عبر ثلاث نقاط على المنحنى لغرض التقريب.

يمكن تجزئة التجزئة التشبيهية المتضمنة كثيرات حدود تربيعية إلى عامل المتعدد تقريبًا ليكون أحد الحدود متعددًا تربيعيًا وجذوره المركبة تقريبات إلى جذور كثيرة الحدود الأصلية. لقد شُرِحَ هذا الأسلوب مع بعض التفصيلات في طبعتنا الثانية [BFR]. وبدلًا من الذهاب مع هذه الخطوط، سنأخذ الآن في الحسبان طريقةً عُرِضت لأول مرة من قبل D.E. Müller [Mu]، ويمكن استخدام هذا الأسلوب لأي مسألة بخصوص إيجاد الجذر، لكنها مفيدة لتقريب جذور متعددات الحدود حصريًا.

إن طريقة القاطع تبدأ بتقريبين ابتدائيين p_0 و p_1، وتحدد التقريب الآتي p_2 بوصفه تقاطع محور x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$. انظر شكل (12.2) (أ) تستخدم طريقة مولر ثلاثة تقريبات ابتدائية p_0 و p_1 و p_2، وتحدِّد التقريب الآتي p_3 مع الأخذ في الحسبان تقاطع محور x مع القطع المكافئ المارّ بـ $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$ انظر شكل (12.2) (ب).

شكل 12.2



إن برهان طريقة مولر تبدأ بافتراض كثيرة الحدود التربيعية

$$P(x) = a(x - p_2)^2 + b(x - p_2) + c$$

التي تمر بالنقاط $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$. من الممكن إيجاد قيم الثوابت a، b، c من الشروط

$$f(p_0) = a(p_0 - p_2)^2 + b(p_0 - p_2) + c \tag{15.2}$$

$$f(p_1) = a(p_1 - p_2)^2 + b(p_1 - p_2) + c \tag{16.2}$$

و

$$f(p_2) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \tag{17.2}$$

لتكون

$$c = f(p_2) \tag{18.2}$$

$$b = \frac{(p_0 - p_2)^2[f(p_1) - f(p_2)] - (p_1 - p_2)^2[f(p_0) - f(p_2)]}{(p_0 - p_2)(p_1 - p_2)(p_0 - p_1)} \quad (19.2)$$

و

$$a = \frac{(p_1 - p_2)[f(p_0) - f(p_2)] - (p_0 - p_2)[f(p_1) - f(p_2)]}{(p_0 - p_2)(p_1 - p_2)(p_0 - p_1)} \quad (20.2)$$

ولتحديد p_3 صفرًا لـ P؛ نطبق الصيغة التربيعية على $P(x) = 0$. وعلى أي حال، وبسبب صعوبات تدوير الخطأ الناتجة من طرح الأرقام نفسها تقريبًا، نطبق الصيغة بالأسلوب الموضح في المثال (5) من الفصل (1.2) وهو

$$p_3 - p_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

تعطي هذه الصيغة احتمالين لـ p_3 اعتمادًا على الإشارة التي تسبق الحد المتطرف. في طريقة مولر، تُختار الإشارة لتتفق مع إشارة b، وسيجعل الاختيار وفق هذا الأسلوب المقام أعلى قيمة، مما سيؤدي إلى اختيار p_3 على أنها أقرب صفر إلى P مما هو مع p_2. وعندئذ

$$p_3 = p_2 - \frac{2c}{b + \text{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

حيث إن a،b،c معطاة في الصيغة (15.2).

وبمجرد تحديد p_3، تعاد العملية من بدايتها باستخدام p_1 و p_2 و p_3 بدلًا من p_0 و p_1 و p_2 لغرض تحديد التقريب الآتي p_4، وتستمر الطريقة حتى ظهور استنتاج مقبول. وفي كل خطوة تتضمن الطريقة قيمة متطرفة لـ $\sqrt{b^2 - 4ac}$، لذا فالطريقة تعطي جذور التقريب المركبة عندما $b^2 - 4ac < 0$. وتوضح الخوارزمية (8.2) هذه العملية.

ALGORITHM
الخوارزمية
8.2

خوارزمية مولر Müller's Algorthem

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع ثلاثة تقريبات p_0 و p_1 و p_2

المدخلات: p_0 و p_1 و p_2، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $h_1 = p_1 - p_0$ $h_2 = p_2 - p_1$ $\delta_1 = (f(p_1) - f(p_0))/h_1$ $\delta_2 = (f(p_2) - f(p_1))/h_2$ $d = (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1)$ $i = 3$
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 7 الآتية:
3	$b = \delta_2 + h_2 d$ $D = (b^2 - 4f(p_2)d)^{1/2}$ (ملحوظة: قد يتطلب طرائق حسابية مركبة).



4	إذا كان $\|b + D\| > \|b - D\|$ فضع $E = b + D$ وخلاف ذلك ضع $E = b - D$
5	ضع $h = -2f(p_2)/E$ $p = p_2 + h$
6	إذا كان $\|h\| < TOL$ فإن المُخرج (p) (كانت العملية ناجحة). توقف.
7	ضع $p_0 = p_1$ (رتب أمر التكرار الآتية :) $p_1 = p_2$ $p_2 = p$ $h_1 = p_1 - p_0$ $h_2 = p_2 - p_1$ $\delta_1 = (f(p_1) - f(p_0))/h_1$ $\delta_2 = (f(p_2) - f(p_1))/h_2$ $d = (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1)$ $i = i + 1$
8	المخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 =$ ', N_0) (لم تستكمل العملية بنجاح). توقف.

■

مثال 3 افترض كثيرة الحدود $f(x) = 16x^4 - 40x^3 + 5x^2 + 20x + 6$ باستخدام الخوارزمية (8.2) مع $TOL = 10^{-5}$ وقيم مختلفة لـ p_0 و p_1 و p_2 نحصل على النتائج في جدول (13.2).

جدول 13.2

أ.

$p_0 = 0.5, \quad p_1 = -0.5, \quad p_2 = 0$

i	p_i	$f(p_i)$
3	$-0.555556 + 0.598352i$	$-29.4007 - 3.89872i$
4	$-0.435450 + 0.102101i$	$1.33223 - 1.19309i$
5	$-0.390631 + 0.141852i$	$0.375057 - 0.670164i$
6	$-0.357699 + 0.169926i$	$-0.146746 - 0.00744629i$
7	$-0.356051 + 0.162856i$	$-0.183868 \times 10^{-2} + 0.539780 \times 10^{-3}i$
8	$-0.356062 + 0.162758i$	$0.286102 \times 10^{-5} + 0.953674 \times 10^{-6}i$

ب.

$p_0 = 0.5, \quad p_1 = 1.0, \quad p_2 = 1.5$

i	p_i	$f(p_i)$
3	1.28785	-1.37624
4	1.23746	0.126941
5	1.24160	0.219440×10^{-2}
6	1.24168	0.257492×10^{-4}
7	1.24168	0.257492×10^{-4}

ج.

$p_0 = 2.5, \quad p_1 = 2.0, \quad p_2 = 2.25$		
$f(p_i)$	p_i	i
-0.611255	1.96059	3
0.748825×10^{-2}	1.97056	4
-0.295639×10^{-4}	1.97044	5
-0.259639×10^{-4}	1.97044	6

لقد استخدمنا طريقة مابل Maple لتوليد الفقرة (أ) من جدول (13.2). ولعمل ذلك، عرفنا الدّالة $f(x)$ والتقريب الابتدائي بحسب

```
>f:=x->16*x^4-40*x^3+5*x^2+20*x+6
>p0:=0.5;  p1:=-0.5;  p2:=0.0
```

وقد حسبنا كثيرة الحدود عند القيم الابتدائية

```
>f0:=f(p0);  f1:=f(p1);  f2:=f(p2)
```

وحسبنا $a = 9$ ،$b = 10$ ،$c = 6$ و $p_3 = -0.5555555558 + 0.5983516452i$ مستخدمين صيغ طريقة مولر

```
>c:=f2
>b:=((p0-p2)^2*(f1-f2)-(p1-p2)^}2*(f0-f2))/((p0-p2)*(p1-p2)*(p0-p1))
>a:=((p1-p2)*(f0-f2)-(p0-p2)*(f1-f2))/((p0-p2)*(p1-p2)*(p0-p1))
>p3:=p2-(2*c)/(b+(b/abs(b))*sqrt(b^2-4*a*c))
```

وقد تولّدت القيمة p_3 مستخدمين طرائق الحساب المركبة كحساب

```
>f3:=f(p3)
```

الذي يعطي

$$f_3 = -29.40070112 - 3.898724738i$$

القيم الحقيقية لجذور الصيغة هي 1.241677، 1.970446، 0.356062− و $0.162758i \pm$ التي توضح دقة التقريبات من طريقة مولر. ■

يوضح المثال (3) أنه بإمكان طريقة مولر تقريب جذور كثيرة الحدود مع قيم ابتدائية متنوعة. وفي الواقع تتقارب طريقة مولر عمومًا إلى جذر كثيرة الحدود مع أي اختيار للتقريب الابتدائي، مع أنه بالإمكان إنشاء مسائل لا يحدث معها مثل هذا التقارب. افترض على سبيل المثال وعند قيمة معينة لـ i أنّ $f(p_i) = f(p_{i+1}) = f(p_{i+2}) \neq 0$. تختزل الصيغة التربيعية إذن إلى دالّة ثابت لاصفري، ولا يمكنه قطع محور x. ولا يمثّل هذا الحالة الاعتيادية على أي حال، وإن الغرض العام لبرمجيات تستخدم طريقة مولر تتطلب تقريبًا ابتدائيًّا واحدًا فقط لكل جذر، حتى إنها توفّر هذا التقريب بوصفه اختيارًا.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 6.2

1. أوجد التقريبات ضمن 10^{-4} للأصفار الحقيقية كلها لكثيرات الحدود الآتية مستخدمًا طريقة نيوتن:

أ. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$ ب. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

ج. $f(x) = x^3 - x - 1$ د. $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$

هـ. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ و. $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 4$

2. أوجد تقريبات ضمن 10^{-5} للأصفار جميعها ولكثيرات الحدود الآتية كلها من خلال إيجاد الأصفار الحقيقية باستخدام طريقة نيوتن أولًا، ثم اختزال كثيرات الحدود ذات الرتبة الدنيا لتحديد أي الأصفار مركبة:

أ. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136$

ب. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 16x - 40$

ج. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

د. $f(x) = x^5 + 11x^4 - 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5$

هـ. $f(x) = 16x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 76x - 240$

و. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5$

ز. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$

ح. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$

3. كرر التمرين (1) مستخدمًا طريقة مولر.

4. كرر التمرين (2) مستخدمًا طريقة مولر.

5. استخدم طريقة نيوتن ضمن 10^{-3} لإيجاد الأصفار والنقاط الحرجة للدّوال الآتية، استخدم هذه المعلومات لرسم منحنى لـ f:

أ. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12$ ب. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$

6. $f(x) = 10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - 0.21141 = 0$ له جذر عند $x = 0.29$. استخدم طريقة نيوتن مع تقريب ابتدائي $x_0 = 0.28$ لمحاولة إيجاد هذا الجذر. وضِّح ماذا يحدث.

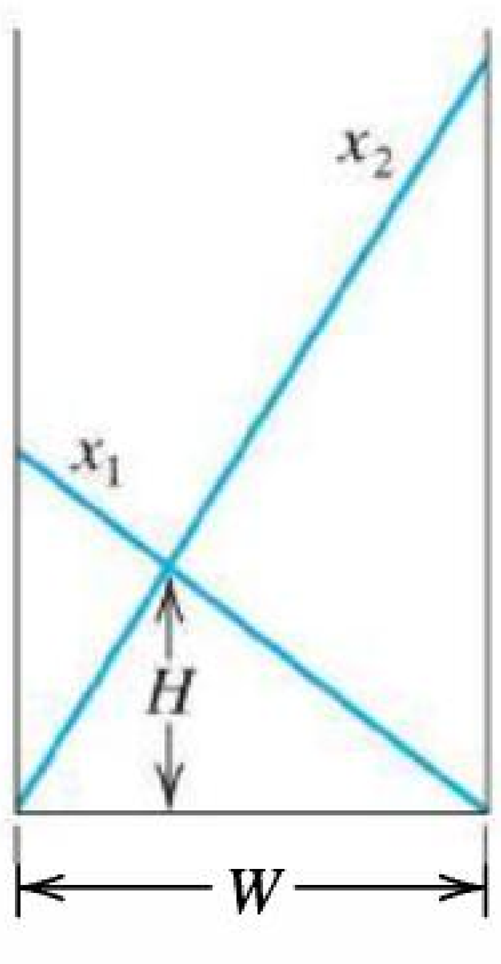
7. استخدم الطرائق الآتية كلها لإيجاد حل دقيق ضمن [0.1, 1] لحد 10^{-4} لـ

$$600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x - 1 = 0$$

أ. طريقة التنصيف ب. طريقة نيوتن ج. طريقة القاطع

د. طريقة الموقع الفاشل هـ. طريقة مولر

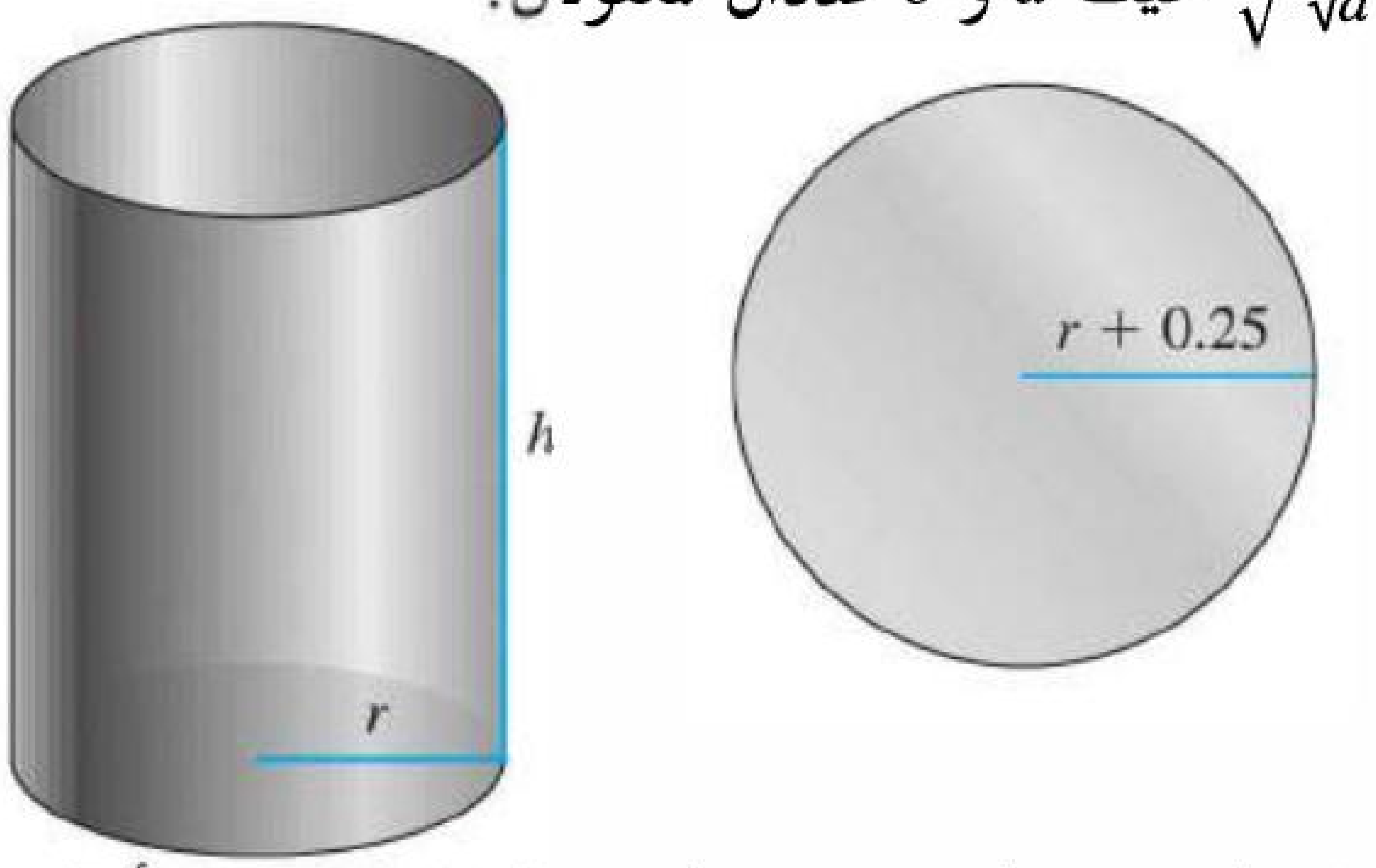
8. يتقاطع اثنان من السلالم بين جدارين، المسافة بينهما W على صورة الشكل المجاور على أن يمتد كل منهما من أساس أحد الجدران إلى نقطة في الجدار الآخر. ويتقاطع السلّمان على ارتفاع H من الأرضية. أوجد W إذا علمنا أن طول السلالم $x_1 = 20$ ft و $x_2 = 30$ ft وأن $H = 8$ ft.



9. علبة على شكل أسطوانة دائرية مطلوب تصميمها لتتسع لـ $1000\ cm^3$، ويجب أن يكون نصف قطر القمة والقاعدة كلاهما أكثر من نصف قطر العلبة الدائرية للعلبة بمقدار 0.25 cm كي تستخدم هذه الزيادة لغرض اللحام مع جانب العلبة. ويجب أن تكون الطبقة المعدنية المستخدمة في جانب العلبة أيضًا بطول يزيد 0.25 cm على طول محيط العلبة لغرض اللحام. أوجد ضمن

10^{-4} أقل كمية من المعدن نحتاج إليها لصنع هذه العلبة.

10. واجه فيبوناشي تحديًا رياضيًّا في عام 1224 ضد جون بالرمو بحضور الإمبراطور وحيدرك الثاني؛ فقد جد جذر الصيغة $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. وقد أثبت أولًا أن الصيغة ليس لها جذور معقولة ولا جذر إقليدي معقول. بمعنى أنه لا جذر لأيٍّ من الصيغ $a \pm \sqrt{b}$، $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$، $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ أو $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ حيث a و b عددان معقولان.



وبعد ذلك قرّب الجذر الحقيقي الوحيد، ربما عن طريق استخدام أسلوب جبري لعمر الخيام متضمنًا تقاطع دائرة مع قطع مكافئ، وكان جوابه معطى بنظام العدد ذي القاعدة الستينية وهو

$$1 + 22\left(\frac{1}{60}\right) + 7\left(\frac{1}{60}\right)^2 + 42\left(\frac{1}{60}\right)^3 + 33\left(\frac{1}{60}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{60}\right)^5 + 40\left(\frac{1}{60}\right)^6$$

ما أعظم دقة تقريبية؟

7.2 مسح الطرائق والبرمجيات
Survey of Methods and Software

في هذا الباب وجدنا حل الصيغة $f(x) = 0$، حيث إن f عبارة عن دالّة متصلة. وتبدأ الطرائق جميعها بتقريب ابتدائي وتوليد متتالية تتقارب إلى جذر الصيغة، في حال كون الطريقة ناجحة. فإذا كانت $[a, b]$ فترة ما حيث $f(a)$ و $f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان، فإنّ طريقة التنصيف وطريقة الموقع الفاشل ستتقارب. وعلى أي حال، فإن تقارب هذه الطرائق قد يكون بطيئًا. ويحصل التقارب الأسرع باستخدام طريقة القاطع أو طريقة نيوتن عمومًا. التقريبات الابتدائية الجيدة مطلوبة لهذه الطرائق بواقع اثنين لطريقة القاطع وواحد لطريقة نيوتن، حيث يمكن استخدام طريقة التنصيف وطريقة الموقع الفاشل بوصفها طرائق بداية تمهيدًا لطريقة القاطع أو طريقة نيوتن.

وستعطي طريقة مولر تقاربًا سريعًا دون وجوب التقريب الابتدائي الجيد، وهي ليست ذات كفاءة تماثل كفاءة طريقة نيوتن، حيث إن رتبة تقاربها مع الجذر هي $\alpha = 1.84$ مقارنة بطريقة نيوتن التربيعية من الرتبة $\alpha = 2$.

على أي حال، إنها أفضل من طريقة القاطع، حيث إن مرتبتها $\alpha = 1.62$، ولها مزية مضافة لكونها قادرة على تقريب الجذور المركبة.

يُستخدم الانكماش مع طريقة مولر عمومًا حالما يكون جذر التقريب لكثيرة الحدود قد حدّد. وبعد ذلك استُخدمت طريقة مولر أو نيوتن في كثيرة الحدود الأصلية مع هذا الجذر بافتراض أنه تقريب ابتدائي. سيضمن هذا الإجراء كون الجذر الذي قُرّب عبارة عن حل للصيغة الحقيقية وليس لصيغة الانكماش. ونحن نوصي بطريقة مولر لإيجاد أصفار متعددات الحدود كلها سواءً أكانت حقيقية أم مركبة. ويمكن استخدام طريقة مولر في دالّة متصل غير منهجي أيضًا.

وتوجد طرائق أخرى متوفرة ذات رتبة عالية لتحديد جذور متعددات الحدود. فإذا كان هذا الموضوع يثير اهتمامًا خاصًّا، فإنّنا نوصي بإعطاء اهتمام لطريقة لاكوير التي تعطي تقاربًا تكعيبيًّا وتقرب الجذور المركبة أيضًا (لاحظ [Ho, pp. 176–179] لشرحٍ كامل) طريقة جنكنز–تراوب (لاحظ [JT]) وطريقة برنت. (لاحظ [Bre]).

وتوجد طريقة أخرى ذات أهمية هي طريقة كوشي، وهي مشابهة لطريقة مولر، لكنها تتحاشى مسألة فشل طريقة مولر حينما تكون $f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2})$ عند قيمة ما لـ i. ولشرح هذه الطريقة شرحًا مهمًّا مع تفصيلات أكثر لطريقة مولر؛ نوصي بـ ([YG, Sections 4.10, 4.11, and 5.4].

ولدالّة محددة f مع حد سماح؛ فثمة برنامج كفؤ يعطي حلًّا واحدًا أو أكثر لـ $f(x) = 0$ تقريبًا، وكلٌّ له خطأ مطلق أو نسبي ضمن حد السماح، ويجب توليد النتائج في زمن مناسب. وإذا لم ينفذ البرنامج هذه المهمة يتعيَّن عليه إعطاء توضيح ذي معنى مقابل عدم تحقّق النجاح ومؤشر لكيفية معالجة سبب الفشل.

إن البرنامج الفرعي **ZANLY - IMSL FORTRAN** يستخدم طريقة مولر مع انكماش لتقريب عدد من جذور $f(x) = 0$. ويستخدم البرنامج **ZBREN** المنسوب إلى برنت مزيجًا من استيفاء داخلي خطي واستيفاء خارجي معكوس يشبه طريقة مولر وطريقة التنصيف. إنها تتطلب وصف فترة $[a, b]$ تتضمن جذرًا.

والبرنامج **(IMSL C f-zeros-fcn)** وبرنامج **(ZREAL FORTRAN)** يستندان إلى تغير طريقة مولر وأصفار التقريب لدالّة حقيقية f عندما لا تتوفر سوى تقريبات ابتدائية ضعيفة. برامج إيجاد أصفار متعددات الحدود هي **C f-zeros-poly** و **FORTRAN - ZPORC** التي تستخدم طريقة جنكنز – تراوب لإيجاد أصفار كثيرة حدود حقيقية **ZPLRC** التي تستخدم طريقة لاكوير لإيجاد أصفار كثيرة حدود حقيقية، وبرنامج **C c-zeros-poly** و **FORTRAN - ZPOCC** الذي يستخدم طريقة جنكنز– تراوب لإيجاد أصفار كثيرة حدود مركبة.

تستخدم البرامج الفرعية **NAG C C05adc** و **NAG FORTRAN C05ADF** و **C05AZF** مزيجًا من طريقة التنصيف واستيفاء داخلي خطي واستيفاء خارجي لتقريب صفر حقيقي لـ $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$. البرنامج الفرعي **C05AGF** مشابه لـ **C05ADF** لكنه يتطلب قيمة واحدة للبدء بدلًا من الفترة ويعيد فترة تتضمن جذرًا. ويستخدم البرنامجان الفرعيان **NAG FORTRAN C05AJF** و **C05AXF** طريقة اتصال مع تكرار القاطع لتقريب الصفر الحقيقي للدالّة. وتزود **NAG** أيضًا برنامجين فرعيين **C02AGF** و **C02AFF** لتقريب أصفار كثيرة الحدود الحقيقية أو المركبة جميعها على التوالي. ويستخدم كلا البرنامجين طريقة لاكوير المختزلة لإيجاد جذور كثيرة الحدود.

والبرنامج الفرعي **FORTRAN fzero.f** يستخدم مزيجًا من طريقتي التنصيف والقاطع المطورتين

من قبل دكر T.J. Dekker لتقريب صفر حقيقي لـِ $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$. إنه يتطلب تحديد فترة تتضمن جذرًا، وتعيد فترة بعمق يتناسب مع حد سماح معلوم. والبرنامج الفرعي **FORTRAN sdzro.f** يستخدم مزيجًا من طريقة التنصيف واستيفاء داخلي واستيفاء خارجي لإيجاد صفر حقيقي لـ $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$. ويمكن استخدام البرنامجين **rpzero** و **cpzero** لتقريب كل أصفار كثيرة الحدود الحقيقية أو المركبة على التوالي. وتستخدم كلتا الطريقتين طريقة نيوتن لأنظمة سنتناولها في الباب العاشر. البرامج كلها معطاة بصيغة الدقة الفردية والمزدوجة. وهذه الطرائق متوفرة في الإنترنت من **netlib** على الموقع **http://www.netlib.org/slatec/src**.

وضمن **MATLAB**، تستخدم الدّالة **ROOTS** لحساب الجذور كلها الحقيقية والمركبة لكثيرة الحدود. ويحسب دالّة غير منهجي **FZERO** جذرًا قريبًا لتقريب ابتدائي محدد ضمن حد سماح محدد. ولدى **Maple** العملية **fsolve** لإيجاد جذور الصيغ. وعلى سبيل المثال

```
>fsolve(x^2 - x - 1, x);
```

تعيد الأرقام 6180339887.– و 1.618033989 ويمكنك تحديد متغير أيضًا وفترة للبحث. على سبيل المثال

```
>fsolve(x^2 - x - 1,x,1..2);
```

تعيد العدد 1.618033989 فقط. ويستخدم الأمر **fsolve** أساليب متخصصة متنوعة تعتمد على صيغة معينة للصيغة أو لنظام من الصيغ.

لاحظ أنه على الرغم من تنوع الطرائق، فالبرامج المكتوبة بمهنية تستند أساسًا إلى الطرائق والأسس التي نتناولها في هذا الباب. ويجب أن تكون قادرًا على استخدام هذه البرامج بقراءة الأدلة المرفقة معها لاستيعاب معلمات النتائج الحاصلة وتوصيفاتها.

تتوافر ثلاثة كتب كلاسيكية في حل الصيغ اللاخطية. وهي من إعداد Traub [Tr] و Ostrowski [Os] و Householder [Ho] وبالإضافة إلى كتاب Brent [Bre] الذي يعدّ أساسًا لطرائق إيجاد الجذر التي تستخدم حاليًا.

صفحة فارغة كما هو موضح في النص الأصلي

الباب 3

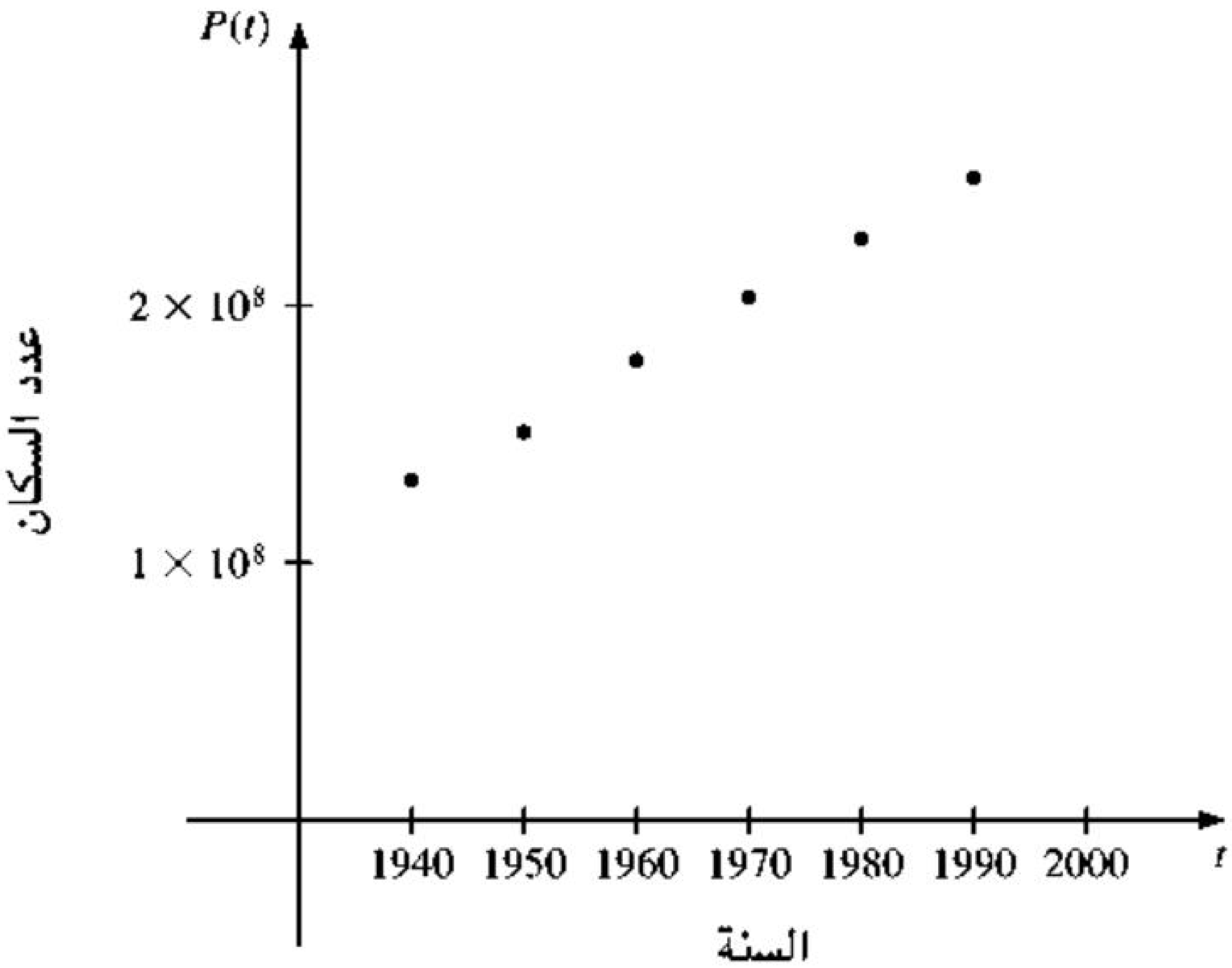
الاستكمال الداخلي وتقريب كثيرات الحدود

Interpolation and Polynomial Approximation

مقدمة

يجري تعداد السكان في الولايات المتحدة كل عشر سنوات. ويبين الجدول الآتي عدد السكان (بالآلاف) ما بين **1940** و **1990**.

1990	1980	1970	1960	1950	1940	السنة
249,633	226,542	203,302	179,323	151,326	132,165	عدد السكان بالآلاف



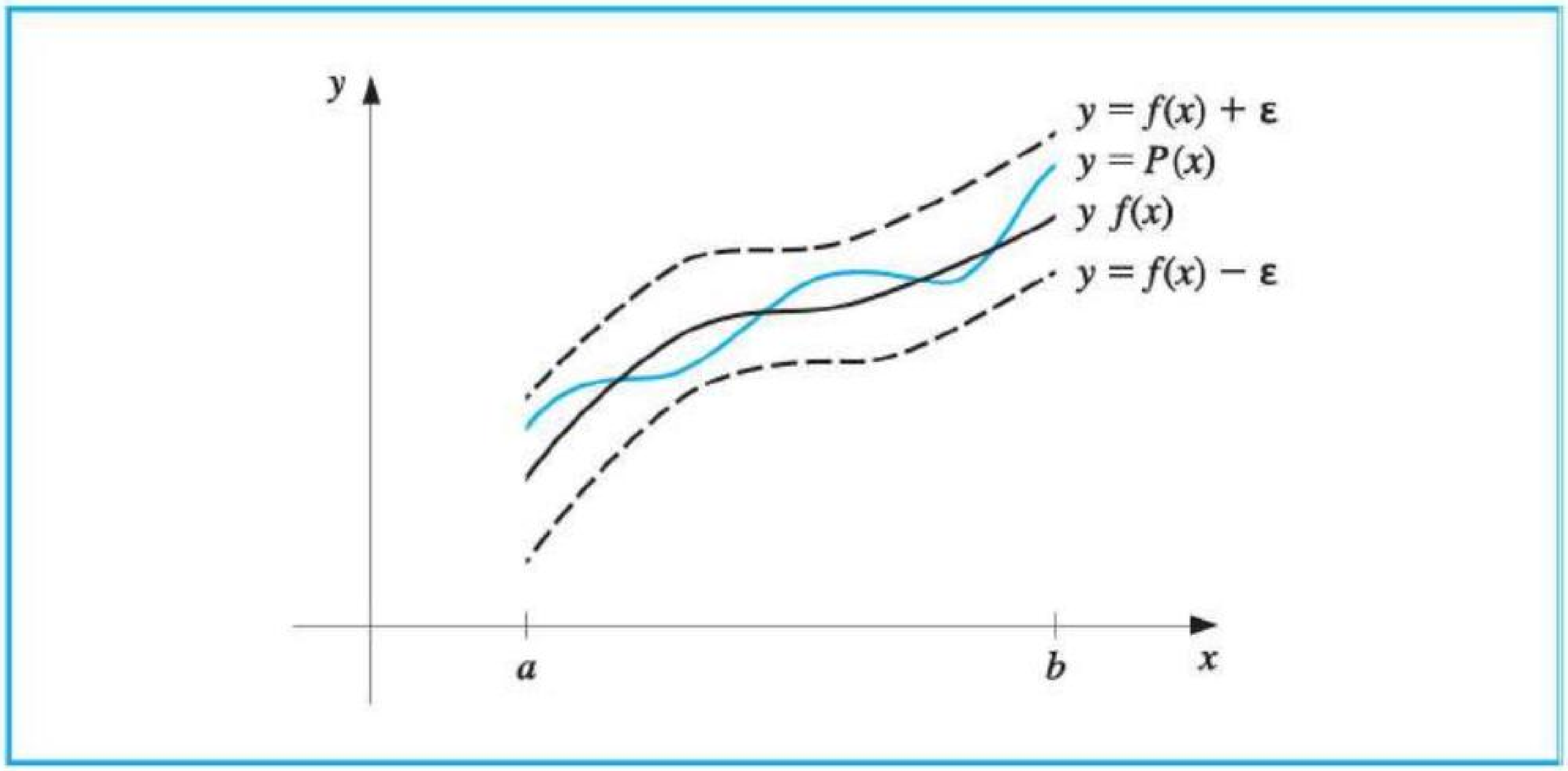
وقد نتساءل عند دراسة هذه البيانات ما إذا كان يمكن استخدامها لإعطاء تقريب مناسب لعدد السكان عام 1965 أو حتى سنة 2010 مثلًا. ويمكن إيجاد تنبؤات من هذا النوع مستخدمين دالّة تتناسب مع البيانات. وتسمى هذه العملية "استكمالًا أو استكمالًا داخليًّا – *interpolation*" وهو موضوع هذا الباب. وقد أخذت مسألة تعداد السكان هذه في الحسبان ضمن هذا الباب وفي التمارين: (28) من الفصل (1.3)، و (18) من الفصل (2.3) و (28) من الفصل (4.3).

وأحد صنوف الدّوال المشهورة والتي تخدم هدفنا في هذا الباب، والتي كل من مجالها ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية، هو صنف كثيرات الحدود الجبرية التي تأخذ الصورة:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث تمثّل n عدد صحيح غير سالب و $a_0, \ldots, a_n$ معاملات حقيقية. وأحد أسباب أهميتها كونها تقرب الدّوال المتصلة بانتظام. خذ أي دالّة معرفة ومتصلة على فترة محددة ومغلقة، عندئذ توجد كثيرة حدود تقترب من الدّالة المعطاة وعلى النحو المطلوب. وهذه النتيجة يعبر عنها تحديدًا في المبرهنة الآتية. (انظر شكل 1.3)

شكل 1.3



مبرهنة 1.3 مبرهنة تقريب ڤيرستراس Weierstrass Approximation Theorem

لتكن f دالّة معرفة ومتصلة على الفترة $[a, b]$. عندئذ، لكل $\varepsilon > 0$، توجد كثيرة حدود $P(x)$ تحقق $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ لكل x في الفترة $[a, b]$. يمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في غالبية المراجع الابتدائية في التحليل الحقيقي. (انظر [Bart, pp. 165–172]) هناك سبب مهم آخر للتعامل مع فئة كثيرات الحدود في تقريب الدّوال هو كون الاشتقاق والتكامل اللامنتي لكثيرة الحدود سهل التحديد، وتكون نفسها كثيرة الحدود أيضًا. ولهذه الأسباب، تستخدم كثيرات الحدود لتقريب الدّوال المتصلة غالبًا.

لقد تناولنا كثيرات حدود تايلور في الباب الأول من هذا الكتاب، حيث وصفت كأنها أحد الأركان الجوهرية في إنشاء التحليل العددي، وقد تفترض أن تقدير كثيرة الحدود يزيد في استخدام هذه الدّوال بناءً على ذلك.

إن كثيرات حدود تايلور تتفق وبأكبر اقتراب ممكن مع دالّة ما في نقطة محددة، ولكنها تركز دقتها قريبًا من النقطة. وكثيرة حدود الاستكمال الداخلي الجيد تحتاج إلى إعطاء تقريب دقيق على طول الفترة نسبيًا، وإن كثيرات حدود تايلور لا تقدم ذلك عمومًا، افترض أننا نحسب أول ست كثيرات حدود تايلور حول $x_0 = 0$ لـ $f(x) = e^x$ على سبيل المثال.

كارل ڤيرستراس
karl weierstrass (1815-1897)
يدعى أحيانًا الأب للتحليل الحديث بسبب إصراره على الصرامة في عرض النتائج الرياضية. لقد كان أداتيًا في تطوير اختبارات لتقارب السلسلة وفي تحديد طرائق لتعريف أرقام لامنطقية بدقة. وكان أول من أوضح بأن الدالّة يمكن أن يكون مستمرًا أينما كان. ولكنه لا يمكن أن يكون قابلًا للاشتقاق. وهي نتيجة أذهلت بعض معاصريه.

القليل من أعمال ڤيرستراس قد نُشرت خلال حياته، ولكن محاضراته وخصوصًا حول نظرية الدّوال لها تأثير معنوي على جيل من التلاميذ بأجمعه .

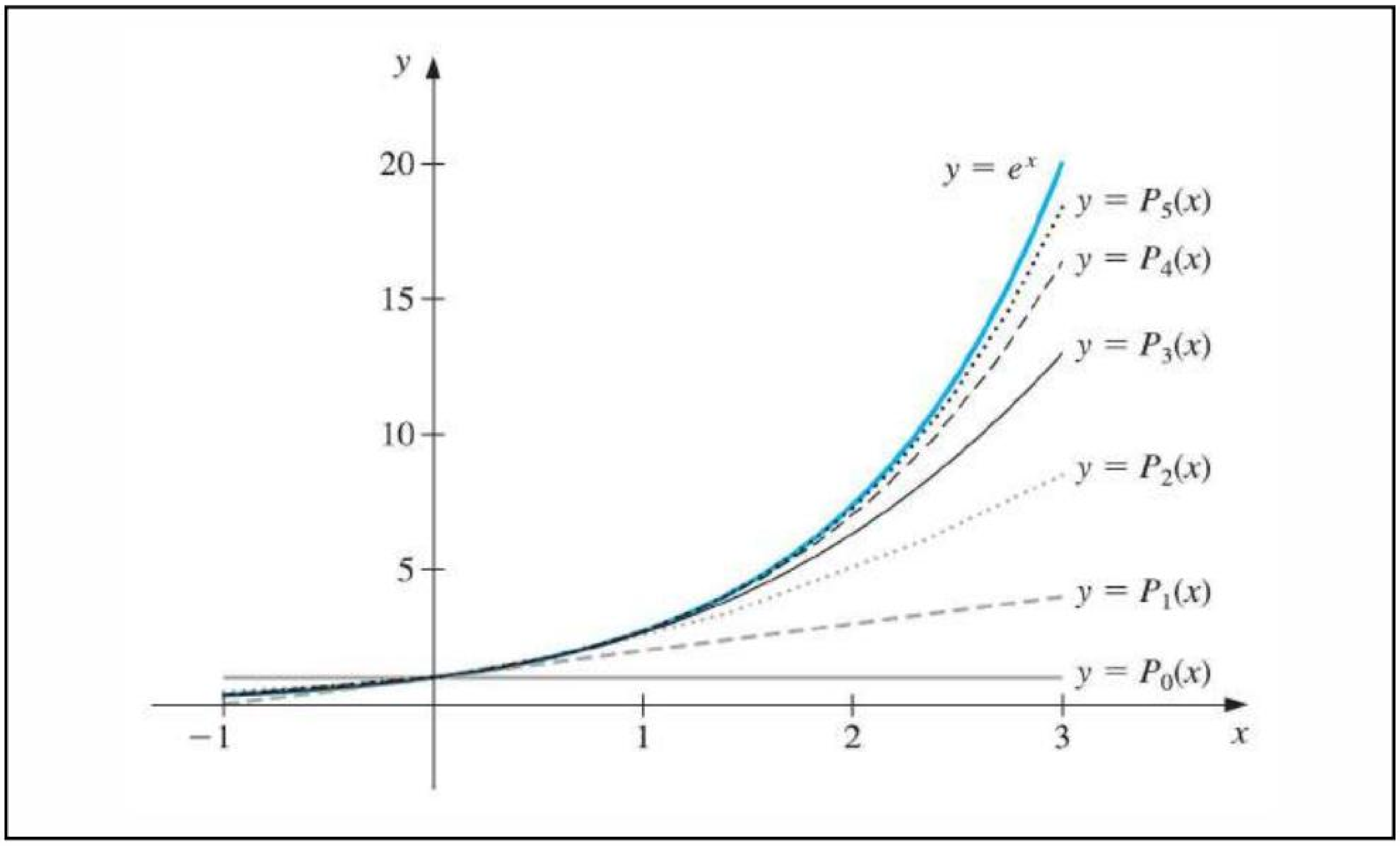
بما أن مشتقات $f(x)$ هي جميعها e^x حين حسابها عند $x_0 = 0$ تعطي القيمة 1، فإن كثيرات حدود تايلور هي:

$$P_0(x) = 1 \text{ ،} \quad P_1(x) = 1 + x \text{ ،} \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ ،} \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \quad \text{و} \quad P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

إن رسوم كثيرات الحدود موضحة في شكل (2.3). (لاحظ أنه كلما ابتعدنا عن الصفر يغدو الخطأ أسوأ تدريجيًّا حتى مع كثيرات الحدود برتب عالية).

شكل 2.3



ومع الحصول على استكمال داخلي أحسن لـ $f(x) = e^x$ في حالة استخدام كثيرات حدود تايلور برتب عليا، فإن الحال ليس كذلك لكل الدّوال، لنفترض استخدام كثيرات حدود تايلور برتب مختلفة لـ $f(x) = 1/x$ ممتدة حول $x_0 = 1$ لتقريب $f(3) = \frac{1}{3}$، بوصفه مثالًا واضحًا على ذلك. وحيث إن

$$f(x) = x^{-1}, \; f'(x) = -x^{-2}, \; f''(x) = (-1)^2 2 \cdot x^{-3}$$

وعمومًا

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-k-1}$$

فإن كثيرات حدود تايلور تكون

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-1)^k$$

ونحصل على القيم في جدول (1.3) التي تشير إلى فشلٍ ذريع في تقريب $f(3) = \frac{1}{3}$ بحدود $P_n(3)$ لقيم متصاعدة لـ n. فعندما نقرب $f(3) = \frac{1}{3}$ بحدود $P_n(3)$ لقيم متصاعدة لِـ n،فإن

التقريب يصبح غير دقيق من الجانب التصاعدي، ويلاحظ ذلك من جدول (1.3) أيضًا.

جدول 1.3

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85

وبما أن كثيرات حدود تايلور تتميز بكون المعلومات المستخدمة جميعها في التقريب متمركزة عند نقطة منفردة x_0، فإنه ليس مستبعدًا لكثيرات الحدود هذه أن تعطي تقريبات غير دقيقة كلما ابتعدنا عن x_0. وهذا ما يجعل تقريب كثيرة حدود تايلور مقتصرًا على الحاجة إلى التقريب فقط عند نقاط قريبة لـ x_0. وللأغراض الحسابية المعتادة؛ فمن الأجدر استخدام طرائق تتضمن معلومات عند نقاط مختلفة، سنعتمدها فيما تبقى من هذا الفصل. إن الاستخدام الرئيس لكثيرات حدود تايلور ليس لأغراض التقريب، وإنما لاشتقاق أساليب عددية، ولتقريب الخطأ.

1.3 الاستكمال الداخلي وكثيرة حدود لاجرانج Interpolation and the Lagrange Polynomial

لما لم تكن كثيرات حدود تايلور مناسبة للاستكمال الداخلي، فهناك حاجة إلى طرائق بديلة. ونحصل في هذا الفصل على كثيرات حدود للتقريب تحدد بسهولة من خلال توصيف نقاط معينة على السطح وعبر أماكن وجوب مرورها بها.

إن مشكلة تحديد كثيرة حدود من الرتبة واحد تمرّ عبر نقاط مختلفة (x_0, y_0) و (x_1, y_1) هي نفسها عند تقريب الدّالة f، حيث $f(x_0) = y_0$ و $f(x_1) = y_1$ من خلال الاستكمال الداخلي بكثيرة حدود من الرتبة 1، أو الاتفاق مع قيم f عند النقط المعلومة.

بداية نعرّف الدّوال

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{و} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

ومن ثم نعرّف

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

وحيث إن

$$L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0,\ L_1(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad L_1(x_1) = 1$$

يكون لدينا

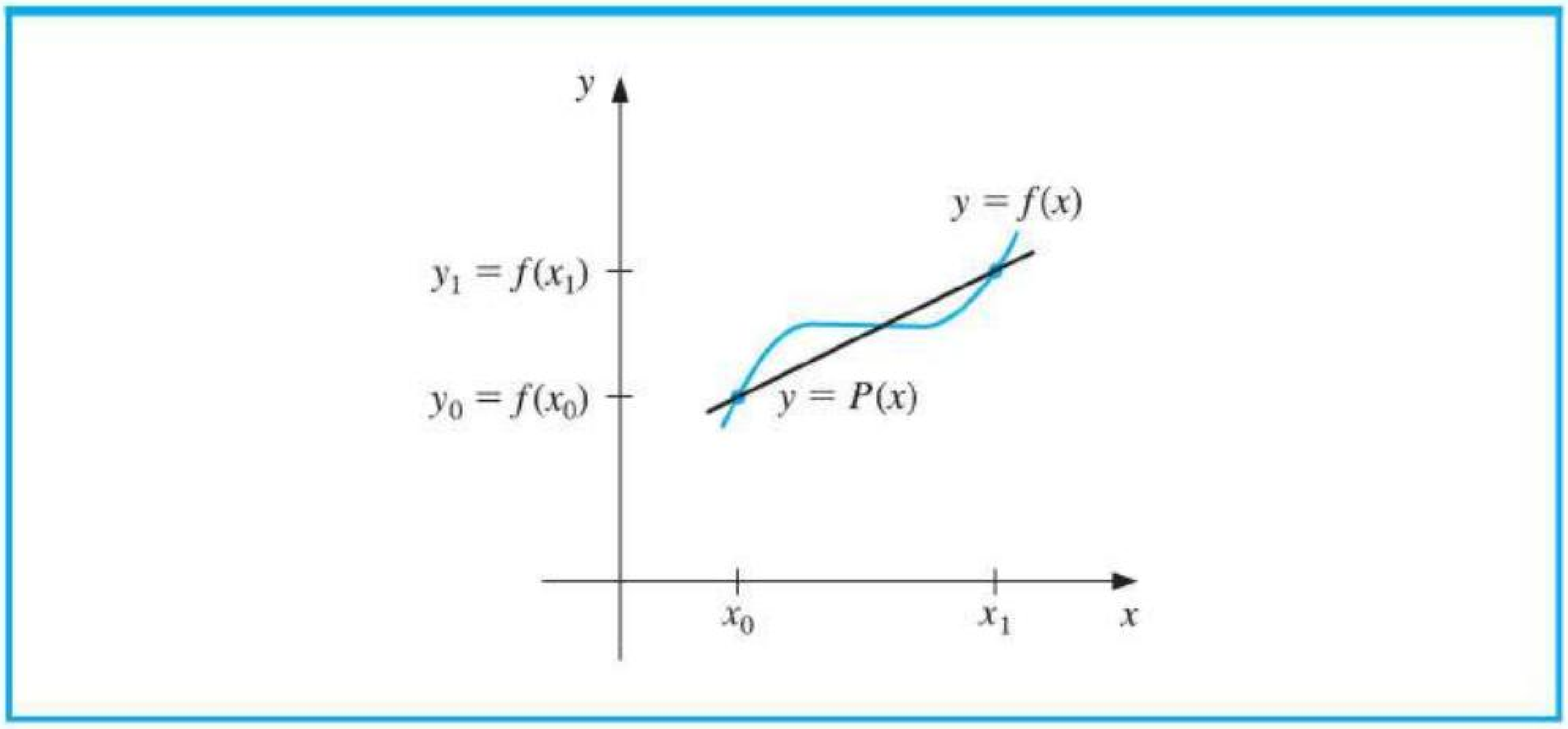
$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

و

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

وبذلك فإن P هي الدّالة الخطية الوحيدة التي تمرّ عبرها (x_0, y_0) و (x_1, y_1). (انظر شكل 3.3).

شكل 3.3

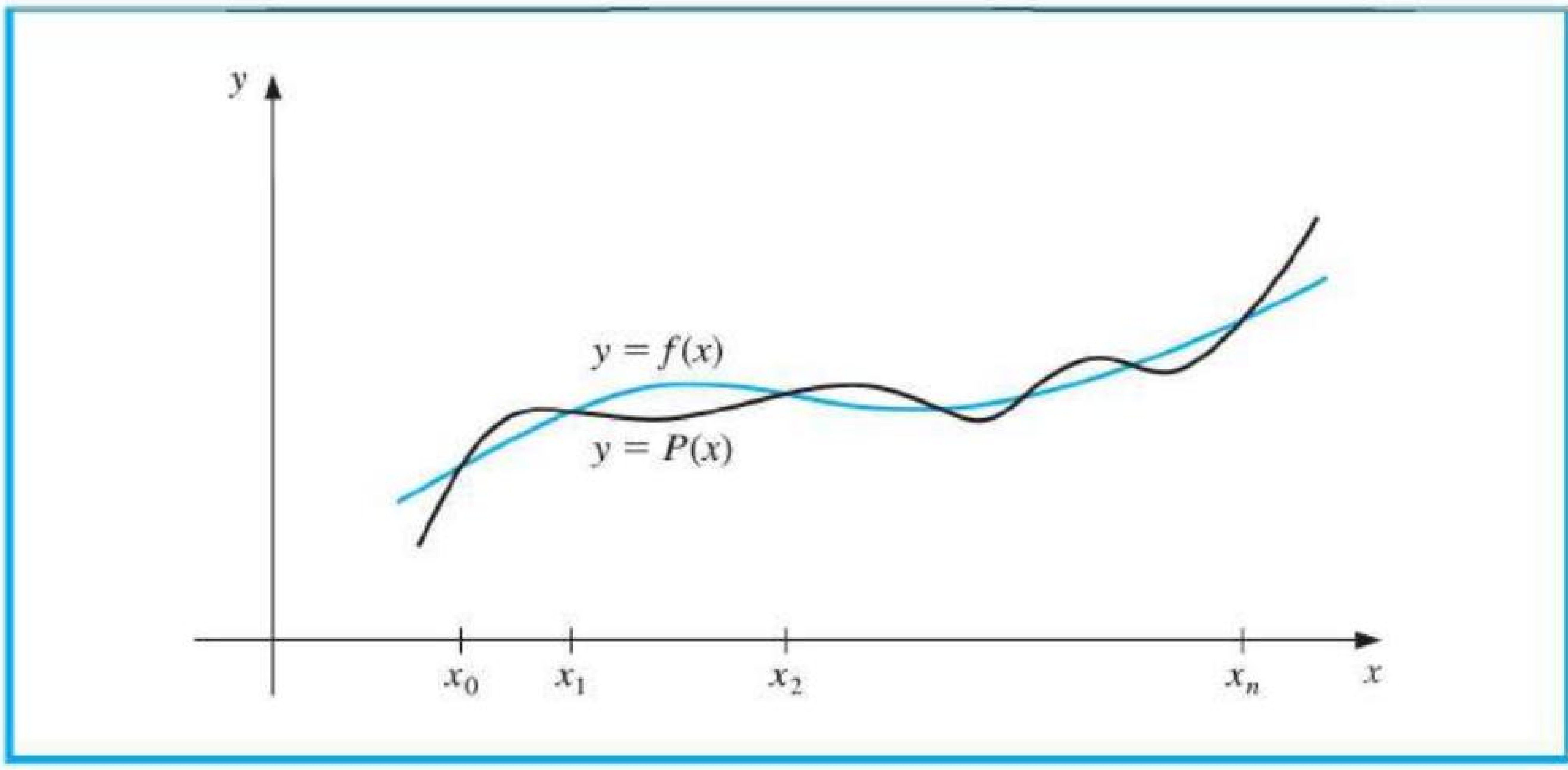


لتعميم مفهوم الاستكمال الداخلي الخطي؛ ندرس إنشاء كثيرة حدود رتبتها لا تزيد عن n، وتمر بعدد $n + 1$ من النقاط

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

(انظر شكل 4.3).

شكل 4.3



نحتاج في هذه الحالة إلى إنشاء، لكل $k = 0, 1, \ldots, n$، دالّة $L_{n,k}(x)$ مع خاصية كون $L_{n,k}(x_i) = 0$ عندما $i \neq k$ و $L_{n,k}(x_k) = 1$. ولتحقيق $L_{n,k}(x_i) = 0$ لكل $i \neq k$؛ يتطلب الأمر تضمين بسط $L_{n,k}(x)$ للمقدار

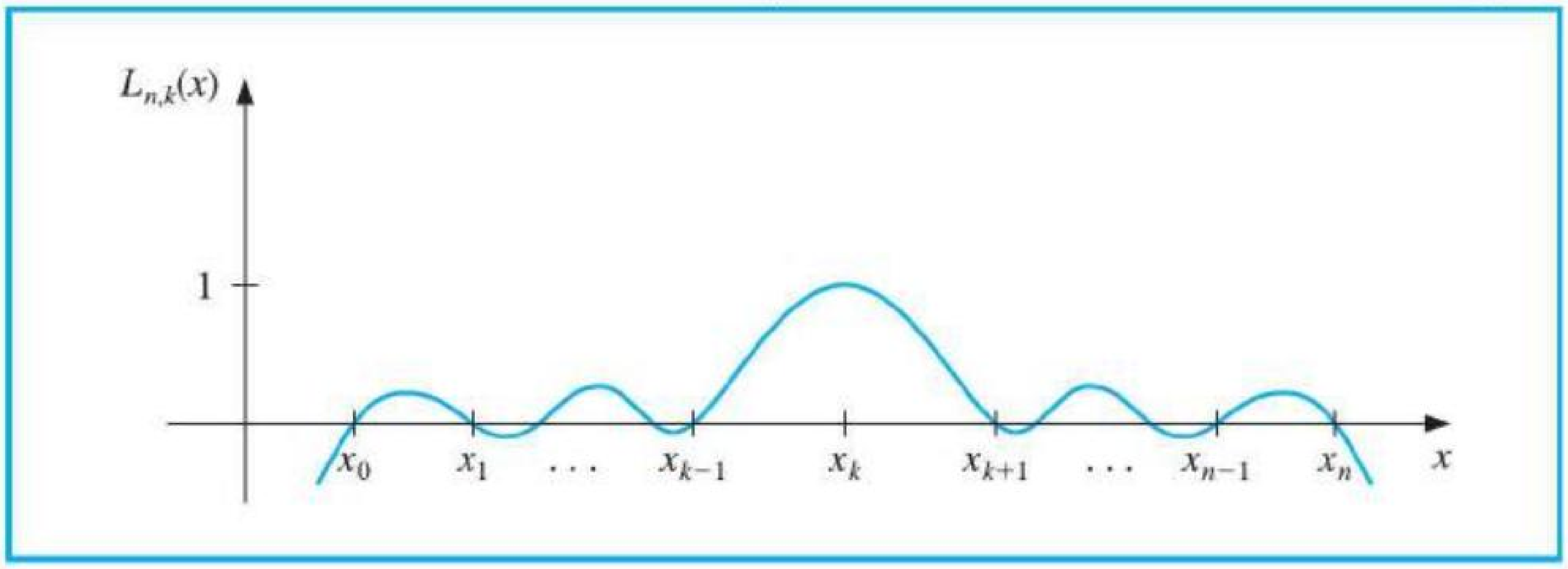
$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

ولتحقيق $L_{n,k}(x_k) = 1$؛ فإن بسط $L_{n,k}(x)$ يجب أن يساوي هذا المقدار عند $x = x_k$. وعندئذ

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

يوضح شكل (5.3) تخطيطًا لشكل $L_{n,k}$ النموذجي.

شكل 5.3



من السهولة توضيح كثيرة حدود الاستكمال الداخلي إذا ما عرفت صيغة $L_{n,k}$. وتدعى كثيرة الحدود هذه "كثيرة حدود لاجرانج النوني الاستكمال الداخلي **nth Lagrange interpolating polynomial**" وتعريفها ضمن المبرهنة الآتية.

مبرهنة 2.3 إذا كانت $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعدادًا مختلفة عددها $n+1$، وكانت f دالّة قيمها معطاة عند هذه الأعداد، فإنه يوجد كثيرة حدود وحيدة $P(x)$ لا تزيد رتبتها عن n، وتحقق

$$f(x_k) = P(x_k) \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

وكثيرة الحدود هذه هي

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x) \tag{1.3}$$

حيث إن لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ لدينا

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \tag{2.3}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

■

إن صيغة الاستكمال الداخلي المنسوبة إلى جوزيف – لويس لاجرانج Joseph - Louis Lagrange (1736 - 1813) كانت وكأنها معروفة من قبل إسحق نيوتن Isaac Newton نحو 1675. ولكن يبدو أنها قد نشرت أولا من قبل إدوارد وارينج (1736 - 1798) Edward waring في 1779. لاجرانج قد كتب على نحو واسع حول موضوع الاستكمال الداخلي. وكان عمله مثار اهتمام الرياضيين الأخيرين. لقد نشر هذه النتيجة عام 1795.

سنكتب $L_{n,k}(x)$ بصيغة $L_k(x)$ للسهولة حينما لا يوجد أي مشكلة بشأن درجته.

مثال 1 باستخدام الأعداد (أو النقاط) $x_0 = 2$ ، $x_1 = 2.5$ ، $x_2 = 4$ فإن إيجاد كثيرة حدود الاستكمال الداخلي الثاني لـ $f(x) = 1/x$ يتطلب منا تحديد معاملات كثيرات الحدود $L_0(x)$، $L_1(x)$، $L_2(x)$. وهي وفق الصيغة المتداخلة

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-6.5)x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

وحيث إن

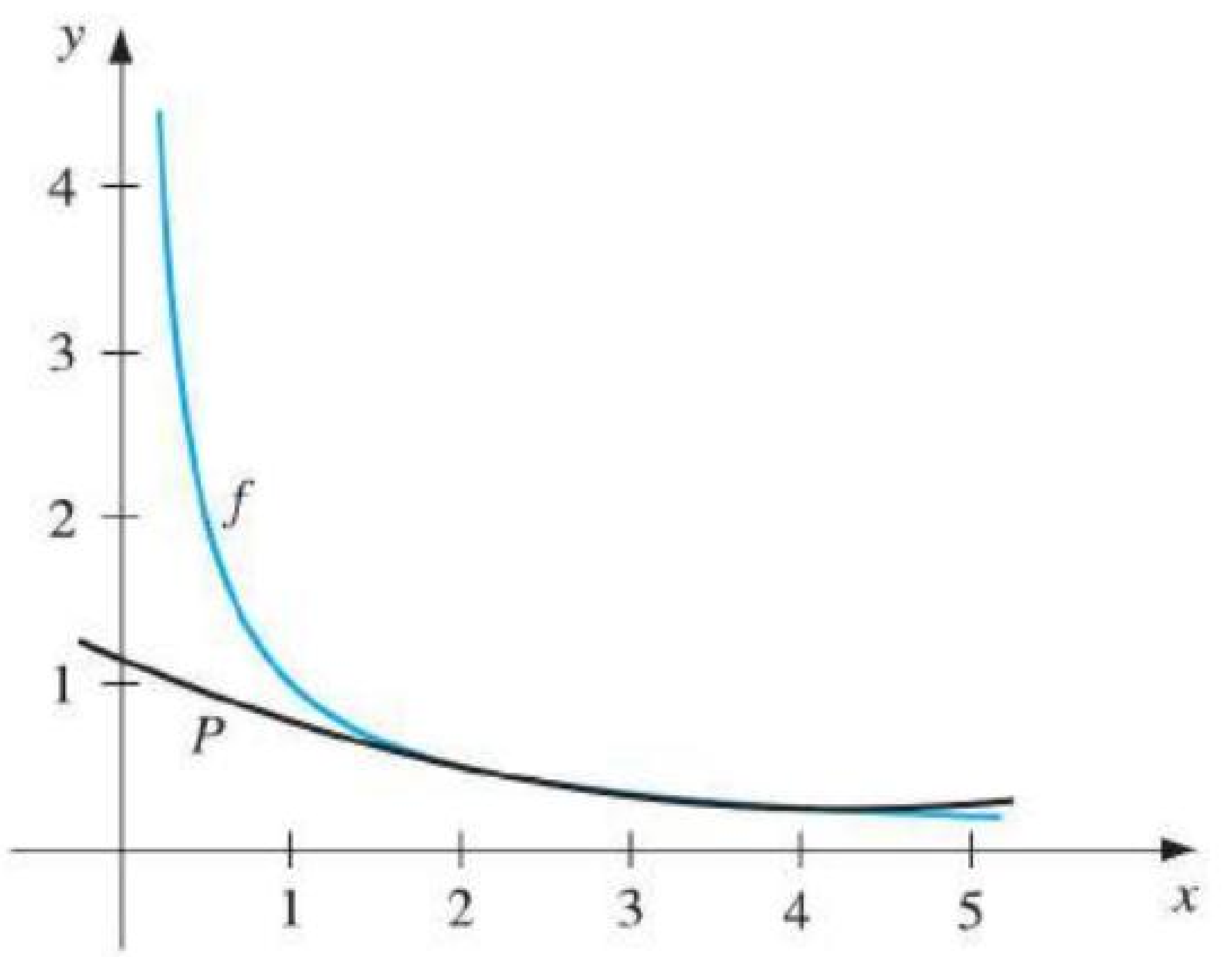
$f(x_0) = f(2) = 0.5$ ، $f(x_1) = f(2.5) = 0.4$ و $f(x_2) = f(4) = 0.25$

يكون لدينا

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_k(x)$$
$$= 0.5((x - 6.5)x + 10) + 0.4\frac{(-4x + 24)x - 32}{3} + 0.25\frac{(x - 4.5)x + 5}{3}$$
$$= (0.05x - 0.425)x + 1.15$$

والتقريب إلى $f(3) = \frac{1}{3}$ (انظر شكل 6.3) سيكون $f(3) \approx P(3) = 0.325$.

شكل 6.3



قارن هذا بجدول (1.3) في حال عدم إمكانية استخدام كثيرة حدود تايلور، ممتدة حول $x_0 = 1$، لتقريب معقول لـ $f(3) = \frac{1}{3}$. ■

يمكننا استخدام CAS لإنشاء كثيرة حدود استكمال داخلي. على سبيل المثال نستخدم في Maple

```
>interp(X,Y,x);
```

حيث يمثل X النقطة $[x_0, \ldots, x_n]$، ويمثل Y النقطة $[f(x_0), \ldots, f(x_n)]$، و x هو المتغير المستخدم. في هذا المثال يمكننا توليد كثيرة حدود استكمال داخلي

$P(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$ مع الأمر

```
>P:=interp([2,2.5,4],[0.5,0.4,0.25],x);
```

ولحساب $P(3)$ بوصفه تقديرًا لـ $f(3) = \frac{1}{3}$، أدخل

```
>subs(x=3,P);
```

الذي يعطي 0.325.

الخطوة الآتية هي حساب الحد المتبقي أو حد الخطأ الداخل في تقريب دالّة من خلال كثيرة حدود استكمال داخلي. لقد أُجري ذلك في المبرهنة الآتية.

مبرهنة 3.3 افترض أن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعداد مختلفة في الفترة $[a, b]$، وأن $f \in C^{n+1}[a, b]$. عندئذ لكل x ينتمي للفترة $[a, b]$، يوجد عدد $\xi(x)$ (عادة ما يكون غير معلوم) في الفترة (a, b) يحقق

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{3.3}$$

حيث إن $P(x)$ كثيرة حدود استكمال داخلي معطاة في الصيغة (1.3). ■

إن حد الخطأ لكثيرة حدود لاجرانج يمكن وصفها بطرائق أخرى، ولكن هذه الصيغة هي الأكثر فائدة والتي تتفق إلى حد كبير مع صيغة خطأ كثيرة حدود تايلور القياسية.

البرهان لاحظ أولًا أنه إذا كان $x = x_k$ لأي $k = 0, 1, \ldots, n$ فإن $f(x_k) = P(x_k)$ وإن اختيار $\xi(x_k)$ عشوائيًّا ضمن (a, b) سينتج الصيغة (3.3). وإذا كان $x \neq x_k$، لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ فعرّف الدّالة g لـ t ضمن $[a, b]$ من خلال

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\frac{(t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)} \\ &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \end{aligned}$$

ولأن $f \in C^{n+1}[a, b]$ و $P \in C^{\infty}[a, b]$، فإن $g \in C^{n+1}[a, b]$. ومع $t = x_k$ يكون لدينا

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(x_k - x_i)}{(x - x_i)} = 0 - [f(x) - P(x)]\cdot 0 = 0$$

وأكثر من ذلك

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(x - x_i)}{(x - x_i)} = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0$$

وأخيرًا $g \in C^{n+1}[a, b]$، و g صفر عند $n + 2$ من الأعداد المختلفة $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$.
ومن خلال مبرهنة رول المعممة، يوجد عدد ξ ضمن (a, b) حيث $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.
وبذلك

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)]\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}\right]_{t=\xi} \tag{3.4}$$

إن الاشتقاق من الرتبة $(n+1)$، $P^{(n+1)}(x)$، هو صفر بامتياز؛ لكون $P(x)$ دالّة من الرتبة n غالبًا، وأن $\prod_{i=0}^{n}[(t - x_i)/(x - x_i)]$ كثيرة حدود من الرتبة $(n+1)$ أيضًا، لذا

$$\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \left[\frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}\right]t^{n+1} + (\text{رتبة منخفضة في } t)$$

و $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$ تصبح الصيغة (4.3) الآن

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - P(x)]\frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

وبحل $f(x)$ يكون لدينا

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$ ■ ■ ■

تعدّ صيغة الخطأ المقدمة في مبرهنة (3.3) من النتائج النظرية المهمة، وذلك للاستخدامات الواسعة لكثيرات حدود لاجرانج في استنباط طرائق تفاضل وتكامل عددي. وتستخلص حدود الخطأ لهذه الأساليب من صيغة لاجرانج للخطأ.

لاحظ أن صيغة الخطأ لكثيرة حدود لاجرانج متشابهة إلى حدٍّ كبير مع مثيلتها لكثيرة حدود تايلور. ويجمع الحد النوني nth لكثيرة حدود تايلور حول x_0 المعلومات المتوفرة كلها عند x_0 وله حد خطأ من الصيغة

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

وتستخدم كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n معلومات عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ وبدلاً من $(x - x_0)^{n+1}$، فإن صيغة الخطأ تستخدم ضرب $n + 1$ من الحدود $(x - x_0), (x - x_1), \ldots, (x - x_n)$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

يقتصر الاستخدام الخاص لصيغة الخطأ هذه على تلك الدّوال التي لمشتقاتها حدود معلومة.

مثال 2

لنفترض أننا بصدد إنشاء جدول للدّالة $f(x) = e^x$ لـ x ضمن $[0, 1]$. نفترض أن عدد الخانات العشرية التي تعطى لكل إدخال هو $d \geq 8$، وأن الفرق بين قيمتين متجاورتين لـ x- (طول الخطوة) هو h. فماذا يجب أن يكون h في الاستكمال الخطي (ونعني كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة 1) ليعطي خطأً مطلقًا بحد أعلى 10^{-6}؟

لتكن $x_0, x_1, \ldots$ الأعداد التي تقيّم f عندها، و x ضمن $[0, 1]$، افترض j يحقّق $x_j \leq x \leq x_{j+1}$.

تؤدي الصيغة (3.3) إلى كون الخطأ في الاستكمال الخطي هو

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - x_j)(x - x_{j+1})\right| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2}|(x - x_j)||(x - x_{j+1})|$$

وحيث إن طول الخطوة هو h فإن $x_j = jh, x_{j+1} = (j+1)h$ و

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2!}|(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

وبذلك

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2}\max_{\xi\in[0,1]} e^{\xi} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

$$\leq \frac{1}{2}e \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

وبافتراض أن $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$ لـِ $jh \le x \le (j+1)h$، وباستخدام مبرهنة القيمة المتطرفة (انظر تمرين 32) سنجد أن

$$\max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| = \max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |g(x)| = \left| g\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)h\right)\right| = \frac{h^2}{4}$$

وبناءً على ذلك فإن الخطأ في الاستكمال الخطي محدد وفقًا لـِ

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{eh^2}{8}$$

ويكون مرضيًا لـِ h التي تختار لتحقّق

$$\frac{eh^2}{8} \le 10^{-6} \quad \text{وهذا يعني أن} \quad h < 1.72 \times 10^{-3}$$

ولوجوب كون $n = (1-0)/h$ عددًا صحيحًا، فهناك اختيار منطقي واحد لطول الخطوة هو $h = 0.001$. ■

ويوضح المثال الآتي استكمالًا داخليًّا لحالة ما بحيث لا يمكن فيها استخدام جزء الخطأ من الصيغة (3.3).

مثال 3

يتضمن جدول (2.3) قيم الدّالة عند نقاط مختلفة. وستقارن التقريبات لـِ $f(1.5)$ الناتجة من كثيرات حدود لاجرانج المختلفة. وحيث إن 1.5 تقع ما بين 1.3 و 1.6 فإن أنسب كثيرة حدود خطية تستخدم $x_0 = 1.3$ و $x_1 = 1.6$. وقيمة كثيرة حدود الاستكمال الداخلي عند 1.5 هي

جدول 2.3

$f(x)$	x
0.7651977	1.0
0.6200860	1.3
0.4554022	1.6
0.2818186	1.9
0.1103623	2.2

$$P_1(1.5) = \frac{(1.5-1.6)}{(1.3-1.6)}f(1.3) + \frac{(1.5-1.3)}{(1.6-1.3)}f(1.6)$$
$$= \frac{(1.5-1.6)}{(1.3-1.6)}(0.6200860) + \frac{(1.5-1.3)}{(1.6-1.3)}(0.4554022) = 0.5102968$$

ويمكن قبول اســتخدام اثنتين من كثيرات الحدود من الرتبة 2 إحداهما باســتخدام $x_0 = 1.3$، $x_1 = 1.6$، $x_2 = 1.9$ التي تعطي

$$P_2(1.5) = \frac{(1.5-1.6)(1.5-1.9)}{(1.3-1.6)(1.3-1.9)}(0.6200860) + \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.9)}{(1.6-1.3)(1.6-1.9)}(0.4554022)$$
$$+ \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.6)}{(1.9-1.3)(1.9-1.6)}(0.2818186) = 0.5112857$$

والأخرى باستخدام $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6$ وتعطي $\hat{P}_2(1.5) = 0.5124715$.

ويوجــد خيــاران مقبولان لكثيرة الحــدود في حالة الرتبــة الثالثة أيضًا، إحداهما باســتخدام $x_0 = 1.3, x_1 = 1.6, x_2 = 1.9, x_3 = 2.2$ وتعطي $P_3(1.5) = 0.5118302$. ونحصل على الآخر من خلال استخدام $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9$ وتعطي $\hat{P}_3(1.5) = 0.5118127$.

وتستخدم كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة الرابعة مدخلات الجدول جميعها. ومع

$$x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9, x_4 = 2.2$$

فإن التقريب هو $P_4(1.5) = 0.5118200$. وحيث إن $P_3(1.5)$, $\hat{P}_3(1.5)$, $P_4(1.5)$ تتفق جميعها ضمن 2×10^{-5} من الوحدات، فإننا نتوقع هذه الرتبة من دقة هذه التقريبات. ونتوقع أن يكون $P_4(1.5)$ أكثر التقريبات دقة أيضًا؛ لكونه يستخدم أغلب البيانات الموجودة.

والدّالة التي نحن بصدد تقريبها هي دالّة بيسيل من النوع الأول من الرتبة صفر، وقيمتها عند 1.5 معلومة وهي 0.5118277. لذا فإن الصورة الدقيقة للتقريبات هي كما يلي

$$|P_1(1.5) - f(1.5)| \approx 1.53 \times 10^{-3}$$
$$|P_2(1.5) - f(1.5)| \approx 5.42 \times 10^{-4}$$
$$|\hat{P}_2(1.5) - f(1.5)| \approx 6.44 \times 10^{-4}$$
$$|P_3(1.5) - f(1.5)| \approx 2.5 \times 10^{-6}$$
$$|\hat{P}_3(1.5) - f(1.5)| \approx 1.50 \times 10^{-5}$$
$$|P_4(1.5) - f(1.5)| \approx 7.7 \times 10^{-6}$$

وعلى الرغم من أن $P_3(1.5)$ هو التقريب الأدق إلا أنه لم تكن لدينا معلومات عن القيمة الحقيقية لـ $f(1.5)$، مما يجعلنا نقبل $P_4(1.5)$ على أنه أحسن تقريب؛ لكونه يتضمن أغلب البيانات حول الدّالة. إن حد خطأ لاجرانج المشتق ضمن المبرهنة (3.3) لا يمكن تطبيقه هنا؛ لعدم توفر معلومات عن المشتقة الرابعة لـ f. ولسوء الحظ؛ هذه هي الحالة عمومًا. ■

تكمن صعوبة استكمال لاجرانج الداخلي في صعوبة تطبيق حد الخطأ، وأخيرًا فإن رتبة كثيرة الحدود المطلوبة لدقة محددة لا تكون معروفة عمومًا حتى تُحدّد الحسابات. والإجراء المتبع هو أن نحسب النتائج المستخلصة من مختلف كثيرات الحدود حتى ظهور توافق مقبول، وقد أجري في المثال السابق أيضًا. وعلى أي حال فإن العمل المنجز في حساب التقريب من خلال كثيرة الحدود الثانية لا يقلل العمل المطلوب لحساب التقريب الثالث، وإن إيجاد التقريب الرابع ليس أسهل عندما يكون الثالث معلومًا، وهكذا. والآن سنشتق كثيرات حدود التقريب بأسلوب يستخدم الحسابات السابقة لمزايا أكبر.

تعريف 4.3 ليكن f دالّة معرّفة على $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$، وافترض أن $m_1, m_2, \ldots, m_k$ عبارة عن k من الأعداد الصحيحة المختلفة حيث $0 \le m_i \le n$ لكل i. سنرمز لكثيرة حدود لاجرانج التي تساوي $f(x)$ عند k من القيم $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}$ بالرمز $P_{m_1,m_2,\ldots,m_k}(x)$. ■

مثال 4 إذا كان $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6$ و $f(x) = e^x$ فإن $P_{1,2,4}(x)$ كثيرة الحدود التي تتوافق مع $f(x)$ عند $x_1 = 2, x_2 = 3, x_4 = 6$. أي أن

$$P_{1,2,4}(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}e^6 \quad ■$$

توضح النتيجة الآتية طريقة لتوليد تقريبات كثيرة حدود لاجرانج توليدًا متكررًا.

مبرهنة 5.3 لتكن الدّالة f معرفة عند $x_0, x_1, \ldots, x_k$، و x_j و x_i عددين مختلفين في هذه المجموعة. عندئذ

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

تصف كثيرة حدود لاجرانج من النوع k التي تستكمل f داخليًّا عند $k+1$ من النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_k$. ■

البرهان من أجل تسهيل الترميزات، ليكن $Q \equiv P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$ و $\hat{Q} \equiv P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}$. وحيث إن $Q(x)$ و $\hat{Q}(x)$ كثيرتا حدود من الرتبة $k-1$ أو أقل، فإن رتبة $P(x)$ هي k على الأكثر. وإذا كان $0 \le r \le k$ و $r \ne i, j$ فإن $Q(x_r) = \hat{Q}(x_r) = f(x_r)$،

لذا

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\hat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)}f(x_r) = f(x_r)$$

وأكثر من ذلك، حيث إن $\hat{Q}(x_i) = f(x_i)$ يكون لدينا

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\hat{Q}(x_i) - (x_i - x_i)Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)}f(x_i) = f(x_i)$$

وبالمثل حيث إن $Q(x_j) = f(x_j)$ يكون لدينا $P(x_j) = f(x_j)$. ولكن بحسب التعريف: هي كثيرة الحدود الوحيدة من الرتبة k على الأكثر مع f عند $x_0, x_1, \ldots, x_k$. وبذلك $P \equiv P_{0,1,\ldots,k}$.
■ ■ ■

تفيد المبرهنة (5.3) بأن كثيرات حدود الاستكمال الداخلي يمكن توليدها تكراريًّا، ويمكن توليدها على سبيل المثال وفق الأسلوب الظاهر في جدول (3.3)، حيث يستكمل كل صف قبل البدء بالصفوف الآتية:

جدول 3.3

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

نيفيل E. N. neville
أعطى هذا التعديل لصيغة لاجرانج ضمن ورقة [N] نشرت عام 1932.

تدعى هذه العملية "طريقة نيفيل Neville›s method". والصيغة P المستخدمة في الجدول (3.3) مشوشة؛ بسبب عدد المرافقات subscripts لتمثيل المضمون. لاحظ أنه بينما يبنى الصف، نحتاج إلى مرافقين فقط. والتقدم في الجدول نحو الأسفل يقابله استخدام النقاط المتتالية لـ x_i بصعود أكبر مع i، والتقدم في الجدول نحو اليمين يقابله زيادة رتبة كثيرة حدود الاستكمال الداخلي. وعند ظهور النقاط على نحو متتابع في الاتجاهين كليهما، فإننا نحتاج إلى توصيف نقطة بداية وعدد النقاط الإضافية المستخدمة في عمل التقريب فقط.

ولتجنُّب تعدد المرافقات في الترميز؛ ليكن $Q_{i,j}(x)$ لـ $0 \le j \le i$ تعبيرًا لكثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة j عند $(j+1)$ من الأعداد $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i$، أي أن

$$Q_{i,j} = P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1,i}$$

وباستخدام هذا الترميز لطريقة نيفيل نحصل على صف ترميزات Q في جدول (3.3).

مثال 5

استخرجت قيم كثيرات حدود الاستكمال الداخلي عند $x = 1.5$ في المثال (3) باستخدام بيانات أول عمودين من جدول (4.3)، قرّبنا $f(1.5)$ في هذا المثال باستخدام نتائج المبرهنة (5.3). فإذا كان $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9, x_4 = 2.2$

فإن $Q_{0,0} = f(1.0), Q_{1,0} = f(1.3), Q_{2,0} = f(1.6), Q_{3,0} = f(1.9), Q_{4,0} = f(2.2)$

هذه هي كثيرات الحدود الخمسة من الرتبة صفر (الثوابت) التي تقرب $f(1.5)$.

وبحساب تقريب الرتبة الأولى $Q_{1,1}(1.5)$ نحصل على

$$Q_{1,1}(1.5) = \frac{(x - x_0)\,Q_{1,0} - (x - x_1)\,Q_{0,0}}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{(1.5 - 1.0)\,Q_{1,0} - (1.5 - 1.3)\,Q_{0,0}}{1.3 - 1.0}$$
$$= \frac{0.5(0.6200860) - 0.2(0.7651977)}{0.3} = 0.5233449$$

وبالمثل

$$Q_{2,1}(1.5) = \frac{(1.5 - 1.3)(0.4554022) - (1.5 - 1.6)(0.6200860)}{1.6 - 1.3} = 0.5102968$$

$Q_{4,1}(1.5) = 0.5104270$ و $Q_{3,1}(1.5) = 0.5132634$

وأفضل تقريب خطي نتوقعه هو $Q_{2,1}$؛ لكون 1.5 تقع ما بين $x_1 = 1.3$ و $x_2 = 1.6$.

وبالأسلوب نفسه، فإن التقريبات باستخدام كثيرات حدود برتب أعلى هي

$$Q_{2,2}(1.5) = \frac{(1.5 - 1.0)(0.5102968) - (1.5 - 1.6)(0.5233449)}{1.6 - 1.0} = 0.5124715$$

$Q_{4,2}(1.5) = 0.5137361$ و $Q_{3,2}(1.5) = 0.5112857$

التقريبات برتب أعلى تنتج بالأسلوب نفسه ومبينة في جدول (4.3). ■

جدول 4.3

1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127	
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	0.5118302	0.5118200

فإذا كان آخر تقريب ليس بالدقة المطلوبة، يمكن اختيار نقطة أخرى x_5 ، وإضافة صف آخر للجدول وهو

$$x_5 \quad Q_{5,0} \quad Q_{5,1} \quad Q_{5,2} \quad Q_{5,3} \quad Q_{5,4} \quad Q_{5,5}$$

وبذلك فإن $Q_{4,4}, Q_{5,4}, Q_{5,5}$ يمكن مقارنتها لتحديد دقة أكثر.

الدّالة في المثال (5) هي دالّة بيسيل من النوع الأول لكل من الرتبة صفر، وقيمتها عند 2.5 هي -0.0483838 وهذا صف جديد من التقريبات لـ $f(1.5)$ وهو

$$2.5 \quad -0.0483838 \quad 0.4807699 \quad 0.5301984 \quad 0.5119070 \quad 0.5118430 \quad 0.5118277$$

والقيمة الأخيرة الجديدة 0.5118277 لحد المرتبة العشرية السابعة صحيحة.

مثال 6 يتضمن جدول (5.3) قيمًا دقيقةً لحد الخانات المبينة:

جدول 5.3

i	x_i	$\ln x_i$
0	2.0	0.6931
1	2.2	0.7885
2	2.3	0.8329

سنستخدم طريقة نيفيل لتقريب $f(x) = \ln x$. وباستكمال الجدول نحصل على مدخلات جدول (6.3).

جدول 6.3

Q_{i2}	Q_{i1}	Q_{i0}	$x-x_i$	x_i	i
		0.6931	0.1	2.0	0
	0.7410	0.7885	−0.1	2.2	1
0.7420	0.7441	0.8329	−0.2	2.3	2

وعندئذ $P_2(2.1) = Q_{22} = 0.7420$. وحيث إن $f(2.1) = \ln 2.1 = 0.7419$ لأربع خانات عشرية، فإن الخطأ المطلق هو

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = |0.7419 - 0.7420| = 10^{-4}$$

على أي حال $f'(x) = 1/x,\ f''(x) = -1/x^2$ و $f'''(x) = 2/x^3$، فإن صيغة خطأ لاجرانج (3.3) تعطي حد الخطأ

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = \left|\frac{f'''(\xi(2.1))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3(\xi(2.1))^3}(0.1)(-0.1)(-0.2)\right| \le \frac{0.002}{3(2)^3} = 8.\overline{3}\times 10^{-5}$$

لاحظ أن الخطأ الحقيقي 10^{-4} يتعدى حد الخطأ $8.\overline{3}\times 10^{-5}$، وهذا التناقض ناتج من حسابات الأعداد المحددة. لقد استخدمنا تقريبات الأعداد الأربعة، وإن صيغة خطأ لاجرانج (3.3) تفترض حساب الأعداد اللانهائية. وهذا قد دفع أخطاءنا الحقيقية إلى تجاوز تقدير الخطأ النظري. ■

تنشئ الخوارزمية (1.3) المدخلات في طريقة نيفيل على شكل صفوف.

ALGORITHM

الخوارزمية 1.3

نيفيل للاستكمال الداخلي المكرّر Neville's Iterated Interpolation

لحساب كثيرة حدود الاستكمال الداخلي $P(x)$ على $n+1$ من الأعداد المختلفة $x_0, \ldots, x_n$ عند العدد x للدّالة f؛

المدخلات: أرقام $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$، قيم $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ بمثابة العمود الأول $Q_{0,0}, Q_{1,0}, \ldots, Q_{n,0}$ of Q

المخرجات: الجدول Q مع $P(x) = Q_{n,n}$

الخطوة	المضمون
1	لـ $i = 1, 2, \ldots, n$ $j = 1, 2, \ldots, i$ دع $Q_{i,j} = \dfrac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$
2	المخرجات (Q) توقف.

■

يمكن تعديل الخوارزمية لتسمح بإضافة نقاط استكمال داخلي جديدة. فعلى سبيل المثال المتباينة

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon$$

يمكن استخدامها بوصفها معيار توقف، حيث ε عبارة عن حد السماح المحدد للخطأ. فإذا كانت المتباينة صحيحة فإن $Q_{i,i}$ تكون تقريبًا معقولاً لـ $f(x)$. أما إذا كانت غير صحيحة فتضاف نقطة استكمال داخلي جديدة x_{i+1}.

مجموعة التمارين 1.3 EXERCISE SET

1. ليكن $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$ لكل الدّوال $f(x)$ أدناه. أنشئ كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة واحد على الأكثر، واثنين على الأكثر لتقريب $f(0.45)$، أوجد الخطأ المطلق:
   أ. $f(x) = \cos x$ ب. $f(x) = \sqrt{1+x}$
   ج. $f(x) = \ln(x+1)$ د. $f(x) = \tan x$
2. ليكن $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.6$، لكل الدّوال $f(x)$ أدناه، أنشئ كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة واحد على الأكثر، واثنين على الأكثر، لتقريب $f(1.4)$، أوجد الخطأ المطلق:
   أ. $f(x) = \sin \pi x$ ب. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
   ج. $f(x) = \log_{10}(3x-1)$ د. $f(x) = e^{2x} - x$
3. استخدم المبرهنة (3.3) لإيجاد حد الخطأ للتقريبات في التمرين (1).
4. استخدم المبرهنة (3.3) لإيجاد حد الخطأ للتقريبات في التمرين (2).
5. استخدم كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي المناسبة لكل من الدرجات: واحدة، اثنتين وثلاثة لتقريب كل مما يأتي:
   أ. $f(8.4)$ إذا كان $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$
   ب. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ إذا كان $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$.
   ج. $f(0.25)$ إذا كان $f(0.1) = 0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$، $f(0.4) = 0.24842440$
   د. $f(0.9)$ إذا كان $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$
6. استخدم كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي المناسبة لكل من الدرجات: واحدة، اثنتين وثلاثة لتقريب كل مما يأتي:
   أ. $f(0.43)$ إذا كان $f(0) = 1$, $f(0.25) = 1.64872$, $f(0.5) = 2.71828$, $f(0.75) = 4.48169$
   ب. $f(0)$ إذا كان $f(-0.5) = 1.93750$, $f(-0.25) = 1.33203$, $f(0.25) = 0.800781$, $f(0.5) = 0.687500$
   ج. $f(0.18)$ إذا كان $f(0.1) = -0.29004986$, $f(0.2) = -0.56079734$, $f(0.3) = -0.81401972$, $f(0.4) = -1.0526302$
   د. $f(0.25)$ إذا كان $f(-1) = 0.86199480$, $f(-0.5) = 0.95802009$, $f(0) = 1.0986123$, $f(0.5) = 1.2943767$
7. استخدم طريقة نيفيل لإيجاد التقريبات في التمرين (5).
8. استخدم طريقة نيفيل لإيجاد التقريبات في التمرين (6).
9. أُنتجت البيانات في التمرين (5) باستخدام الدّوال الآتية، استخدم صيغة الخطأ لإيجاد حد للخطأ، وقارن الحد بالخطأ الحقيقي للحالات $n = 1$ و $n = 2$:
   أ. $f(x) = x \ln x$ ب. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$
   ج. $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x - 1$ د. $f(x) = \sin(e^x - 2)$
10. أُنتجت البيانات في التمرين (6) باستخدام الدّوال الآتية، استخدم صيغة الخطأ لإيجاد حد للخطأ، وقارن الحد بالخطأ الحقيقي للحالتين $n = 1$ و $n = 2$:

أ. $f(x) = e^{2x}$ ب. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

ج. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$ د. $f(x) = \ln(e^x + 2)$

11. استخدم طريقة نيفيل لتقريب $\sqrt{3}$ مع الدّوال والقيم الآتية:

أ. $f(x) = 3^x$ والقيم $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$.

ب. $f(x) = \sqrt{x}$ والقيم $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 5$.

ج. قارن بين دقة التقدير في الفقرتين (أ) و (ب).

12. لتكن $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ و $P_2(x)$ كثيرة حدود الاستكمال الداخلي على $x_0 = 0, x_1, x_2 = 1$. أوجد أكبر قيمة لـ x_1 ضمن (0, 1) التي تدع $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$.

13. لتكن $P_3(x)$ كثيرة حدود الاستكمال الداخلي للبيانات $(0, 0), (0.5, y), (1, 3), (2, 2)$. أوجد y إذا كان معامل x^3 في $P_3(x)$ هو **6**.

14. استخدم كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي من الرتبة ثلاثة أو أقل، واعتمد قطع الحساب عند العدد الرباعي لتقريب $\cos 0.750$ مستخدمًا القيم الآتية، وأوجد حد خطأ للتقريب:

$\cos 0.698 = 0.7661 \quad \cos 0.733 = 0.7432 \quad \cos 0.768 = 0.7193 \quad \cos 0.803 = 0.6946$

القيمة الحقيقية لـ$\cos 0.750$ هي **0.7317** (إلى أقرب أربع خانات عشرية). وضِّح التناقض ما بين الخطأ الحقيقي وحد الخطأ.

15. استخدم القيم الآتية والتقريب لأربع خانات لإنشاء تقريب كثيرة حدود لاجرانج الثالثة لـِ $f(1.09)$. الدّالة قيد التقريب هي $f(x) = \log_{10}(\tan x)$. استخدم هذه المعلومة لإيجاد حد الخطأ في التقريب:

$f(1.00) = 0.1924 \quad f(1.05) = 0.2414 \quad f(1.10) = 0.2933 \quad f(1.15) = 0.3492$

16. كرّر التمرين (15) مستخدمًا **Maple** مع مجموعة الأعداد لـ **10**.

17. تستخدم طريقة نيفيل لتقريب $f(0.5)$ معتمدة على الجدول الآتي، وحدِّد $P_2 = f(0.7)$:

$x_0 = 0$	$P_0 = 0$		
$x_1 = 0.4$	$P_1 = 2.8$	$P_{0,1} = 3.5$	
$x_2 = 0.7$	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2} = \frac{27}{7}$

18. تستخدم طريقة نيفيل لتقريب $f(0.4)$ معتمدة على الجدول الآتي، وحدِّد $P_2 = f(0.5)$:

$x_0 = 0$	$P_0 = 1$			
$x_1 = 0.25$	$P_1 = 2$	$P_{01} = 2.6$		
$x_2 = 0.5$	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$	
$x_3 = 0.75$	$P_3 = 8$	$P_{2,3} = 2.4$	$P_{1,2,3} = 2.96$	$P_{0,1,2,3} = 3.016$

19. أنشئ كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي للدّوال الآتية، وأوجد حدًّا للخطأ المطلق في الفترة $[x_0, x_n]$:

أ. $f(x) = e^{2x} \cos 3x, \quad x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.6, n = 2$

ب. $f(x) = \sin(\ln x), \quad x_0 = 2.0, x_1 = 2.4, x_2 = 2.6, n = 2$

ج. $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.3, x_3 = 1.4, n = 3$

د. $f(x) = \cos x + \sin x, \quad x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 1.0, n = 3$

20. ليكن $f(x) = e^x$ لكل $0 \leq x \leq 2$

أ. قرِّب $f(0.25)$ مستخدمًا استكمالًا داخليًّا خطيًّا مع $x_0 = 0$ و $x_1 = 0.5$.

ب. قرّب $f(0.75)$ مستخدمًا استكمالًا داخليًا خطيًا مع $x_0 = 0.5$ و $x_1 = 1$.

ج. قرّب $f(0.25)$ و $f(0.75)$ مستخدمًا ثاني كثيرة حدود استكمال داخلي مع $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

د. أي التقريبات أحسن؟ ولماذا؟

21. افترض أنك بحاجة إلى إنشاء جداول من أربع خانات عشرية لدالّة اللوغارتميّة ذات الأساس 10 من $x = 1$ لـ $x = 10$، بحيث يكون الاستكمال الداخلي الخطي فيها دقيقًا لحد 10^{-6}، ضع حدًّا لحجم الخطوة في هذا الجدول. ما خيارات حجم الخطوة لضمان وجود $x = 10$ في الجدول؟

22. افترض $x_j = j$، $j = 0, 1, 2, 3$. ومن المعلوم أن $P_{0,1}(x) = x + 1$، $P_{1,2}(x) = 3x - 1$ و $P_{1,2,3}(1.5) = 4$ فأوجد $P_{0,1,2,3}(1.5)$.

23. افترض $x_j = j$، $j = 0, 1, 2, 3$ ومن المعلوم أن $P_{0,1}(x) = 2x + 1, P_{0,2}(x) = x + 1, P_{1,2,3}(2.5) = 3$ فأوجد $P_{0,1,2,3}(2.5)$.

24. تُطبّق خوارزمية نيفيل لتقريب $f(0)$ مستخدمة $f(-2), f(-1), f(1), f(2)$. افترض أن $f(-1)$ زيدت بمقدار 2، وأن $f(1)$ أنقصت بمقدار 3. حدِّد الخطأ في الحسابات الأصلية لكثيرة حدود استكمال داخلي لتقريب $f(0)$.

25. أنشئ متتالية لقيم استكمال داخلي y_n لـ $f(1 + \sqrt{10})$، حيث $f(x) = (1 + x^2)^{-1} -5 \le x \le 5$ ووفق الآتي:

لكل $n = 1, 2, \dots, 10$، ليكن $h = 10/n$ و $y_n = P_n(1 + \sqrt{10})$، حيث إن $P_n(x)$ كثيرة حدود الاستكمال الداخلي لـ $f(x)$ عند النقاط $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ وأن $x_j^{(n)} = -5 + jh$، $j = 0, 1, 2, \dots, n$

هل تبدو المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة إلى $f(1 + \sqrt{10})$؟

معكوس استكمال داخلي **Inverse Interpolation** افترض $f \in C^1[a, b], f'(x) \neq 0$ on $[a, b]$، وأن لـ f صفرًا واحدًا p ضمن $[a, b]$. لتكن $x_0, \dots, x_n$ عبارة عن أعداد مختلفة ضمن $[a, b]$ مع $f(x_k) = y_k$ لكل $k = 0, 1, \dots, n$. لتقريب p؛ تُنشأ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة n على النقاط $y_0, \dots, y_n$ لـ f^{-1}. وحيث إن $y_k = f(x_k)$ و $0 = f(p)$ يكون لدينا $f^{-1}(y_k) = x_k$ و $p = f^{-1}(0)$. يسمى الاستكمال الداخلي المكرّر لتقريب $f^{-1}(0)$ (معكوس الاستكمال الداخلي المكرّر).

26. استخدم معكوس استكمال داخلي معاد لإيجاد التقريب لحل $x - e^{-x} = 0$ مع البيانات الآتية:

x	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

27. أنشئ خوارزمية يمكن استخدامها في معكوس استكمال داخلي.

28. أ. تضمنت مقدمة هذا الباب جدول التعداد السكاني للولايات المتحدة للفترة من 1940 إلى 1990.
استخدم كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي لتقريب حجم السكان في الأعوام 1930، 1965 و 2010.

ب. كان عدد السكان عام 1930 123,203,000 تقريبًا. ما دقة نتيجتك في العامين 1965 و 2010 بحسب ما ترى؟

29. يعتقد أن الكميات العالية من حمض التنتلك في أوراق أشجار البلوط البالغة تعيق نمو يرقات عثة الشتاء (*Operophtera bromata L., Geometridae*) التي تؤذي هذه الأشجار كثيرًا في سنوات معينة. ويبين الجدول الآتي معدل وزن عينتين من هذه اليرقات خلال الأيام 28 الأولى بعد ولادتها.

أخذت العينة الأولى من يرقات تربّت على أوراق بلوط طريّة (حديثة)، ب. حيث تربّت العينة الثانية على أوراق بالغة (عتيقة) من نفس الشجرة.

أ. استخدم استكمال لاجرانج الداخلي لتقريب منحنى معدل الوزن لكل عينة.

ب. أوجد أعلى معدل وزن مقرب لكل عينة من خلال تحديد كثيرة حدود الاستكمال الداخلي الأعلى.

اليوم	0	6	10	13	17	20	28
معدل وزن العينة (1) بالملجم	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
معدل وزن العينة (2) بالملجم	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

30. في التمرين (24) من الفصل (1.1) تطوّرت سلسلة ماكلورين لتقريب $\text{erf}(x)$ التي هي عبارة عن دالة خطأ التوزيع الطبيعي والمعرّفة على النحو الآتي:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

أ. استخدم سلسلة ماكلورين لإنشاء جدول لـِ $\text{erf}(x)$ يكون دقيقًا لغاية 10^{-4} بالنسبة إلى $\text{erf}(x_i)$ حيث إن $x_i = 0.2i, i = 0, 1, \ldots, 5$.

ب. استخدم كلًّا من الاستكمال الداخلي الخطي والتربيعي لإيجاد تقريب لـِ $\text{erf}(\frac{1}{3})$. أي منهما يبدو أكثر جدوى؟

31. برهن صحة المبرهنة (14.1) باتباع أسلوب برهنة المبرهنة (3.3).

إرشاد: ليكن

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \cdot \frac{(t - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}}$$

حيث تمثّل $P(x)$ كثيرة حدود تايلور النونية (nth)، استخدم المبرهنة (12.1).

32. برهن أن $\max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |g(x)| = h^2/4$ حيث إن $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$.

33. إن كثيرة حدود برنستاين من الدرجة n لـ $f \in C[0, 1]$ هي

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}$$

حيث إن $\binom{n}{k}$ تمثل $n!/k!(n-k)!$. يمكن استخدام كثيرات الحدود هذه لتقديم برهان مبرهنة ڤيرستراس للتقريب (1.3) (انظر [Bart]) لكون $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$ لكل $x \in [0, 1]$.

أ. أوجد $B_3(x)$ للدّوال

1. $f(x) = x$ 2. $f(x) = 1$

ب. أثبت أنه لكل $k \le n$ فإن

$$\binom{n-1}{k-1} = \left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}$$

ج. استخدم الفقرة (ب) وحقيقة كون (من 2 الفقرة أ)

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \quad \text{لكل } n$$

لإثبات أنه لـ $f(x) = x^2$ يكون

$$B_n(x) = \left(\frac{n-1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x$$

د. استخدم الفقرة (ج) لتقدير قيمة n الضرورية لصحة $|B_n(x) - x^2| \le 10^{-6}$ لكل قيم x ضمن $[0,1]$.

Divided Differences 2.3 الفروقات المنقسمة

استخدم الاستكمال الداخلي المكرّر في الفصل السابق لتوليد تقريبات كثيرة حدود بنجاح ومن الرتبة عالية عند نقطة محددة. وتستخدم طرائق الفرق المنقسم المطروحة ضمن هذا الفصل وبنجاح لكثيرات توليد الحدود نفسها. وستكون معالجتنا لطرائق الفرق المنقسم مختصرة، لأن النتائج في هذا الفصل لن يكون لها استخدام واسع ضمن المادة اللاحقة. ومعظم المصادر القديمة في التحليل العددي فيها معالجات واسعة لطرائق الفرق المنقسم. وإذا ما تطلب الأمر توسعًا في المعالجة، فإن كتاب هلدبراند [Hild] يعدّ مصدرًا جيدًا حصريًّا.

افترض أن $P_n(x)$ كثيرة حدود لاجرانج النونية والمتوافقة مع الدّالة f عند الأعداد المميزة $x_0, x_1, \ldots, x_n$. إن تمثيلات جبرية بديلة تكون مفيدة في حالات معينة. على الرغم من وحدانية كثيرة الحدود هذه، تستخدم فروقات f المنقسمة بالنسبة إلى $x_0, x_1, \ldots, x_n$ للتعبير عن $P_n(x)$ بالصيغة

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (5.3)$$

لثوابت مناسبة $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

ولتحديد أول هذه الثوابت a_0، لاحظ أنه إذا كتب $P_n(x)$ بصيغة (5.3) فإن حساب $P_n(x)$ عند a_0 يترك فقط الحد الثابت a_0، أي أن

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

وبالمثل، عند حساب $P(x)$ عند x_1، فالحدود اللاصفرية الوحيدة في حساب $P_n(x_1)$ هي حدود الثوابت والحدود الخطية

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1)$$

وبذلك

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (6.3)$$

ونقدم الآن تعبير الفرق المنقسم الذي يشبه تعبير أيتكن Δ^2 المستخدم في الفصل (5.2). ويُرمز إلى الفرق المنقسم الصفري **zeroth divided difference** للدّالة f بالنسبة إلى x_i بالرمز $f[x_i]$، وهو عبارة عن قيمة f عند x_i.

$$f[x_i] = f(x_i) \qquad (7.3)$$

وبقية الفروقات المنقسمة تعرّف استقرائيًّا، فالفرق المنقسم الأول لـ f بالنسبة إلى x_i و x_{i+1} يُرمز إليه بـ $f[x_i, x_{i+1}]$ ويعرّف بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \qquad (8.3)$$

والفرق المنقسم الثاني $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ يعرّف بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{x+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

وكما في مجالات عديدة كان إسحق نيوتن رائدا في صيغ الفرق فقد طور صيغًا للاستكمال الداخلي في بدايات 1675 مستخدما رمزه Δ في جداول الفروق. لقد اعتمد حلولًا عامة لصيغ الفرق بحيث إن أمثلته الواضحة التي أعطاها وبضمنها صيغ لاجرانج. كانت أحيانا تعرف بأسماء أخرى.

وبنفس الطريقة، بعد أن تحدد أول $(k-1)$ من الفروقات المنقسمة

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}]$ و $f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$

فإن الفرق المنقسم من الرتبة k نسبة إلى $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}$ يُعطى بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{9.3}$$

وتنتهي العملية مع فرق منقسم واحد من الرتبة n وهو

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

ومع هذه الصيغة، يمكن تكرار صياغة الصيغة (6.3) على الصورة $a_1 = f[x_0, x_1]$، وتوجد كثيرة حدود استكمال داخلي في الصيغة (5.3)

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ووفق المتوقع من حساب a_0 و a_1 ، فإن الثوابت المطلوبة هي

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$$

جدول 7.3

x	$f(x)$	الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

لكل $k = 0, 1, \ldots, n$. وبذلك يمكن إعادة كتابة $P_n(x)$ بالصيغة (انظر [Hild, pp. 43–47])

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) \qquad (10.3)$$

وقيمة $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ مستقلة عن ترتيب الأعداد $x_0, x_1, \ldots, x_k$، وتتضح في التمرين (21) أيضًا.

إن توليد الفروقات المنقسمة مبين في جدول (7.3). ويمكن تحديد اثنين من الفروقات المنقسمة الرابعة، وفرق منقسم خامس من هذه البيانات أيضًا.

إن صيغة المخرجات في الخوارزمية (2.3) يمكن تحويرها لإنتاج الفروقات المنقسمة كلها، وقد نُفّذ ذلك في المثال (1) أيضًا.

ALGORITHM
الخوارزمية
2.3

الفرق المنقسم لنيوتن Newton's Divided-Difference

لإيجاد معامل الفرق المنقسم لكثيرة حدود استكمال داخلي $P(x)$ على $(n+1)$ من الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ للدّالة f؛

المدخلات: أرقام $x_0, x_1, \ldots, x_n$، قيم $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ مثل $F_{0,0}, F_{1,0}, \ldots, F_{n,0}$

المخرجات: الأعداد $F_{0,0}, F_{1,1}, \ldots, F_{n,n}$ حيث

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 1, 2, \ldots, n$ وعند $j = 1, 2, \ldots, i$ ضع $F_{i,j} = \dfrac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$
2	المخرجات $(F_{0,0}, F_{1,1}, \ldots, F_{n,n})$; $(F_{i,i}$ is $f[x_0, x_1, \ldots, x_i])$ توقف.

■

مثال 1

استخدمت كثيرات حدود استكمال داخلي متنوعة لتقريب $f(1.5)$ في المثال (3) من الفصل (1.3)، باستخدام البيانات في الأعمدة الثلاثة الأولى من جدول (8.3). وتتضمن البيانات المتبقية الأخرى من جدول (8.3) فروقات منقسمة حسبت باستخدام الخوارزمية (2.3).

جدول 8.3

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			−0.4837057			
1	1.3	0.6200860		−0.1087339		
			−0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
			−0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			−0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

إن معامل كثيرة حدود استكمال داخلي ضمن القطر في الجدول. وكثيرة الحدود هي

$$\begin{aligned}P_4(x) &= 0.7651977 - 0.4837057(x-1.0) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3)\\&+ 0.0658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)\\&+ 0.0018251(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)\end{aligned}$$

لاحظ أن القيمة $P_4(1.5) = 0.5118200$ تتفق والنتيجة في الفصل (1.3) من المثال (3)، ويجب أن يكون لهما كثيرة الحدود نفسها أيضًا.

إن مبرهنة القيمة الوسطى تطبق في الصيغة (8.3) عندما $i = 0$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

لتشير إلى أنه عند وجود f'، فإن $f[x_0, x_1] = f'(\xi)$ لعددٍ ما ξ ما بين x_0 و x_1. تعمل المبرهنة الآتية على تعميم هذه النتيجة.

مبرهنة 6.3 لتكن $f \in C^n[a, b]$، ولتكن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعدادًا مختلفة تنتمي للفترة $[a, b]$. عندئذ يوجد عدد ξ حيث $\xi \in (a, b)$ (عادة غير معلوم) بحيث يكون

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$ ■

البرهان ليكن $g(x) = f(x) - P_n(x)$

وحيث إن $f(x_i) = P_n(x_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$، فإن الدّالة g لها أصفار مختلفة في $[a, b]$. وتشير مبرهنة رول المعممة Generalized Rolle's Theorem إلى وجود عدد ξ في (a, b) مع $g^{(n)}(\xi) = 0$، ومن ثَمّ

$$0 = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) \text{ و } P_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi)$$

ولكون $P_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، ومعاملها الأمامي $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$، فإن

$$P_n^{(n)}(x) = n!\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

لكل قيم x. ونتيجة لذلك

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$ ■ ■ ■

يمكن وضع صيغة نيوتن للفرق المنقسم بصيغة مبسطة عندما تكون $x_0, x_1, \ldots, x_n$ مرتبة على التوالي بمسافات متساوية. في هذه الحالة نقدم الصيغة $h = x_{i+1} - x_i$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$ وندع $x = x_0 + sh$. لذا يمكن كتابة الفرق $x - x_i$ بصيغة $x - x_i = (s - i)h$. وأخيرًا فالصيغة (10.3) تصبح

$$\begin{aligned}P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots\\&+ s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\\&= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \ldots, x_k]\end{aligned}$$

وباستخدام صيغة ذات الحدين

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

نستطيع كتابة الصيغة عن $P_n(x)$ على نحو مدمج وعلى الصورة الآتية:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n}\binom{s}{k}k!h^k f[x_0, x_i, \ldots, x_k] \qquad (11.3)$$

إن صيغة نيوتن للفرق الأمامي **Newton forward-difference formula** تُنشأ باعتماد تعبير الفرق الأمامي Δ الذي تناولناه في طريقة أيتكن Δ^2. ومع هذه الصيغة

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}\right] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

وعمومًا

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0)$$

وحيث إن $f[x_0] = f(x_0)$، فالصيغة **(11.3)** لها الصيغة الآتية:

صيغة نيوتن للفرق الأمامي **Newton Forward-Difference Formula**

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f(x_0) \qquad (12.3)$$

فإذا أُعيد ترتيب نقاط الاستكمال الداخلي من الأخير إلى الأول بالشكل $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$ فإنه يمكننا كتابة صيغة الاستكمال الداخلي على النحو الآتي:

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + f[x_n, \ldots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1)$$

وبالإضافة إلى ذلك، إذا كانت النقاط متساوية البعد فيما بينها مع $x = x_n + sh$ و $x = x_i + (s+n-i)h$، فإن

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_n + sh) \\ &= f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \cdots \\ &\quad + s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n f[x_n, \ldots, x_0]. \end{aligned}$$

وهذا يستخدم لاشتقاق صيغة تطبيقية أكثر شيوعًا ومعروفة بـ (صيغة نيوتن للفرق المتراجع) **"Newton backward-difference formula"**. ولشرح هذه الصيغة؛ نحتاج إلى التعريف الآتي:

تعريف 7.3

إذا كان لدينا المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ فنرمز للفرق المتراجع بالرمز ∇p_n (يقرأ $nabla\ p_n$)، حيث

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1} \text{ لكل } n \geq 1$$

وتعرّف القوى العليا إرجاعيًّا كالآتي:

$$\nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n) \quad \text{لكل} \quad k \geq 2$$

يؤدي تعريف (7.3) إلى

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h}\nabla f(x_n), \qquad f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n)$$

وعمومًا

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k}\nabla^k f(x_n)$$

وأخيرًا

$$P_n(x) = f[x_n] + s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n)$$

وإذا وسّعنا صيغة ذات الحدين لتشمل قيم s الحقيقية جميعها بجعل

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)\cdots(-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1)\cdots(s+k-1)}{k!}$$

فإن

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1\binom{-s}{1}\nabla f(x_n) + (-1)^2\binom{-s}{2}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + (-1)^n\binom{-s}{n}\nabla^n f(x_n)$$

تعطي النتيجة الآتية:

صيغة نيوتن للفرق المتراجع Newton Backward-Difference Formula

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{-s}{k}\nabla^k f(x_n) \qquad (13.3)$$

مثال 2 يقابل جدول (9.3) للفرق المنقسم البيانات في مثال (1):

جدول 9.3

		الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الرابعة
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		−0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
		−0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

تستخدم كثيرة حدود استكمال داخلي واحد فقط من الرتبة 4 في أكثر نقاط البيانات الخمس هذه، لكننا سننظم نقاط البيانات لإيجاد أفضل تقريبات استكمال داخلي برتب 1 و 2 و 3. وهذا سوف يعطينا تقريبًا دقيقًا من الرتبة الرابعة لقيمة x المعلومة.

فإذا تطلب الأمر تقريبًا إلى $f(1.1)$ فإن الاختيار المعقول للنقاط هو

$$x_0 = 1.0,\ x_1 = 1.3,\ x_2 = 1.6,\ x_3 = 1.9,\ x_4 = 2.2$$

لأن هذا الاختيار يعمل في اتجاه الاستخدامٍ المبكر لنقاط البيانات الأقرب إلى $x = 1.1$، ويعمل في اتجاه استخدام الفرق المنقسم الرابع أيضًا. وهذا يؤدي إلى أن $h = 0.3$ و $s = \frac{1}{3}$، ومن ثم فإن صيغة نيوتن للفرق المنقسم المتراجع تستخدم مع الفروقات المنقسمة التي لها سيطرة قوية في جدول (9.3).

$$\begin{aligned}P_4(1.1) &= P_4(1.0 + \tfrac{1}{3}(0.3)) = 0.7651977 + \tfrac{1}{3}(0.3)(-0.4837057)\\ &+ \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{2}{3}\right)(0.3)^2(-0.1087339)\\ &+ \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{5}{3}\right)(0.3)^3(0.0658784)\\ &+ \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{5}{3}\right)\left(-\tfrac{8}{3}\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.7196460\end{aligned}$$

ولتقريب قيمة عندما تكون x قريبة من نهاية القيمة الجدولية؛ $x = 2.0$ على سبيل المثال، فإننا نرغب مرةً أخرى في الاستخدام المبكر لنقاط البيانات الأقرب إلى x. ويتطلب هذا استخدام صيغة نيوتن للفرق المنقسم المتراجع مع $s = -\frac{2}{3}$، وتكون الفروقات المنقسمة في جدول (9.3) الموضوع تحتها خط هي

$$\begin{aligned}P_4(2.0) &= P_4\left(2.2 - \tfrac{2}{3}(0.3)\right) = 0.1103623 - \tfrac{2}{3}(0.3)(-0.5715210)\\ &- \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)(0.3)^2(0.0118183) - \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)(0.3)^3(0.0680685)\\ &- \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.2238754\end{aligned}$$

ليست صيغ التقدم والتراجع مناسبة لتقريب $f(x)$ عندما تكون x قرب مركز الجدول؛ لأن استخدام أي من طريقتي التقدم أو التراجع في حالة وجود الفرق بأعلى مرتبة سوف يحول دون اقتراب x_0 من x. وهذه أعداد من صيغ الفرق المنقسم متوافرة لهذه الحالة، وكل واحدة منها لها ظروف يكون استخدامها أكثر إيجابية، وتُعرف هذه الطرائق بـ "صيغ الفرق المركزي" "centered-difference formula". سنستعرض هنا صيغة فرق مركزي واحدة هي "طريقة سترلنك Stirling's method"، ونوجّه القارئ مرة أخرى إلى [Hild] إذا أراد تغطية المادة تمامًا.

نشر جيمس سترلنك James Stirling (1770-1692) هذا إلى جانب صيغ عديدة أخرى في Methodus Differentialis عام 1730. وتضمن عمله هذا تقنيات لتسريع تقارب سلاسل مختلفة.

نستخدم x_0 بالقرب من النقطة المراد تقريبها بالنسبة إلى صيغ الفرق المركزي، ونعنون النقاط مباشرة أقل من x_0 لتكون $x_1, x_2, \ldots$، وتلك التي تكون مباشرة أكبر من x_0 لتكون $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$. ووفقًا لهذا الأسلوب؛ فإن صيغة سترلنك تكون

$$\begin{aligned}P_n(x) = P_{2m+1}(x) &= f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \qquad (14.3)\\ &+ \frac{s(s^2-1)h^3}{2} f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]) + \cdots\\ &+ s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m}, \ldots, x_m]\\ &+ \frac{s(s^2-1)\cdots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2}(f[x_{-m-1}, \ldots, x_m] + f[x_{-m}, \ldots, x_{m+1}])\end{aligned}$$

نستخدم الصيغة نفسها إذا كان $n = 2m + 1$ عددًا فرديًّا، وإذا كان $n = 2m$ عددًا زوجيًّا ولكننا نحذف السطر الأخير. والمدخلات المستخدمة لهذه الصيغة مخطوط تحتها في جدول (10.3).

جدول 10.3

x	$f(x)$	الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الرابعة
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$\underline{f[x_{-1}, x_0]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]}$	
x_0	$\underline{f[x_0]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$
		$\underline{f[x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$				

مثال 3

افترض وجود جدول للبيانات المعطاة في الأمثلة السابقة. لاستخدام صيغة سترلنك لتقريب $f(1.5)$ مع $x_0 = 1.6$، نستخدم المدخلات المخطوط تحتها في جدول الفروق (11.3).

جدول 11.3

x	$f(x)$	الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الرابعة
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		<u>−0.5489460</u>		<u>0.0658784</u>	
1.6	<u>0.4554022</u>		<u>−0.0494433</u>		<u>0.0018251</u>
		<u>−0.5786120</u>		<u>0.0680685</u>	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	<u>0.1103623</u>				

والصيغة باستخدام $s = -\frac{1}{3}$ ،$h = 0.3, x_0 = 1.6$ تصبح

$$\begin{aligned} f(1.5) \approx\ & P_4\left(1.6 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)(0.3)\right) \\ =\ & 0.4554022 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{0.3}{2}\right)((-0.5489460) + (-0.5786120)) \\ & + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 (0.3)^2(-0.0494433) \\ & + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^3(0.0658784 + 0.0680685) \\ & + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.5118200 \end{aligned}$$

■

EXERCISE SET
مجموعة التمارين 2.3

1. استخدم الصيغة (10.3) أو الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية، أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(8.4)$ إذا كان $f(8.1) = 16.94410,\ f(8.3) = 17.56492,\ f(8.6) = 18.50515,\ f(8.7) = 18.82091$

ب. $f(0.9)$ إذا كان $f(0.6) = -0.17694460,\ f(0.7) = 0.01375227,\ f(0.8) = 0.22363362,\ f(1.0) = 0.65809197$

2. استخدم الصيغة (17.3) أو الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية، أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(0.43)$ إذا كان $f(0) = 1,\ f(0.25) = 1.64872,\ f(0.5) = 2.71828,\ f(0.75) = 4.48169$

ب. $f(0)$ إذا كان $f(-0.5) = 1.93750,\ f(-0.25) = 1.33203,\ f(0.25) = 0.800781,\ f(0.5) = 0.687500$

3. استخدم صيغة نيوتن للفرق الأمامي لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3، 2، 1 للبيانات الآتية، أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(-\frac{1}{3})$ إذا كان $f(-0.75) = -0.07181250,\ f(-0.5) = -0.0247500,\ f(-0.25) = 0.33493750, f(0) = 1.10100000$

ب. $f(0.25)$ إذا كان $f(0.1) = -0.62049958,\ f(0.2) = -0.28398668,\ f(0.3) = 0.00660095,\ f(0.4) = 0.24842440$

4. استخدم صيغة نيوتن للفرق الأمامي لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية، أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(0.43)$ إذا كان $f(0) = 1,\ f(0.25) = 1.64872,\ f(0.5) = 2.71828,\ f(0.75) = 4.48169$

ب. $f(0.18)$ إذا كان $f(0.1) = -0.29004986,\ f(0.2) = -0.56079734,\ f(0.3) = -0.81401972,\ f(0.4) = -1.0526302$

5. استخدم صيغة نيوتن للفرق الأمامي لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية، أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(-\frac{1}{3})$ إذا كان $f(-0.75) = -0.07181250,\ f(-0.5) = -0.02475000,\ f(-0.25) = 0.33493750,\ f(0) = 1.10100000$

ب. $f(0.25)$ إذا كان $f(0.1) = -0.62049958,\ f(0.2) = -0.28398668,\ f(0.3) = 0.00660095,\ f(0.4) = 0.24842440$

6. استخدم صيغة نيوتن للفرق المتراجع لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية، أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(0.43)$ إذا كان $f(0) = 1,\ f(0.25) = 1.64872,\ f(0.5) = 2.71828,\ f(0.75) = 4.48169$

ب. $f(0.25)$ إذا كان $f(-1) = 0.86199480,\ f(-0.5) = 0.95802009,\ f(0) = 1.0986123,\ f(0.5) = 1.2943767$

7. أ. استخدم الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 للنقاط غير المتساوية التباعد والمعطاة في الجدول الآتي:

x	$f(x)$
−0.1	5.30000
0.0	2.00000
0.2	3.19000
0.3	1.00000

ب. أضف $f(0.35) = 0.97260$ إلى الجدول، وأنشئ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة 4.

8. أ. استخدم الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 4 للنقاط غير المتساوية التباعد والمعطاة في الجدول الآتي:

$f(x)$	x
−6.00000	0.0
−5.89483	0.1
−5.65014	0.3
−5.17788	0.6
−4.28172	1.0

ب. أضف $f(1.1) = -3.99583$ إلى الجدول، وأنشئ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة 5.

9. أ. قرّب $f(0.05)$ مستخدمًا البيانات الآتية وصيغة نيوتن للفرق المنقسم الأمامي.

0.8	0.6	0.4	0.2	0.0	x
2.22554	1.82212	1.49182	1.22140	1.00000	$f(x)$

ب. استخدم صيغة نيوتن للفرق المنقسم المتراجع لتقريب $f(0.65)$.

ج. استخدم صيغة سترلنك لتقريب $f(0.43)$.

10. أثبت أن كثيرة الحدود التي تستكمل داخليًا هذه البيانات تكون من الرتبة 3.

3	2	1	0	−1	−2	x
−4	13	16	11	4	1	$f(x)$

11. أ. أثبت أن كثيرتي الحدود التكعيبيتين

$$P(x) = 3 - 2(x+1) + 0(x+1)(x) + (x+1)(x)(x-1)$$

و

$$Q(x) = -1 + 4(x+2) - 3(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x)$$

كليهما تستكمل داخليًا البيانات الآتية:

2	1	0	−1	−2	x
3	−1	1	3	−1	$f(x)$

ب. لماذا لا تكون الفقرة (أ) مخالفة لخاصيّة وحدانية كثيرات حدود الاستكمال الداخلي؟

12. تحقّق كثيرة الحدود $P(x)$ من الرتبة الرابعة ما يأتي: $\Delta^4 P(0) = 24,\ \Delta^3 P(0) = 6,\ \Delta^2 P(0) = 0$
حيث $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$. احسب $\Delta^2 P(10)$.

13. البيانات الآتية معطاة لكثيرة حدود $P(x)$ مجهولة الرتبة

2	1	0	x
4	−1	2	$P(x)$

14. حدِّد معامل x^2 في $P(x)$ إذا كانت الفروقات الأمامية جميعها من الرتبة الثالثة تساوي 1. البيانات الآتية معطاة لكثيرة حدود $P(x)$ مجهولة الرتبة

3	1	2	0	x
18	9	15	4	$P(x)$

حدِّد معامل x^3 في $P(x)$ إذا كانت الفروقات الأمامية جميعها من الرتبة الثالثة تساوي 1.

15. صيغة نيوتن للفرق الأمامي مستخدمة لتقريب $f(0.3)$ مع البيانات الآتية:

0.6	0.4	0.2	0.0	x
51.0	30.0	21.0	15.0	$f(x)$

لنفترض أننا اكتشفنا إنقاص $f(0.4)$ بمقدار 10 وزيادة $f(0.6)$ بمقدار 5. بأي مقدار سيتغير تقريب $f(0.3)$ ؟

16. تعطي صيغة نيوتن للفرق المنقسم كثيرة حدود استكمال داخلي بالنسبة إلى الدّالة f

$$P_3(x) = 1 + 4x + 4x(x - 0.25) + \tfrac{16}{3}x(x - 0.25)(x - 0.5)$$

على النقاط $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75$. أوجد $f(0.75)$.

17. الفروقات المنقسمة الارتجاعية بالنسبة إلى الدّالة f معطاة أدناه.

$x_0 = 0.0$	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

حدِّد المدخلات المفقودة في الجدول.

18. أ. تضمنت مقدمة هذا الباب جدولاً يضمّ عدد سكان الولايات المتحدة للأعوام 1940 حتى 1990. استخدم فروقات منقسمة مناسبة لتقريب عدد السكان في السنوات 1930 و 1965 و 2010.
ب. كان عدد السكان عام 1930 كالتالي 123,203,000 تقريباً. فما دقة أرقام السنوات 1965 و2010 في رأيك؟

19. ليكن

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

استخدم $P_n(x_2)$ لإثبات أن $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$.

20. أثبت أن $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$ لبعض $\xi(x)$.

إرشاد: من الصيغة (3.3)

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

مفترضين كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة $n + 1$ على $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ ، يكون لدينا

$$f(x) = P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x](x - x_0)\cdots(x - x_n).]$$

21. ليكن $i_0, i_1, \ldots, i_n$ إعادة ترتيب للأعداد الصحيحة $0, 1, \ldots, n$. أثبت أن

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

إرشاد: افترض أن المعاملات الأمامية لكثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n على البيانات $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$.

3.3 استكمال هرمايت الداخلي Hermite Interpolation

الكلمة اللاتينية Osculum تعني "الثغر الصغير" أو "قبلة" عند تطبيقها على منحنى. وتشير إلى تماسات فقط ولها نفس الشكل. استيفاء هرمايت الداخلي له هذه الخاصية؛ لأن مطابقة منحنى معلوم ومشتقته تدفع بمنحنى الاستيفاء الداخلي لتقبيل المنحنى المعلوم.

كثيرات حدود التذبذب Osculating polynomials تعمم كثيرات حدود تايلور وكثيرات حدود لاجرانج كلها. لنفترض أن لدينا $n+1$ من الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ في $[a, b]$ مع أعداد صحيحة غير سالبة $m_0, m_1, \ldots, m_n$ و $m = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$. كثيرة حدود التذبذب التي تقرب الدّالة $f \in C^m[a, b]$ عند x_i ولكل $i = 0, \ldots, n$ هي كثيرة حدود بأقل رتبة مع خاصية كونها تتفق مع الدّالة f واشتقاقاتها كلها من الرتبة تساوي أو أقل من m عند x_i. ورتبة كثيرة حدود التذبذب هذه تكون على الأكثر

$$M = \sum_{i=0}^{n} m_i + n$$

وإن عدد الشروط المطلوب تحقّقها هو $\sum_{i=0}^{n} m_i + (n+1)$، وكثيرة حدود من الرتبة M لها $M+1$ من المعاملات التي يمكن استخدامها لتحقّق هذه الشروط.

تعريف 8.3

كان شـرلس هرمايـت Charles Hermite (1822-1901) قد عمل اكتشافات في جوانب عديدة وخصوصًا التحليل المركب ونظرية الأعداد. وكان معروفًا ببرهانه عام 1873 أن e عبارة عن عدد غير معرف. وفي عام 1882 استخدم لندمان Lindemann برهانًا مماثلاً لإثبات كون π هي عدد غير معرف أيضاً والذي أوضح أن "تربيع الدائرة" غير ممكن مع أدوات إقليدس القياسية.

لتكن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعدادًا مختلفة عددها $n+1$ تنتمي إلى الفترة $[a, b]$، وأن m_i عدد صحيح غير سالب يقابل x_i، و $i = 0, 1, \ldots, n$. افترض أن $f \in C^m[a, b]$، بحيث $m = \max_{0 \le i \le n} m_i$. إن كثيرة حدود التذبذب التي تقرّب f هي كثيرة حدود $P(x)$ بأقل رتبة مع كون

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k} \quad \text{ولكل } i = 0, 1, \ldots, n \text{ و } k = 0, 1, \ldots, m_i \qquad \blacksquare$$

لاحظ أنه عندما $n = 0$، فإن كثيرة حدود التذبذب التي تقرّب f هي كثيرة حدود تايلور من الرتبة m_0 لـ f عند x_0. وحينما $m_i = 0$ لكل i، فإن كثيرة حدود التذبذب هي كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n التي تستكمل f داخليًّا على $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

وتعطي الحالة عندما $m_i = 1$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ كثيرات حدود هرمايت. وتتفق كثيرات الحدود هذه مع الدّالة f عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ولدالّة محددة f. بالإضافة إلى ذلك، بما أن مشتقاتها الأولى تتفق ومثيلاتها في الدّالة f، فإن لهما شكل الدّالة نفسه $(x_i, f(x_i))$ في واقع توافق خطوط التماس لكثيرة الحدود وللدّالة. ستقتصر دراستنا لكثيرات حدود التماس على هذه الحالة، ونفترض أولًا أن مبرهنة ما توّضح صيغة كثيرات حدود هرمايت بالتحديد.

مبرهنة 9.3

قد أعطى هرمايت Hermite توضيحا لكثيرة حدود التذبذب ضمن رسالة إلى كارل بورشاردت Carl W. Borchardt عام 1878 حيث اعتاد إرسال نتاجه إليه. وكان توضيحه هذا ذا قيمة تطبيقية لاستخدام تقنيات التكامل المركب لحل مسألة القيمة الحقيقية. انظر الصفحة (1 ff303 من [Golds]).

إذا كانت $f \in C^1[a, b]$ و $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ فإن كثيرة الحدود الوحيدة وبأقل رتبة المتفقة مع f و f' عند $x_0, \ldots, x_n$ هي كثيرة حدود هرمايت من الرتبة $2n+1$ على الأكثر

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

حيث إن $H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)] L^2_{n,j}(x)$ و $\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L^2_{n,j}(x)$.

وتمثل $L_{n,j}(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n لمعامل لاجرانج من الرتبة j والمعرّفة في الصيغة (2.3). بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $f \in C^{2n+2}[a, b]$ فإن

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x - x_0)^2 \ldots (x - x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x))$$

لبعض $\xi(x)$ (مجهولة عمومًا) في الفترة (a, b). ■

البرهان تذكّر أولًا أن

$$L_{n,j}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } i \neq j \\ 1 & \text{إذا كان } i = j \end{cases}$$

ولذلك عندما $i \neq j$ فإن

$$H_{n,j}(x_i) = 0 \quad \text{و} \quad \hat{H}_{n,j}(x_i) = 0$$

حيث

$$H_{n,i}(x_i) = [1 - 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)] \cdot 1 = 1 \quad \text{و} \quad \hat{H}_{n,i}(x_i) = (x_i - x_i) \cdot 1^2 = 0$$

نتيجة لذلك

$$H_{2n+1}(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} f(x_j) \cdot 0 + f(x_i) \cdot 1 + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \cdot 0 = f(x_i)$$

لذا H_{2n+1} يتفق مع f عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

ولإثبات توافق H'_{2n+1} مع f' عند الرؤوس؛ لاحظ أولًا أن $L_{n,j}(x)$ هو عامل $H'_{n,j}(x)$، لذا $H'_{n,j}(x_i) = 0$ عندما $i \neq j$. بالإضافة إلى ذلك، عندما $i = j$ و $L_{n,i}(x_i) = 1$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} H'_{n,i}(x_i) &= -2L'_{n,i}(x_i) \cdot L^2_{n,i}(x_i) + [1 - 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)]2L_{n,i}(x_i)L'_{n,i}(x_i) \\ &= -2L'_{n,i}(x_i) + 2L'_{n,i}(x_i) = 0 \end{aligned}$$

عندئذ $H'_{n,j}(x_i) = 0$ لكل i و j.

وأخيرًا

$$\begin{aligned} \hat{H}'_{n,j}(x_i) &= L^2_{n,j}(x_i) + (x_i - x_j)2L_{n,j}(x_i)L'_{n,j}(x_i) \\ &= L_{n,j}(x_i)[L_{n,j}(x_i) + 2(x_i - x_j)L'_{n,j}(x_i)] \end{aligned}$$

لذا $\hat{H}'_{n,i}(x_i) = 1$ و $\hat{H}'_{n,j}(x_i) = 0$ إذا كان $i \neq j$ وبتجميع هذه الحقائق يكون لدينا

$$H'_{2n+1}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot 0 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} f'(x_j) \cdot + f'(x_i) \cdot 1 = f'(x_i)$$

وأخيرًا يتوافق H_{2n+1} مع f و H'_{2n+1} مع f' عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$. لقد طلب برهنة وحدانية كثيرة

الحدود هذه وصيغة الخطأ في التمرين (11). ■ ■ ■

مثال 1 استخدمت كثيرة حدود هرمايت المتوافقة مع البيانات الموجودة في جدول (12.3) لإيجاد تقريب إلى $f(1.5)$.

جدول 12.3

$f'(x_k)$	$f(x_k)$	x_k	k
−0.5220232	0.6200860	1.3	0
−0.5698959	0.4554022	1.6	1
−0.5811571	0.2818186	1.9	2

نحسب أولًا كثيرات حدود لاجرانج ومشتقاتها. وهذا يعطي

$$L_{2,0}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9},\qquad L'_{2,0}(x)=\frac{100}{9}x-\frac{175}{9}$$

$$L_{2,1}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{-100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9},\qquad L'_{2,1}(x)=\frac{-200}{9}x+\frac{320}{9}$$

و

$$L_{2,2}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{50}{9}x^2-\frac{145}{9}x+\frac{104}{9},\qquad L'_{2,2}(x)=\frac{100}{9}x-\frac{145}{9}$$

إن كثيرات حدود $H_{2,j}(x)$ و $\hat{H}_{2,j}(x)$ هي

$$H_{2,0}(x)=[1-2(x-1.3)(-5)]\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$=(10x-12)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x)=1\cdot\left(\frac{-100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9}\right)^2$$

$$H_{2,2}(x)=10(2-x)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{145}{9}x+\frac{104}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,0}(x)=(x-1.3)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x)=(x-1.6)\left(\frac{-100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,2}(x)=(x-1.9)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{145}{9}x+\frac{104}{9}\right)^2$$

وأخيرًا

$$H_5(x)=0.6200860H_{2,0}(x)+0.4554022H_{2,1}(x)+0.2818186H_{2,2}(x)$$
$$-0.5220232\hat{H}_{2,0}(x)-0.5698959\hat{H}_{2,1}(x)-0.5811571\hat{H}_{2,2}(x)$$

$$\begin{aligned}H_5(1.5) &= 0.6200860\left(\frac{4}{27}\right) + 0.4554022\left(\frac{64}{81}\right) + 0.2818186\left(\frac{5}{81}\right)\\ &\quad - 0.5220232\left(\frac{4}{405}\right) - 0.5698959\left(\frac{-32}{405}\right) - 0.5811571\left(\frac{-2}{405}\right)\\ &= 0.5118277\end{aligned}$$

نتيجة دقيقة لكل مدى. ■

ومع أن المبرهنة (9.3) تهيئ توضيحًا كاملًا لكثيرات حدود هرمايت، فمن الواضح في المثال (1) أن الحاجة إلى تحديد كثيرات حدود لاجرانج وحسابها واشتقاقاتها تجعل العملية مملة حتى مع قيم n الصغيرة. إن الطريقة البديلة لتوليد تقريبات هرمايت تنشأ على صيغة نيوتن للفرق المنقسم للاستكمال الداخلي عدد (10.3) لكثيرة حدود لاجرانج عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$ هي

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

والربط ما بين الفرق المنقسم من الرتبة n واشتقاق f هو كما في المبرهنة (6.3) من الفصل (2.3).

افترض أن الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ معطاة مع قيم f و f' عند هذه الأعداد معًا. عرّف متتالية جديدة $z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}$ بالصيغة $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ وأنشئ جدول الفرق المنقسم بصيغة جدول (7.3)، حيث يستخدم $z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}$.

وحيث إن $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ لكل i، فإننا لا نستطيع تعريف $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ بصيغة الفرق المنقسم. فلو افترضنا بالاستناد إلى المبرهنة (6.3) أن التعويض المقبول في هذه الحالة هو $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i)$، يمكننا استخدام المدخلات

$$f'(x_0), f'(x_1), \ldots, f'(x_n)$$

بدلًا من الفروقات المنقسمة الأولى غير المعرّفة

$$f[z_0, z_1], f[z_2, z_3], \ldots, f[z_{2n}, z_{2n+1}]$$

تنتج بقية الفروقات المنقسمة كالمعتاد، وتوظف الفروقات المنقسمة المناسبة في صيغة نيوتن للفرق المنقسم لاستكمال داخلي. ويبين جدول (13.3) المدخلات المستخدمة في أول ثلاثة أعمدة للفرق المنقسم عند تحديد كثيرة حدود هرمايت $H_5(x)$ لـ x_0, x_1, x_2. تنتج المدخلات الباقية بنفس الأسلوب وعلى نحو جدول (7.3). وكثيرة حدود هرمايت هي

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)(x - z_1)\cdots(x - z_{k-1})$$

ويمكن إيجاد برهان ذلك في [Po, p. 56].

جدول 13.3

z	$f(z)$	الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

مثال 2 تستخدم مدخلات جدول (14.3) بيانات المثال (1)، وإن المدخلات التي تحتها خط هي البيانات المعطاة، وقد نتج الباقي باستخدام صيغة الفرق المنقسم المعيارية (9.3):

$$\begin{aligned}
H_5(1.5) = {} & 0.6200860 + (1.5 - 1.3)(-0.5220232) + (1.5 - 1.3)^2(-0.0897427) \\
& + (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)(0.0663657) \\
& + (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)^2(0.0026663) \\
& + (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)^2(1.5 - 1.9)(-0.0027738) \\
= {} & 0.5118277.
\end{aligned}$$

جدول 14.3

1.3	0.6200860					
		−0.5220232				
1.3	0.6200860		−0.0897427			
		−0.5489460		0.0663657		
1.6	0.4554022		−0.0698330		0.0026663	
		−0.5698959		0.0679655		−0.0027738
1.6	0.4554022		−0.0290537		0.0010020	
		−0.5786120		0.0685667		
1.9	0.2818186		−0.0084837			
		−0.5811571				
1.9	0.2818186					

■

ويمكن توسيع الأسلوب المستخدم في الخوارزمية (3.3) ليستخدم في تحديد كثيرات حدود تماس أخرى. ونجد مناقشة مختصرة حول تلك العملية في [Po, pp. 53–57].

ALGORITHM
الخوارزمية
3.3

استكمال هرمايت الداخلي Hermite Interpolation

لإيجاد معامل كثيرة حدود هرمايت للاستكمال الداخلي $H(x)$ على $(n+1)$ من الأعداد المختلفة $x_0, \ldots, x$ للدّالة f:

المدخلات: أرقام $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ، قيم $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ و $f'(x_0), \ldots, f'(x_n)$

المخرجات: الأعداد $Q_{0,0}, Q_{1,1}, \ldots, Q_{2n+1,2n+1}$ حيث

$$\begin{aligned} H(x) = {} & Q_{0,0} + Q_{1,1}(x - x_0) + Q_{2,2}(x - x_0)^2 + Q_{3,3}(x - x_0)^2(x - x_1) \\ & + Q_{4,4}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 + \cdots \\ & + Q_{2n+1,2n+1}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2(x - x_n) \end{aligned}$$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 0, 1, \ldots, n$ نفّذ الخطوتين 2 و 3.
2	ضع $z_{2i} = x_i$ $z_{2i+1} = x_i$ $Q_{2i,0} = f(x_i)$ $Q_{2i+1,0} = f(x_i)$ $Q_{2i+1,1} = f'(x_i)$
3	إذا كان $i \neq 0$ فضع $Q_{2i,1} = \dfrac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}$
4	لقيم $i = 2, 3, \ldots, 2n+1$ ولقيم $j = 2, 3, \ldots, i$ ضع $Q_{i,j} = \dfrac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}$
5	المخرجات $(Q_{0,0}, Q_{1,1}, \ldots, Q_{2n+1,2n+1})$ توقف.

■

مجموعة التمارين 3.3 EXERCISE SET

1. استخدم مبرهنة (9.3) أو الخوارزمية (3.3) لإنشاء كثيرة حدود التقريب للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.3	17.56492	3.116256
8.6	18.50515	3.151762

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.8	0.22363362	2.1691753
1.0	0.65809197	2.0466965

ج.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.5	−0.0247500	0.7510000
−0.25	0.3349375	2.1890000
0	1.1010000	4.0020000

د.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.1	−0.62049958	3.58502082
0.2	−0.28398668	3.14033271
0.3	0.00660095	2.66668043
0.4	0.24842440	2.16529366

2. استخدم مبرهنة (9.3) أو الخوارزمية (3.3) لإنشاء كثيرة حدود التقريب للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f(x)$
0	1.00000	2.00000
0.5	2.71828	5.43656

ب.

x	$f(x)$	$f(x)$
−0.25	1.33203	0.437500
0.25	0.800781	−0.625000

ج.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.1	−0.29004996	−2.8019975
0.2	−0.56079734	−2.6159201
0.3	−0.81401972	−2.4533949

د.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−1	0.86199480	0.15536240
−0.5	0.95802009	0.23269654
0	1.0986123	0.33333333
0.5	1.2943767	0.45186776

3. البيانات في التمرين (1) باستخدام الدّوال الآتية، استخدم كثيرة الحدود المنشأة في المثال (1) لقيمة x المعطاة لتقريب $f(x)$، واحسب الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = x \ln x$ وتقريب $f(8.4)$

ب. $f(x) = \sin(e^x - 2)$ وتقريب $f(0.9)$

ج. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ وتقريب $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

د. $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$ وتقريب $f(0.25)$

4.أنتجت البيانات في التمرين (2) باستخدام الدّوال الآتية، استخدم كثيرة الحدود المنشأة في المثال (1) لقيمة x المعطاة لتقريب $f(x)$، واحسب الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = e^{2x}$ وتقريب $f(0.43)$

ب. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ وتقريب $f(0)$

ج. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$ وتقريب $f(0.18)$

د. $f(x) = \ln(e^x + 2)$ وتقريب $f(0.25)$

5. أ. استخدم القيم الآتية وتدويرًا حسابيًّا لأربع خانات من أجل إنشاء كثيرة حدود هرمايت للاستكمال الداخلي لتقريب sin 0.34.

x	$\sin x$	$D_x \sin x = \cos x$
0.30	0.29552	0.95534
0.32	0.31457	0.94924
0.35	0.34290	0.93937

ب. حدِّد حدًّا لخطأ التقريب في (أ)، وقارنه بالخطأ الحقيقي.

ج. أضف $\sin 0.33 = 0.32404$ و $\cos 0.33 = 0.94604$ إلى البيانات، وكرّر الحسابات.

6. ليكن $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$

أ. استخدم كثيرة حدود هرمايت للاستكمال الداخلي من رتبة لا تزيد على 3 لتقريب $f(1.03)$ مستخدمًا $x_0 = 1$ و $x_1 = 1.05$. قارن الخطأ الحقيقي بحدِّ الخطأ.

ب. استخدم كثيرة حدود هرمايت للاستكمال الداخلي من رتبة لا تزيد على 5 لتقريب f(1.03) مستخدمًا $x_0 = 1, x_1 = 1.05$ و $x_2 = 1.07$. قارن الخطأ الحقيقي بحد الخطأ.

7. استخدم صيغة الخطأ و Maple لإيجاد حد للأخطاء عند تقريبات $f(x)$ في الرأسين (أ) و(ج) من التمرين (3).

8. استخدم صيغة الخطأ و Maple لإيجاد حد للأخطاء عند تقريبات $f(x)$ في الفقرتين (أ) و(ج) من التمرين (4).

9. يتضمن الجدول الآتي بيانات للدّالة $f(x) = e^{0.1x^2}$. اعمل التقريب $f(1.25)$ باستخدام $H_5(1.25)$ و$H_3(1.25)$ حيث يستخدم H_5 النقاط $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ ويستخدم H_3 النقاطتين $\bar{x}_0 = 1$ و$\bar{x}_1 = 1.5$. أوجد حدود خطأ هذه التقريبات.

x	$f(x) = e^{0.1x^2}$	$f'(x) = 0.2xe^{0.1x^2}$
$x_0 = \bar{x}_0 = 1$	1.105170918	0.2210341836
$\bar{x}_1 = 1.5$	1.252322716	0.3756968148
$x_1 = 2$	1.491824698	0.5967298792
$x_2 = 3$	2.459603111	1.475761867

10. تتحرك سيارة على طريق مستقيم، وتسجل بياناتها عند نقاط كثيرة. وتظهر هذه البيانات في الجدول الآتي، حيث يمثّل الزمن (Time) بالثانية، والمسافة (Distance) بالقدم، والسرعة (Speed) بالقدم لكل ثانية.

الوقت	0	3	5	8	13
المسافة	0	225	383	623	993
السرعة	75	77	80	74	72

أ. استخدم كثيرة حدود هرمايت لتخمين موقع السيارة وسرعتها عند الثانية العاشرة $t = 10\text{ s}$.

ب. استخدم مشتقة كثيرة حدود هرمايت لتحديد ما إذا كان من الممكن للسيارة أن تتجاوز سرعة 55 mi/h على الطريق. وإذا كان ذلك فما هي المرة الأولى التي تتجاوز فيها السيارة هذه السرعة؟

ج. ما السرعة القصوى المتوقَّعة لهذه السيارة؟

11. أ. أثبت أن $H_{2n+1}(x)$ كثيرة الحدود الوحيدة بأقل رتبة تتوافق مع f و f' عند $x_0, \ldots, x_n$.

[إرشاد: افترض $P(x)$ كثيرة حدود أخرى، وافترض $D = H_{2n+1} - P$ و D' عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$.]

ب. اشتق حد الخطأ في المبرهنة (9.3). [إرشاد: استخدم طريقة لاجرانج نفسها لاشتقاق الخطأ]. وتعرّف المبرهنة (3.3)

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{(t - x_0)^2 \cdots (t - x_n)^2}{(x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2}[f(x) - H_{2n+1}(x)]$$

مع استخدام حقيقة كون $g'(t)$ لها $(2n + 2)$ من الأصفار المختلفة ضمن $[a, b]$.

12. ليكن $z_0 = x_0, z_1 = x_0, z_2 = x_1, z_3 = x_1$. ومن جدول الفرق المنقسم الآتي

$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$			
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$		
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2]$	
		$f[z_1, z_2]$		$f[z_0, z_1, z_2, z_3]$
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3]$	
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$		
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$			

أثبت أن كثيرة حدود هرمايت التكعيبية $H_3(x)$ يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$f[z_0] + f[z_0, z_1](x - x_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - x_0)^2 + f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - x_0)^2(x - x_1)$$

4.3 استكمال الشريحة التكعيبية (1) Cubic Spline Interpolation

ركَّزت البنود السابقة على تقريب دوالّ عشوائية ضمن فترات مغلقة مستخدمة كثيرات الحدود. ولأن طبيعة كثيرات الحدود ذات الرتبة العليا متذبذبة، ولأن هذا التذبذب ضمن جزء من الفترة يمكنه تحفيز تذبذبات كبيرة ضمن كامل المدى، فذلك يحد من استخدامها.وسوف نرى مثالًا جيدًا لذلك في شكل (13.3) في نهاية هذا الفصل. ويعمل المنهج البديل على تقسيم الفترة إلى فترات جزئية، وإنشاء كثيرة حدود مختلفة عند كل فترة جزئية (عمومًا). ويسمى التقريب بدوالّ من هذا النوع (التقريب بكثيرة حدود متقطعة)

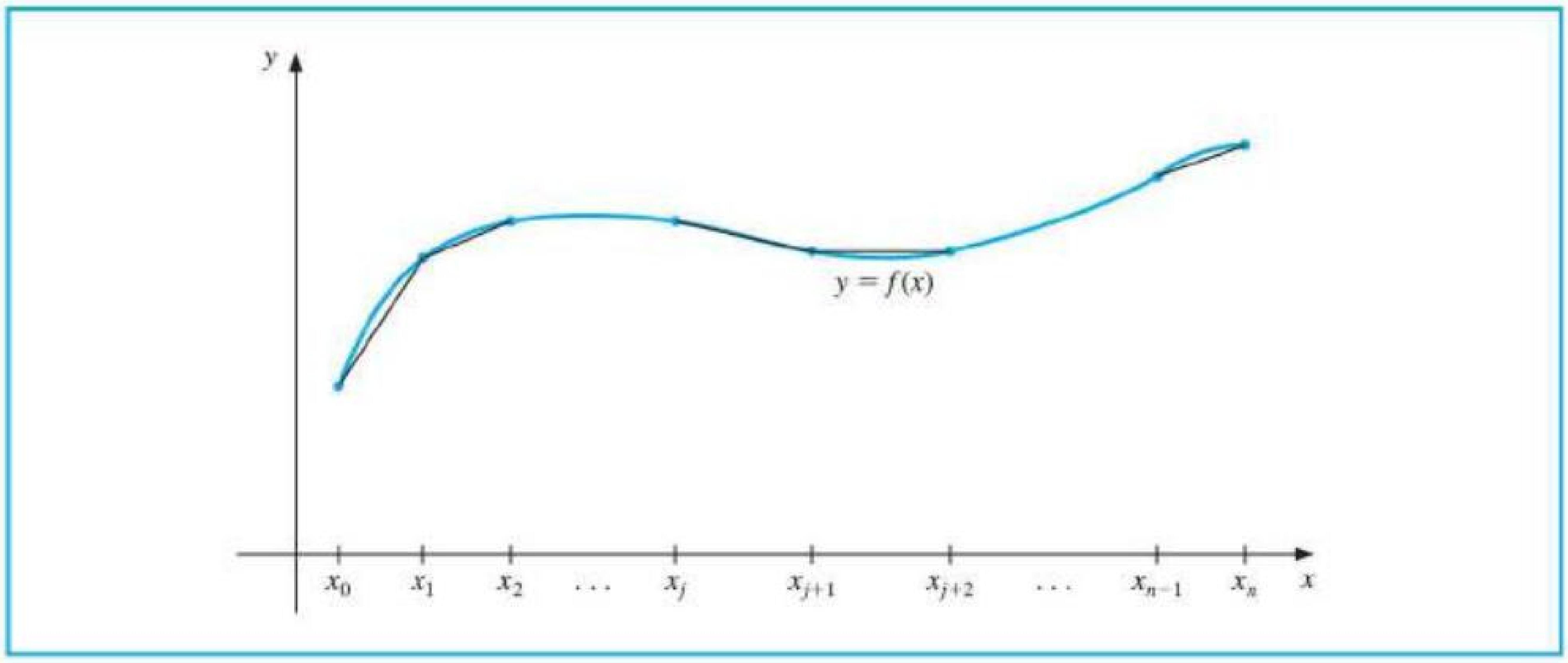
(1) إن براهين المبرهنات في هذا الفصل تعتمد النتائج في الباب 6 .

piecewise-polynomial approximation. وأبسط تقريب بكثيرة حدود متقطعة هو استكمال داخلي خطي متقطع، الذي يتضمن ربط مجموعة من نقاط البيانات

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$$

من خلال سلسلة من الخطوط المستقيمة كما في شكل (7.3).

شكل 7.3



يكمن الجانب السلبي للتقريب بدالّة خطية في عدم وجود التفاضل على الأرجح عند أطراف الفترات الجزئية الذي يعني أن دالّة الاستكمال الداخلي ليست ملساء (ناعمة) في المفهوم الهندسي. وهذه النعومة مطلوبة وفقًا للشروط الفيزيائية، وأخيرًا فإنه يجب في دالّة التقريب أن تكون قابلة للتفاضل على نحو متصل. والإجراء البديل هو استخدام كثيرة حدود متقطعة من نوع هرمايت. على سبيل المثال، إذا كانت قيم f وf' معروفة لكل من النقاط $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ فإن كثيرة حدود هرمايت التكعيبية يمكن استخدامها على كل واحدة من المجموعات الجزئية $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ لإيجاد دالّة ذات مشتقة متصلة على الفترة $[x_0, x_n]$. ولتحديد كثيرة حدود هرمايت تكعيبية مناسبة على فترة معلومة؛ فإنها مجرد عملية حساب $H_3(x)$ لتلك الفترة ببساطة. ولأن كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي التي نحتاج إليها لغرض تحديد H_3 هي من الرتبة الأولى، فإن من السهل تحقيق ذلك. على أي حال لكي نستخدم كثيرات حدود هرمايت المتقطعة للاستكمال الداخلي العام؛ نحتاج إلى معرفة مشتقة الدّالة التي نعمل على تقريبها، وغير متوفّر غالبًا.

لقد طوّر إسحق يعقوب شونبرغ (1903-1990) Isaac Jacob Schoenberg عمله حول الأخاديد خلال الحرب العالمية الثانية في أثناء مغادرته جامعة بنسلفانيا للعمل في مختبر البحوث البلستية العسكري في أبردين/ميريلاند. وتضمن عمله الأساسي عمليات عددية لحل المعادلات التفاضلية. إن التطبيق الأوسع للأخاديد في مجالات مواءمة البيانات والتصميم الهندسي عن طريق الحاسوب قد أصبح واضحًا مع الانتشار الواسع للحاسبات خلال الفترة (1960s).

يتناول بقية هذا الفصل التقريب مستخدمًا كثيرات حدود متقطعة لا تحتاج إلى معلومات اشتقاقية، إلا ربما عند أطراف الفترة التي تُقرّب إليها.

وأبسط أنواع الدّالة لكثيرة حدود متقطعة وقابلة للتفاضل على كامل الفترة $[x_0, x_n]$ هي الدّالة الناتجة عن توفيق كثيرة حدود تكعيبية واحدة ما بين كل زوج متتالٍ من الرؤوس. وهذا ينفذ من خلال إنشاء تكعيبي واحد على $[x_0, x_1]$ متوافق مع الدّالة عند x_0 و x_1، وتكعيبي آخر على $[x_1, x_2]$ متوافق مع الدّالة عند x_0 و x_1 وهكذا. وحيث إن لكثيرة الحدود التكعيبية العامة ثلاثة ثوابت عشوائية (الحد الثابت، معامل x، ومعامل x^2)، وهناك حاجة إلى شرطين فقط لتوفيق البيانات على نقطتي

الطرفين لكل فترة جزئية، فثمة مرونة تسمح باختيار التكعيبي على أن يكون للاستكمال الداخلي مشتقة متصلة على $[x_0, x_n]$.

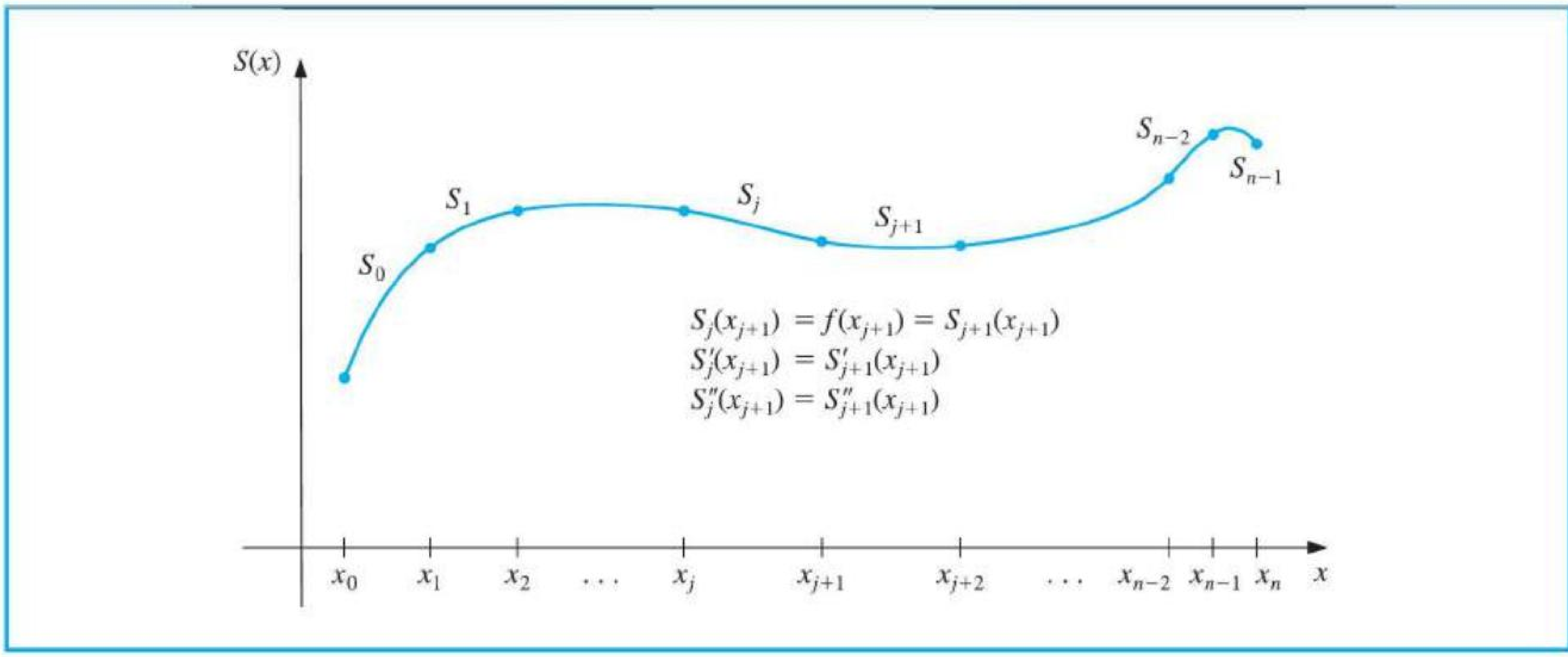
وثمة صعوبة تبرز عند الحاجة إلى توصيف شروط حول مشتقة الاستكمال الداخلي على نقطتي الطرفين x_0 و x_n.

ولا يوجد عدد مناسب من الثوابت لضمان كون الشروط ستتحقّق. (انظر تمرين 26).

يستخدم التقريب الشائع لكثيرة الحدود المتقطعة كثيرات حدود تكعيبية ما بين كل زوج متتالٍ من النقاط ويُسمّى "استكمال الشريحة التكعيبية Cubic Spline Interpolation". وتتضمن كثيرة الحدود التكعيبية العامة 4 ثوابت، ومن ثم توجد مرونة كافية في عملية الشريحة التكعيبية؛ لضمان كون الاستكمال الداخلي ليس قابلًا للاشتقاق على نحو متصل على الفترة فقط، وإنما له مشتقة متصلة ثانية أيضًا. إن عملية إنشاء الشريحة التكعيبية لا تفترض توافقًا ما بين مشتقة الاستكمال الداخلي وتلك المعدّة للدّالة قيد التقريب، حتى عند الرؤوس. (انظر شكل 8.3).

إن أصل كلمة أخدود spline هو نفسه splint. وكان في الأصل عبارة عن شريط خشبي يمكن استخدامه لربط لوحين. وبعد ذلك استخدمت الكلمة للإشارة إلى شريط مرن وطويل من المعدن على نحو عام. ويمكن استخدامه لرسم منحنيات متصلة ومنتظمة عن طريق جعل الشريط يمر عبر نقاط محددة واقعة على طول المنحنى.

شكل 8.3



تعريف 10.3

لتكن الدّالة f معرفة على $[a, b]$، وعند النقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. عندئذ يكون الاستكمال الداخلي للشريحة التكعيبية S للدّالة f هو دالّة تحقّق الشروط الآتية:

أ. $S(x)$ كثيرة حدود تكعيبية، ويكتب $S_j(x)$ على الفترة $[x_j, x_{j+1}]$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-1$

ب. $S_j(x_j) = f(x_j)$ و $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-1$

ج. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-2$

د. $S_{j+1}'(x_{j+1}) = S_j'(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-2$

هـ. $S_{j+1}''(x_{j+1}) = S_j''(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-2$

و. تتحقّق إحدى المجموعات الآتية من شروط الحدود:

1. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (حدود طبيعية أو حرّة).
2. $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$ (حدود متشابكة).

الشـريحة الحرّة ليسـت لها شروط مفروضـة بشـأن الاتجـاه عنـد أطرافها. من ثم يأخذ المنحنى شكل الخط المستقيم بعد مروره عبر نقاط الاسـتكمال الداخلـي وبالقرب من أطرافها. الشرائح الحرّة هي الشكل الطبيعي المفترض من قبل الشـريط المـرن إذا مـرّ عبر نقاط اسـتكمال داخلي محددة ودون قيود إضافية.

وعلى الرغم من أن الشرائح التكعيبية معرّفة بشروط حدودية أخرى، فإن الشروط المبينة في (و) أعلاه تعدّ كافية لتحقيق أغراضنا. وعندما تظهر الشروط الحدودية الحرّة تُدعى الشريحة بالشريحة الطبيعية natural spline، وإن رسمه البياني يقارب شكل قضيب طويل ومرن يدفع عبر نقاط البيانات $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$

وعمومًا تؤدي شروط الحدود المتشابكة إلى تقريب أدق؛ لأنها تتضمن معلومات أكثر حول الدّالة. ولكي يتحقّق مثل هذا النوع من الشرط الحدودي، فمن الضروري معرفة إماً قيم الاشتقاق عند الأطراف، وإما تقريب دقيق لكثيرات الحدود التكعيبية

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

ولكون $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$؛ فإن الشرط (ج) يمكن تطبيقه للحصول على

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 2$.

ونظرًا لاستخدام الحدود $x_{j+1} - x_j$ استخدامًا متكررًا في هذا التطوير، يكون من المناسب تقديم تعبير أبسط

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

تشابك الشريحة. يشـير إلى تثبيت نهايتي الشـريط المـرن لجعله يأخذ اتجاهـًا محـددًا عنـد كل طـرف. هـذا ضروري ومثال علـى ذلك حالة وجوب تطابق دالّتي شـريحتين عند أطرافهما. حيث يحدث ذلك رياضيًا من خلال تحديد قيم المُشتقة للمنحنى عند أطراف الشريحة.

لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. وإذا ما عرّفنا $a_n = f(x_n)$ أيضًا فإن الصيغة

$$a_{j+1} = a_j + b_jh_j + c_jh_j^2 + d_jh_j^3 \tag{15.3}$$

تتحقّق لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

وبالأسلوب نفسه عرّف $b_n = S'(x_n)$ ولاحظ أن

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

تعطي $S_j'(x_j) = b_j$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. وبتطبيق الشرط (د) نحصل على

$$b_{j+1} = b_j + 2c_jh_j + 3d_jh_j^2 \tag{16.3}$$

لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

نحصل على علاقة أخرى ما بين معامل S_j من خلال تعريف $c_n = S''(x_n)/2$ وتطبيق الشرط (ج). وأخيرًا لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$، نجد أن

$$c_{j+1} = c_j + 3d_jh_j \tag{17.3}$$

وعند حل d_j في الصيغة (17.3) وتعويض هذه القيمة في المعادلتين (15.3) و(16.3) نحصل على الصيغة الجديدة الآتية لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

$$a_{j+1} = a_j + b_jh_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \tag{18.3}$$

و

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \tag{19.3}$$

تتضمن العلاقة الأخيرة إيجاد المعامل من خلال حل الصيغة المناسبة بصيغة الصيغة (18.3)، ولـِ b_j أولًا،

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \qquad (20.3)$$

ويكون حل b_{j-1} بتخفيض الدليل بعد ذلك، وهذا يعطي

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j)$$

وبتعويض هذه القيم في الصيغة (19.3) مع حصول تخفيض واحد للدليل، نحصل على نظام خطي من الصيغ

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \qquad (21.3)$$

لكل $j = 1, 2, \ldots, n-1$. يتضمن هذا النظام القيم المجهولة $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ فقط؛ لأن قيم $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ و $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ معلومة من خلال المباعدة ما بين النقاط $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ وقيم f عند النقاط على التوالي.

لاحظ أنه حالما تحدّد قيم $\{c_j\}_{j=0}^{n}$، يصبح من السهل إيجاد ما تبقّى من الثوابت $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ من الصيغة (20.3) و $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ من الصيغة (17.3)، ومن ثم إنشاء كثيرات حدود تكعيبية $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$.

والسؤال الرئيس الذي يبرز عند الربط بهذا الإنشاء هو: هل يمكن إيجاد قيم $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ باستخدام نظام الصيغ المبينة في (21.3)؟ وإذا كان كذلك فهل تكون هذه القيم وحيدة؟ تشير النظريات الآتية إلى أن الحالة هي نفسها عندما نفترض أيًّا من شروط الحدود المبينة في (و) من التعريف. وتتطلب براهين هذه النظريات مواد من الجبر الخطي سنناقشها في الفصل 6.

مبرهنة 11.3 إذا كانت f معرفة عند $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ فإن لها استكمالًا داخليًّا لشريحة طبيعية وحيدة S عند النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$، بمعنى أن استكمالًا داخليًّا للشريحة يحقّق الشروط الحدودية $S''(a) = 0$ و $S''(b) = 0$. ■

البرهان تشير الشروط الحدودية في هذه الحالة إلى أن $c_n = S''(x_n)/2 = 0$ وأن

$$0 = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0)$$

وبذلك فإن $c_0 = 0$. المكرّرتان $c_0 = 0$ و $c_n = 0$ مع الصيغ في (21.3) تعطي معًا نظامًا خطيًّا يتضح من خلال $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، حيث إن A هي المصفوفة $(n+1) \times (n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وكل من $\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}$ عبارة عن المتجهات

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

يغلب على المصفوفة A سمة القطرية، لذلك فإنها تفي بفرضيات المبرهنة (19.6) من الفصل (6.6).

وعندئذ فإن للنظام الخطي حلًا وحيدًا لـ $c_0, c_1, \ldots, c_n$. ■ ■ ■

ويمكن إيجاد حل مسألة الشريحة التكعيبية مع الشروط الحدودية $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ من خلال تطبيق الخوارزمية (4.3).



الشريحة التكعيبية الطبيعية Natural Cubic Spline

لإنشاء الاستكمال الداخلي للشريحة التكعيبية S الخاص بالدّالة f، معرفًا عند الأعداد $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ولتحقّق $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$؛

المدخلات: $n; x_0, x_1, \ldots, x_n; a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \ldots, a_n = f(x_n)$

المخرجات: a_j, b_j, c_j, d_j لكل $j = 0, 1, \ldots, n-1$

إرشاد:

$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$ لكل $x_j \le x \le x_{j+1}$.

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ضع $h_i = x_{i+1} - x_i$
2	عند $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ضع $\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$
3	ضع $l_0 = 1$ (تنفذ الخطوات 3، 4، 5 وجزء من الخطوة 6 نظامًا خطيًا ثلاثي القطر باستخدام طريقة موضحة في الخوارزمية (7.6).) $\mu_0 = 0$ $z_0 = 0$
4	عند $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ضع $l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}$ $\mu_i = h_i / l_i$ $z_i = (\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1}) / l_i$



ضع $l_n = 1$ $z_n = 0$ $c_n = 0$	5
عند $j = n-1, n-2, \ldots, 0$ ضع $c_j = z_j - \mu_j c_{j+1}$ $b_j = (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3$ $d_j = (c_{j+1} - c_j)/(3h_j)$	6
الخرجات (a_j, b_j, c_j, d_j إلى $j = 0, 1, \ldots, n-1$) توقف.	7

■

مثال 1 أعطينا في بداية الباب الثالث بعض كثيرات حدود تايلور لتقريب الدّالة الأسيّة $f(x) = e^x$. وهنا سنستخدم شريحة طبيعية ونقاط البيانات $(0, 1), (1, e), (2, e^2), (3, e^3)$ لغرض

أ. تكوين دالّة تقريب $S(x)$

ب. مقارنة تكاملات f و S على الفترة $[0, 3]$.

(أ) لدينا $n = 3, h_0 = h_1 = h_2 = 1, a_0 = 0, a_1 = e, a_2 = e^2, a_3 = e^3$. لذا فالمصفوفة والمتجهات $\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}$ مبينة أدناه في المبرهنة (11.3).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(e^2 - 2e + 1) \\ 3(e^3 - 2e^2 + e) \\ 0 \end{bmatrix}$$

وصيغة مصفوفة المتّجه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مكافئة لنظام الصيغ

$$c_0 = 0$$

$$c_0 + 4c_1 + c_2 = 3(e^2 - 2e + 1)$$

$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 3(e^3 - 2e^2 + e)$$

$$c_3 = 0$$

ذات الحل $c_0 = c_3 = 0$

$$c_1 = \tfrac{1}{5}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 0.756852643 \quad \text{و} \quad c_2 = \tfrac{1}{5}(4e^3 - 9e^2 + 6e - 1) = 5.83006675$$

وحل بقية الثوابت يعطينا

$$b_0 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = (e - 1) - \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 1.465997614$$

$$b_1 = \frac{1}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$$

$$= (e^2 - e) - \frac{1}{15}(2e^3 + 3e^2 - 12e + 7) = 2.222850257$$

$$b_2 = \frac{1}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2)$$
$$= (e^3 - e^2) - \frac{1}{15}(8e^3 - 18e^2 + 12e - 2) = 8.809769651$$
$$d_0 = \frac{1}{3h_0}(c_1 - c_0) = \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 0.252284214$$
$$d_1 = \frac{1}{3h_1}(c_2 - c_1) = \frac{1}{3}(e^3 - 3e^2 + 3e - 1) = 1.691071368$$

$$d_2 = \frac{1}{3h_2}(c_3 - c_1) = \frac{1}{15}(-4e^3 + 9e^2 - 6e + 1) = -1.943355583$$

المبينة في جدول (15.3).

جدول 15.3

j	x_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0	1	1.465997614	0	0.252284214
1	1	2.718281828	2.222850257	0.756852643	1.691071368
2	2	7.389056099	8.809769651	5.83006675	−1.943355583
3	3	20.08553692			

ويعطي استخدام قيم تقريبية للثوابت الشريحة التكعيبية الطبيعية من خلال الصيغة

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 1.46600x + 0.25228x^3 & \text{إذا كان } 0 \le x < 1 \\ 2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + 1.69107(x-1)^3 & \text{إذا كان } 1 \le x < 2 \\ 7.38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - 1.94336(x-2)^3 & \text{إذا كان } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

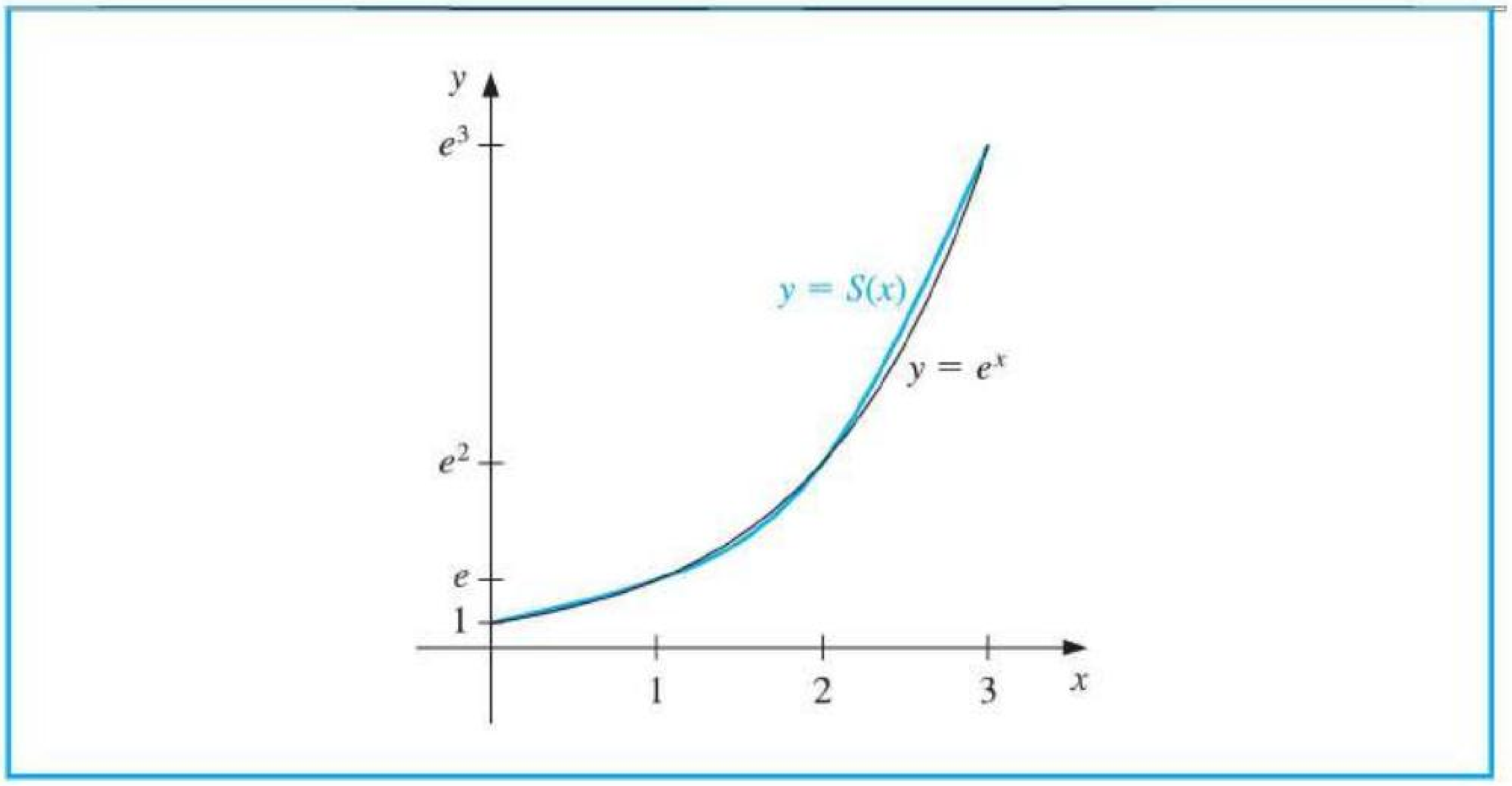
مجزّأة الشريحة وتوافقها مع $f(x) = e^x$ المبيَّن في شكل (9.3).

(ب) لتقريب تكامل f على $[0, 3]$ ذي القيمة

$$\int_0^3 e^x\,dx = e^3 - 1 = 20.08553692 - 1 = 19.08553692$$

نجمّع الشريحة تجزيئيًّا لتعطي

$$\int_0^3 S(x) = \int_0^1 1 + 1.46600x + 0.25228x^3\,dx$$
$$+ \int_1^2 2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + 1.69107(x-1)^3\,dx$$
$$+ \int_2^3 7.38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - 1.94336(x-2)^3\,dx$$



شكل 9.3

وبتكامل القيم ذات القوى المتشابهة وتجميعها نحصل على

$$\int_0^3 S(x) = x + 1.46600\frac{x^2}{2} + 0.25228\frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$+2.71828(x-1) + 2.22285\frac{(x-1)^2}{2} + 0.75685\frac{(x-1)^3}{3} + 1.69107\frac{(x-1)^4}{4}\Big|_1^2$$

$$+7.38906(x-2) + 8.80977\frac{(x-2)^2}{2} + 5.83007\frac{(x-2)^3}{3} - 1.94336\frac{(x-2)^4}{4}\Big|_2^3$$

$$= (1 + 2.71828 + 7.38906) + \frac{1}{2}(1.46600 + 2.22285 + 8.80977)$$

$$+ \frac{1}{3}(0.75685 + 5.83007) + \frac{1}{4}(0.25228 + 1.69107 - 1.94336)$$

$$= 19.55228750$$

وبسبب التباعد المتساوي ما بين النقاط في هذا المثال، فالتقريب التكاملي هو

$$\int_0^3 S(x)\,dx = (a_0 + a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2) + \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2) + \frac{1}{4}(d_0 + d_1 + d_2).$$ ■

وفي حالة الشروط الحدودية المتشابكة لدينا نتيجة مشابهة لمبرهنة الشروط الحدودية الطبيعية الموضحة في المبرهنة (11.3).

مبرهنة 12.3 إذا كانت f معرّفة عند $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ وقابلة للاشتقاق عند a و b، فإن لـ f استكمالًا داخليًّا متشابكًا وحيدًا للشريحة S عند النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$، بمعنى أن استكمالًا داخليًّا للشريحة يحقّق الشروط الحدودية $S'(a) = f'(a)$ و $S'(b) = f'(b)$. ■

البرهان بما أن $f'(a) = S'(a) = S'(x_0) = b_0$ تعطي الصيغة (3.20) مع $j = 0$

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

وبناءً على ذلك

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

وبالمثل

$$f'(b) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$$

لذا فالصيغة (20.3) مع $j = n - 1$ تعطي

$$\begin{aligned} f'(b) &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n) \\ &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1} + 2c_n) \end{aligned}$$

و

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

تحدد الصيغة (21.3) والصيغ معًا

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

و

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

يغلب على المصفوفة A سمة القطرية، ولذلك فإنها تفي بفرضيات المبرهنة (19.6). من ثَمَّ فإن للنظام الخطي حلًّا واحدًا لـ $c_0, c_1, \ldots, c_n$. ■ ■ ■

يمكن إيجاد حل مسألة الشريحة التكعيبية مع الشروط الحدودية $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$ من خلال تطبيق الخوارزمية (5.3).

ALGORITHM
الخوارزمية
5.3

الشريحة التكعيبية المتشابكة Clamped Cubic Spline

لإنشاء الاستكمال الداخلي للشريحة التكعيبية S الخاص بالدّالة f، معرفًا عند الأعداد $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ولتحقّق $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$؛

المدخلات: $n; x_0, x_1, \ldots, x_n; a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \ldots, a_n = f(x_n)$.

المخرجات: a_j, b_j, c_j, d_j لكل $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

إرشاد:

$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$ لكل $x_j \le x \le x_{j+1}$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ضع $h_i = x_{i+1} - x_i$
2	ضع $\alpha_0 = 3(a_1 - a_0)/h_0 - 3FPO$ $\alpha_n = 3FPN - 3(a_n - a_{n-1})/h_{n-1}$
3	عند $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ضع $\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$
4	ضع $l_0 = 2h_0$ (تنفذ الخطوات 4، 5، 6 وجزء من الخطوة ٧ نظامًا خطيًا ثلاثي القطر باستخدام طريقة موضحة في الخوارزمية (7.6).) $\mu_0 = 0.5$ $z_0 = \alpha_0/l_0$
5	عند $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ضع $l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}$ $\mu_i = h_i/l_i$ $z_i = (\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1})/l_i$
6	ضع $l_n = h_{n-1}(2 - \mu_{n-1})$ $z_n = (\alpha_n - h_{n-1}z_{n-1})/l_n$ $c_n = z_n$
7	عند $j = n-1, n-2, \ldots, 0$ ضع $c_j = z_j - \mu_j c_{j+1}$ $b_j = (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3$ $d_j = (c_{j+1} - c_j)/(3h_j)$
8	المخرجات (a_j, b_j, c_j, d_j لِـ $j = 0, 1, \ldots, n-1$) توقف.

■

مثال 2 استخدمنا في المثال (1) شريحة طبيعية ونقاط البيانات $(0,1), (1,e), (2,e^2), (3,e^3)$ لتكوين دالّة تقريب $S(x)$ إلى $f(x)=e^x$، ومن ثم استخدمناه لتقريب $\int_0^3 e^x\,dx$. سوف نقارن في هذا المثال بين أ. الشريحة المتشابكة لهذه الدّالة على $[0,3]$ وب. تقريب التكامل المعطى من خلال تكامل الشريحة المتشابكة.

أ. مرة أخرى لدينا $n=3, h_0=h_1=h_2=1, a_0=0, a_1=e, a_2=e^2, a_3=e^3$. ولدينا $f'(x)=e^x$ أيضًا، وأخيرًا $f'(0)=1$ و $f'(3)=e^3$. وعندئذ فإن المصفوفة A والمتجهات $\mathbf{b}$ و$\mathbf{x}$ مبينة أدناه في المبرهنة (12.3):

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&4&1&0\\0&1&4&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}3(e-2)\\3(e^2-2e+1)\\3(e^3-2e^2+e)\\3e^2\end{bmatrix}$$

وصيغة مصفوفة المتّجه $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ مكافئة لنظام الصيغ

$$2c_0+c_1=3(e-2)$$

$$c_0+4c_1+c_2=3(e^2-2e+1)$$

$$c_1+4c_2+c_3=3(e^3-2e^2+e)$$

$$c_2+2c_3=3e^2$$

وبحل هذا النظام لـ c_0, c_1, c_2, c_3 آنيًّا نحصل على

$$c_0=\tfrac{1}{15}(2e^3-12e^2+42e-59)$$

$$c_1=\tfrac{1}{15}(-4e^3+24e^2-65e+28)$$

$$c_2=\tfrac{1}{15}(14e^3-39e^2+24e-8)$$

$$c_3=\tfrac{1}{15}(-7e^3+42e^2-12e+4)$$

وبحل بقية الثوابت بالأسلوب نفسه في المثال (1) نحصل على

$$b_0=1.00000000,\quad b_1=2.70446053,\quad b_2=0.34932619,$$

و

$$d_0=0.26789687,\quad d_1=0.71223817,\quad d_2=1.95636455.$$

ونشاهد النتائج الكاملة في جدول (16.3).

جدول 16.3

j	x_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0	1	1	0.45038496	0.26789687
1	1	2.718281828	2.70446053	1.25407557	0.71223817
2	2	7.389056099	7.34932619	3.39079008	1.95636455
3	3	20.08553692			

وباستخدام قيم تقريبية للثوابت نحصل على الشريحة التكعيبية المتشابكة الموضحة من خلال الصيغة المجزأة

$$S(x)=\begin{cases}1+x+0.45038x^2+0.26790x^3 & \text{إذا كان } 0\le x<1\\ 2.71828+2.70446(x-1)+1.25408(x-1)^2+0.71224(x-1)^3 & \text{إذا كان } 1\le x<2\\ 7.38906+7.34933(x-2)+3.39079(x-2)^2+1.95636(x-2)^3 & \text{إذا كان } 2\le x\le 3\end{cases}$$

وإن الرسم البياني للشريحة المتشابكة و $f(x) = e^x$ متشابهان تمامًا إلى رتبة عدم وجود أي فرق.

ب. لتقريب تكامل f على $[0, 3]$ الذي قيمته

$$\int_0^3 e^x\,dx = e^3 - 1 \approx 20.08553692 - 1 = 19.08553692$$

نجزِّئ تكامل الشريحة المتشابكة. وعلى صورة المثال السابق، يمكننا استخدام حقيقة كون النقاط متساوية التباعد لنستنتج أن

$$\int_0^3 S(x)\,dx = (a_0 + a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2) + \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2) + \frac{1}{4}(d_0 + d_1 + d_2)$$

لذا فإن تقريب التكامل هو

$$\begin{aligned}\int_0^3 S(x)\,dx = {} & (1 + 2.71828 + 7.38906) + \frac{1}{2}(1 + 2.70446 + 7.34933)\\ & + \frac{1}{3}(0.45038 + 1.25408 + 3.39079)\\ & + \frac{1}{4}(0.26790 + 0.71224 + 1.95636)\\ = {} & 19.06677.\end{aligned}$$

الخطأ المطلق في تقريب التكامل باستخدام الشريحتين المتشابكتين (Clamped) والطبيعي (Natural) هو

$$\text{Natural: } |19.08554 - 19.55229| = 0.46675$$

$$\text{Clamped: } |19.08554 - 19.06677| = 0.01877$$

عندئذ ولأغراض التكامل، فإن الشريحة المتشابكة أحسن بكثير. وعلينا ألا نفاجأ بذلك، لأن الشروط الحدودية للشريحة المتشابكة تكون على نحو محكم، أما في الشريحة الطبيعية فإننا نفترض، ولكون $f''(x) = e^x$ أن

$$0 = S''(x) \approx f''(0) = e^0 = 1$$

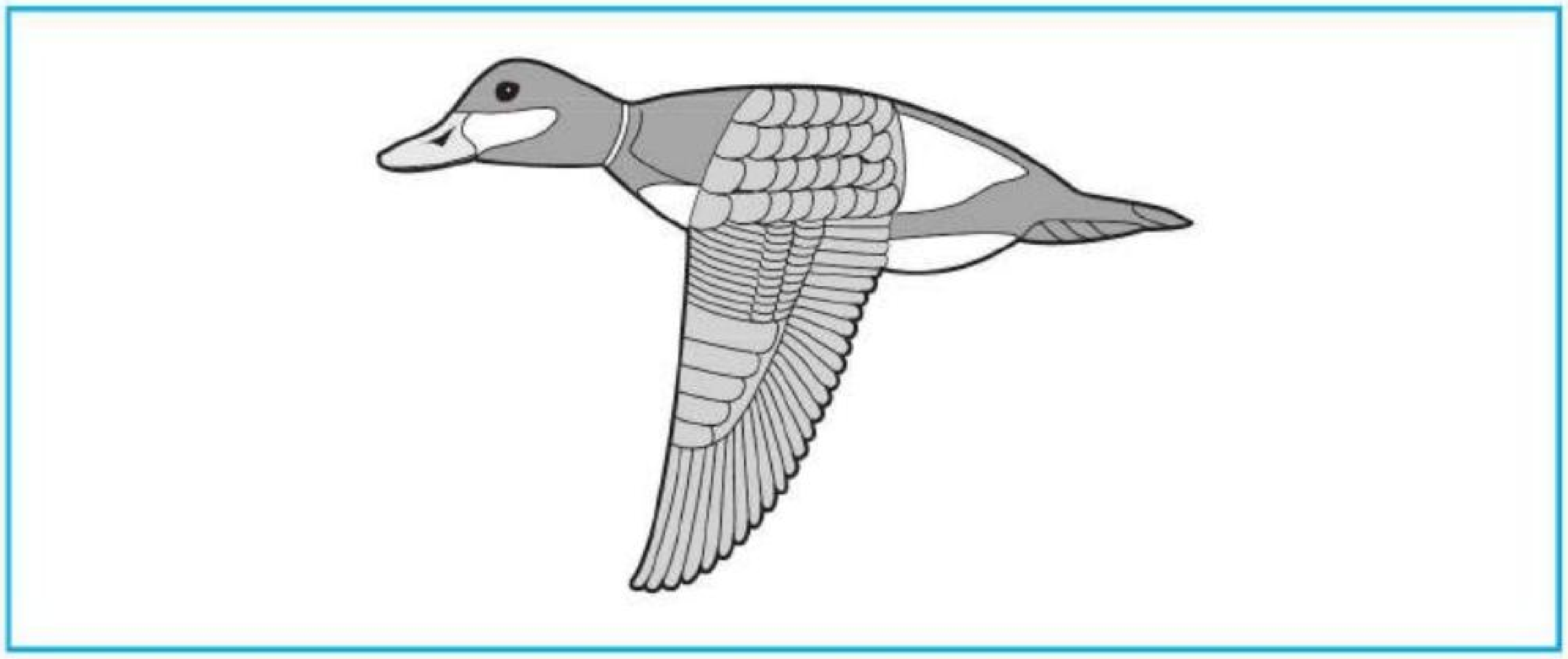
و

$$0 = S''(3) \approx f''(3) = e^3 \approx 20$$ ■

ويستخدم المثال الآتي الشريحة لتقريب منحنى ليس له تمثيل دالّي.

مثال 3 يبيِّن الشكل (10.3) البطة الحمراء في حالة طيران. لتقريب المخطط العلوي للبطة، اخترنا نقاطًا على امتداد المنحنى عبر المواضع التي نرغب في أن يمرّ بها المنحنى المقرب. ويبِّين جدول (17.3) إحداثيات 21 نقطة مقارنة بنظام الإحداثيات المبين في شكل (11.3). لاحظ استخدام نقاط إضافية عندما يتغير المنحنى بسرعة أكبر مما لو تغير ببطء.

شكل 10.3

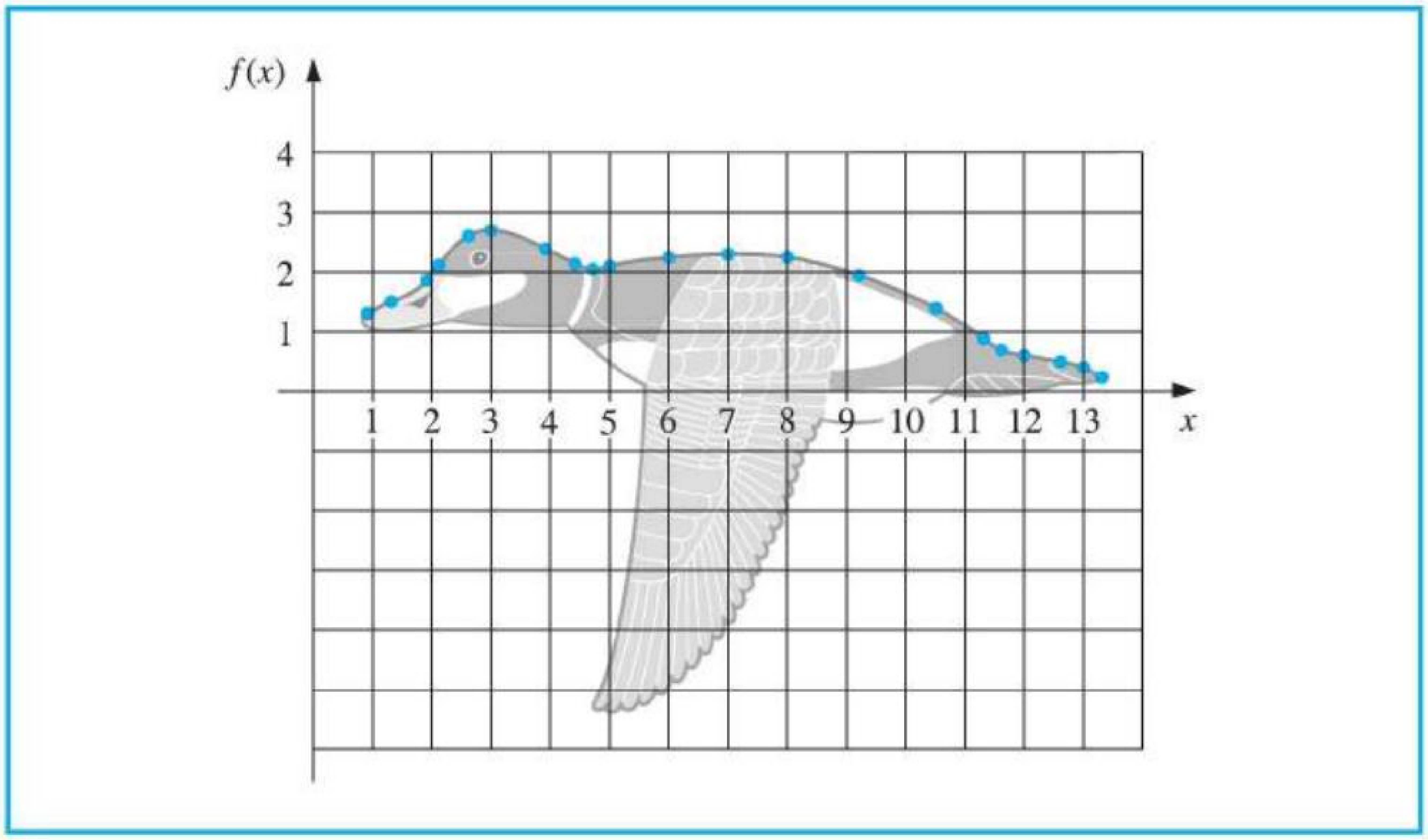


جدول 17.3

x	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3.0	3.9	4.4	4.7	5.0	6.0	7.0	8.0	9.2	10.5	11.3	11.6	12.0	12.6	13.0	13.3
$f(x)$	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4	2.15	2.05	2.1	2.25	2.3	2.25	1.95	1.4	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.25

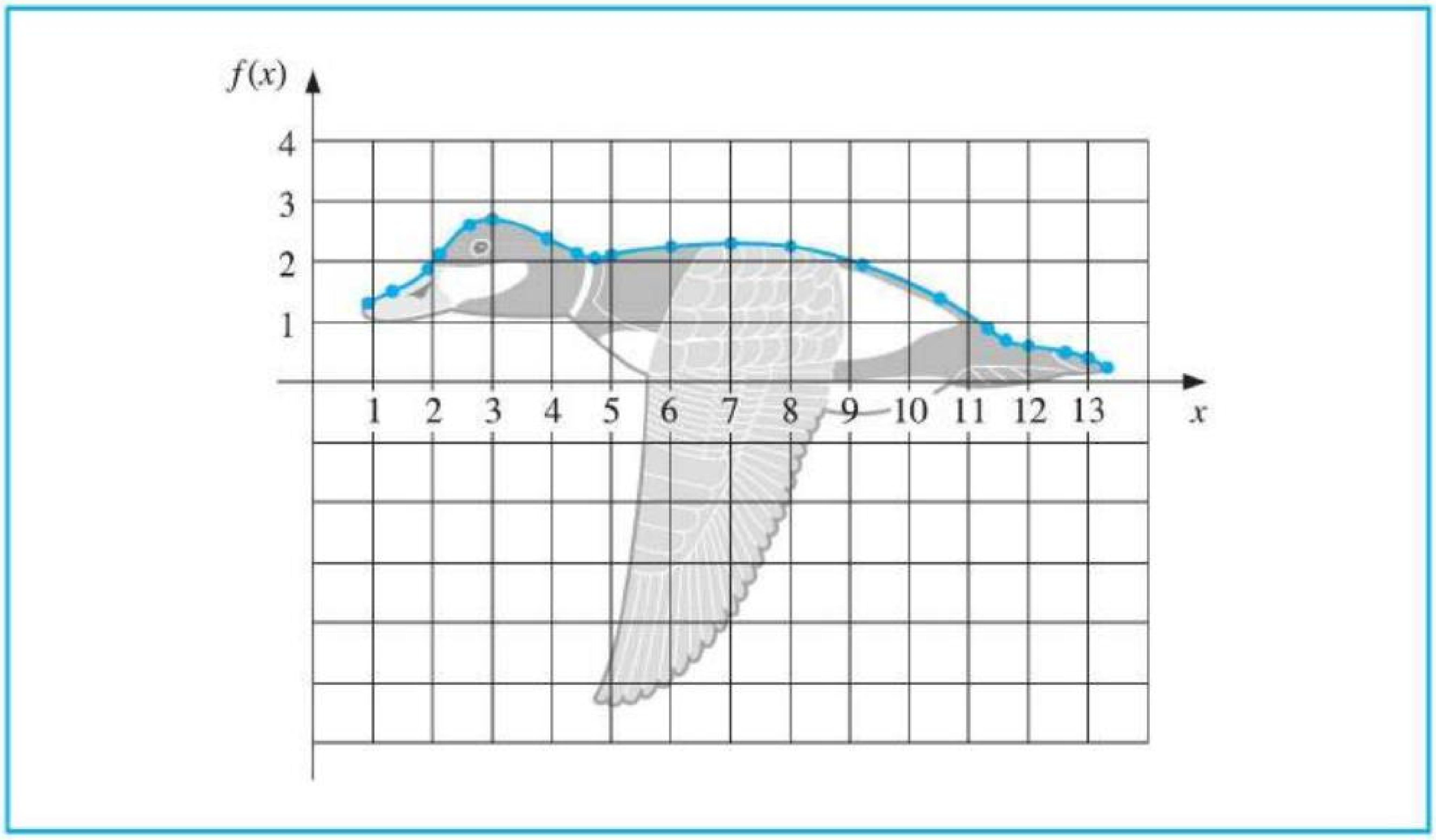
باستخدام الخوارزمية (4.3) لتوليد الشريحة التكعيبية الحرّة لهذه البيانات نحصل على المعاملات المبينة في الجدول (18.3). ومنحنى الشريحة هذا مشابه تقريبًا للمخطط الموضح في شكل (12.3).

شكل 11.3



جدول 18.3

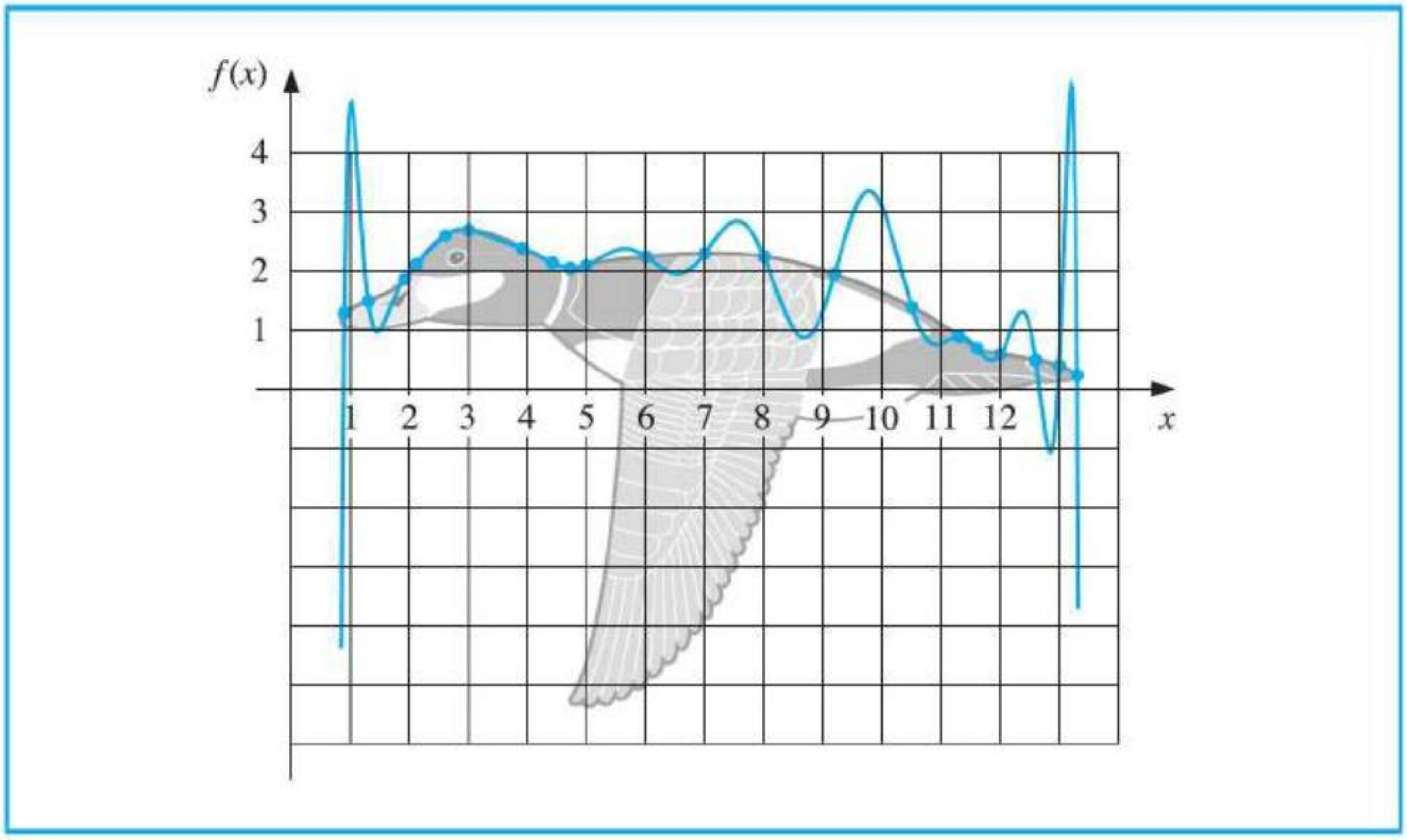
d_j	c_j	b_j	a_j	x_j	j
−0.25	0.00	5.44	1.3	0.9	0
0.95	−0.30	0.42	1.5	1.3	1
−2.96	1.41	1.09	1.85	1.9	2
−0.45	−0.37	1.29	2.1	2.1	3
0.45	−1.04	0.59	2.6	2.6	4
0.17	−0.50	−0.02	2.7	3.0	5
0.08	−0.03	−0.50	2.4	3.9	6
1.31	0.08	−0.48	2.15	4.4	7
−1.58	1.27	−0.07	2.05	4.7	8
0.04	−0.16	0.26	2.1	5.0	9
0.00	−0.03	0.08	2.25	6.0	10
−0.02	−0.04	0.01	2.3	7.0	11
0.02	−0.11	−0.14	2.25	8.0	12
−0.01	−0.05	−0.34	1.95	9.2	13
−0.02	−0.10	−0.53	1.4	10.5	14
1.21	−0.15	−0.73	0.9	11.3	15
−0.84	0.94	−0.49	0.7	11.6	16
0.04	−0.06	−0.14	0.6	12.0	17
−0.45	0.00	−0.18	0.5	12.6	18
0.60	−0.54	−0.39	0.4	13.0	19
			0.25	13.3	20



شكل 3.12

يعطي شكل (13.3) توضيحًا للمنحنى الذي وُلّد مستخدمًا كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي لتوفيق البيانات في جدول (17.3). وتتكوّن كثيرة حدود الاستكمال الداخلي في هذه الحالة من الرتبة 20، وتتغير بحدة منتجة توضيحًا غريبًا جدًّا لظهر البطة سواءً عند طيرانها أو غير ذلك.

شكل 13.3



ولاستخدام الشريحة المتشابكة لتقريب هذا المنحنى؛ سنحتاج إلى تقريبات اشتقاقية للنهايات. وحتى لو توافرت هذه التقريبات، يمكننا توقُّع تحسن طفيف؛ بسبب التوافق الكبير ما بين الشريحة التكعيبية الحرّة ومنحنى أعلى المخطط. ■

إن إنشاء أخدود متشابك لتقريب أسفل المخطط للبطة الحمراء سيكون أصعب؛ لأن منحنى هذا الجزء لا يمكن صياغته على شكل دالّة لـ x، وعند نقاط معينة لا يظهر المنحنى على نحو متّسق. ويمكن حل المشاكل باستخدام شرائح منفصلة لتمثيل نقاط مختلفة للمنحنى، ولكن الحل الأكثر فاعلية لمنحنيات من هذا النوع سنتناوله في الفصل الآتي.

شروط الحدود المتشابكة عمومًا هي المفضلة عندما تُقرّب الدّوال من خلال الشرائح التكعيبية، لذا يجب تقدير مشتقة الدّالة عند نهايات الفترة، وعند تساوي التباعد ما بين النقاط بالقرب من النهايتين، ويمكن إيجاد تقريبات باستخدام الصيغة (7.4) أو أيٍّ من الصيغ الأخرى المناسبة المذكورة في الفصلين (1.4 و 2.4). وعند عدم تساوي التباعد ما بين النقاط، فإن المسألة تغدو أصعب.

وكي نختم هذا الفصل، فإننا ندرج صيغة حد الخطأ للشريحة التكعيبية مع الشروط الحدودية المتشابكة. ويمكن إيجاد برهان هذه النتيجة في [Schul, pp. 57–58].

مبرهنة 13.3 ليكن $f \in C^4[a, b]$ وليكن $\max_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)| = M$. إذا كان S استكمالاً داخليًا للشريحة التكعيبية المتشابكة الوحيدة لـ f بالنسبة إلى النقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، فإنه لكل x في $[a, b]$ يكون لدينا

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{5M}{384} \max_{0\le j\le n-1} (x_{j+1} - x_j)^4$$

■

وينتج أيضًا حد خطأ من الرتبة الرابعة، وينتج أيضًا في حالة الشروط الحدودية الحرّة، ولكن من الصعوبة صياغتها. (انظر [BD, pp. 827–835]).

ستعطي الشروط الحدودية الحرّة نتائج أقل دقةً مقارنةً بالشروط المتشابكة قرب طرفي الفترة $[x_0, x_n]$ ما لم تكن الدّالة f مقتربةً من تحقيق $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$. ثمة بديل للشرط الحدودي الحرّ – ولا يتطلب معلومات عن مشتقة f– هو شرط اللاعقدة *not-a-knot* انظر ([Deb2, pp. 55–56]) . وهذا الشرط يتطلب كون $S'''(x)$ متصلة عند x_1 وعند x_{n-1}.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 4.3

1. حدِّد الشريحة التكعيبية الحرّة S التي تستكمل داخليًا البيانات $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$.

2. حدِّد الشريحة التكعيبية المتشابكة S التي تستكمل داخليًا البيانات $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$ وتحقّق $s'(0) = s'(2) = 1$.

3. أنشئ الشريحة التكعيبية الحرّة للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$
8.3	17.56492
8.6	18.50515

ب.

x	$f(x)$
0.8	0.22363362
1.0	0.65809197

ج.

x	$f(x)$
−0.5	−0.0247500
−0.25	0.3349375
0	1.1010000

د.

x	$f(x)$
0.1	−0.62049958
0.2	−0.28398668
0.3	0.00660095
0.4	0.24842440

4. أنشئ الشريحة التكعيبية الحرّة للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$
0	1.00000
0.5	2.71828

ب.

x	$f(x)$
−0.25	1.33203
0.25	0.800781

ج.

x	$f(x)$
0.1	−0.29004996
0.2	−0.56079734
0.3	−0.81401972

د.

x	$f(x)$
−1	0.86199480
−0.5	0.95802009
0	1.0986123
0.5	1.2943767

5. نتجت البيانات في التمرين (3) باستخدام الدّوال الآتية، استخدم الشرائح التكعيبية التي أنشئت في التمرين (3) لقيم x المبينة لتقريب $f(x)$ و $f'(x)$، واحسب الخطأ الحقيقي:

أ. $f(x) = x\ln x$ والتقريب إلى $f(8.4)$ و $f'(8.4)$

ب. $f(x) = \sin(e^x - 2)$ والتقريب إلى $f(0.9)$ و $f'(0.9)$

ج. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ والتقريب إلى $f(-\frac{1}{3})$ و $f'(-\frac{1}{3})$

د. $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x - 1$ والتقريب إلى $f(0.25)$ و $f'(0.25)$

6. نتجت البيانات في التمرين (3) باستخدام الدّوال الآتية، استخدم الشرائح التكعيبية التي أنشئت في التمرين (3) لقيم x المبينة لتقريب $f(x)$ و $f'(x)$، واحسب الخطأ الحقيقي:

أ. $f(x) = e^{2x}$ والتقريب إلى $f(0.43)$ و $f'(0.43)$

ب. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ والتقريب إلى $f(0)$ و $f'(0)$

ج. $f(x) = x^2\cos x - 3x$ والتقريب إلى $f(0.18)$ و $f'(0.18)$

د. $f(x) = \ln(e^x + 2)$ والتقريب إلى $f(0.25)$ و $f'(0.25)$

7. أنشئ الشريحة التكعيبية المتشابكة مستخدمًا بيانات التمرين (4) وحقيقة كون:

أ. $f'(8.3) = 1.116256$ و $f'(8.6) = 1.151762$

ب. $f'(0.8) = 2.1691753$ و $f'(1.0) = 2.0466965$

ج. $f'(-0.5) = 0.7510000$ و $f'(0) = 4.0020000$

د. $f'(0.1) = 3.58502082$ و $f'(0.4) = 2.16529366$

8. أنشئ الشريحة التكعيبية المتشابكة مستخدمًا بيانات التمرين (4) وحقيقة كون:

أ. $f'(0) = 2$ و $f'(0.5) = 5.43656$

ب. $f'(-0.25) = 0.437500$ و $f'(0.25) = -0.625000$

ج. $f'(0.1) = -2.8004996$ و $f'(0.3) = -2.4533949$

د. $f'(-1) = 0.15536240$ و $f'(0.5) = 0.45186276$

9. كرّر التمرين (5) مستخدمًا الشرائح التكعيبية المتشابكة التي أُنشئت في التمرين (7).

10. كرّر التمرين (6) مستخدمًا الشرائح التكعيبية المتشابكة التي أُنشئت في التمرين (8).

11. تعرّف شريحة تكعيبية طبيعية S على $[0, 2]$ من خلال

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & \text{إذا كان } 0 \le x < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & \text{إذا كان } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

جد b, c, d.

12. تعرّف شريحة تكعيبية متشابكة S للدّالة f على $[1, 3]$ من خلال

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3 & \text{إذا كان } 1 \le x < 2 \\ s_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 & \text{إذا كان } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

فإذا كان $f'(1) = f'(3)$ فجد a, b, c, d.

13. تعرّف شريحة تكعيبية طبيعية S من خلال

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3 & \text{إذا كان } 1 \le x < 2 \\ S_1(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3 & \text{إذا كان } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

فإذا كان S يستكمل البيانات داخليًا $(1, 1), (2, 1), (3, 0)$ فأوجد B, D, b, d .

14. تعرّف شريحة تكعيبية متشابكة S الخاص بالدّالة f من خلال

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & 0 \le x < 1 \text{ إذا كان } \\ s_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \text{ إذا كان } \end{cases}$$

أوجد $f'(0)$ و $f'(2)$.

15. أنشئ شريحة تكعيبية حرّة لتقريب $f(x) = \cos \pi x$ مستخدمًا القيم المعطاة من خلال $f(x)$ عند $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$.

أ. أنشئ تكاملًا للشريحة على امتداد [0,1]، وقارن النتيجة بـ $\int_0^1 \cos \pi x \, dx = 0$.

ب. استخدم مشتقات الشريحة لتقريب $f'(0.5)$ و $f''(0.5)$، وقارن هذه التقريبات بالقيم الحقيقية.

16. أنشئ شريحة تكعيبية حرّة لتقريب $f(x) = e^{-x}$ باستخدام القيم المعطاة من خلال $f(x)$ عند $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$.

أ. أنشئ تكاملًا للشريحة على امتداد [0,1]، وقارن النتيجة بـ $\int_0^1 e^{-x} \, dx = 1 - 1/e$.

ب. استخدم مشتقات الشريحة لتقريب $f'(0.5)$ و $f''(0.5)$، وقارن هذه التقريبات بالقيم الحقيقية.

17. كرّر التمرين (15) بإنشاء شريحة تكعيبية متشابكة بدلًا من حرّة مستخدمًا $f'(0) = f'(1) = 0$.

18. كرّر التمرين (16) بإنشاء شريحة تكعيبية متشابكة بدلًا من حرّة مستخدمًا $f'(0) = -1$، $f'(1) = -e^{-1}$.

19. افترض أن $f(x)$ كثيرة حدود من الرتبة 3. أثبت أن $f(x)$ هي شريحتها التكعيبية المتشابكة نفسها، لكن لا يمكن أن تكون شريحتها التكعيبية الحرّة.

20. افترض أن البيانات $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^n$ تقع على خط مستقيم. ما الذي يمكن قوله حول الشريحتين التكعيبيتين الحرّة والمتشابكة للدّالة f ؟ إرشاد: خذ تلميحًا عن نتائج التمرينين (1 و 2).

21. مفترضين التقسيمات $x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1$ لـ $[0, 0.1]$، أوجد دالّة استكمال داخلي خطي مجزّأ F إلى $f(x) = e^{2x}$. قرّب $\int_0^{0.1} e^{2x} \, dx$ بـ $\int_0^{0.1} F(x) \, dx$، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية.

22. ليكن $f \in C^2[a, b]$ ولتكن النقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ معلومة. اشتق تقديرًا للخطأ مشابهًا لما في المبرهنة (13.3)، لدالّة استكمال داخلي خطي مجزأة f. استخدم هذا التقدير لاشتقاق حدود خطأ من التمرين (21).

23. أنشئ توسيعًا للخوارزميات (4.3) و (5.3) لتشمل –ضمن المخرجات- المشتقتين الأولى والثانية للشريحة عند النقاط.

24. أنشئ توسيعًا للخوارزميتين (4.3) و (5.3) لتشمل –ضمن المخرجات– تكامل الشريحة على امتداد الفترة $[x_0, x_n]$.

25. مفترضين التقسيمات $x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1$ لـ $[0, 0.1]$ و $f(x) = e^{2x}$:

أ. أوجد الشريحة التكعيبية S مع الشروط الحدودية المتشابكة التي تستكمل داخليًا f.

ب. أوجد تقريبًا إلى $\int_0^{0.1} e^{2x} \, dx$ من خلال حساب $\int_0^{0.1} s(x) \, dx$.

ج. استخدم المبرهنة (13.3) لتقدير $\max_{0 \le x \le 0.1} |f(x) - s(x)|$ و $\left| \int_0^{0.1} f(x) \, dx - \int_0^{0.1} s(x) \, dx \right|$

د. حدِّد الشريحة التكعيبية S مع شروط حدودية حرّة، وقارن $S(0.02), s(0.02), e^{0.04} = 1.04081077$

26. لتكن الدّالة f معرفةً على $[a, b]$، ولتكن النقاط $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$ معلومة. أثبت أن دالّة شريحة الاستكمال الداخلي التربيعية S تتشكل من كثيرة حدود تربيعية

وكثيرة حدود تربيعية

$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2$ في $[x_0, x_1]$

$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2$ في $[x_1, x_2]$

بحيث

(i) $S(x_0) = f(x_0), S(x_1) = f(x_1)$ و $S(x_2) = f(x_2)$

(ii) $S \in C^1[x_0, x_2]$

أثبت أن الشرطين (i) و (ii) يؤديان إلى خمس صيغ في ستة مجاهيل $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$ تكمن المشكلة في تقرير الشرط الإضافي الذي نفترضه لجعل الحل وحيدًا. فهل الشرط $S \in C^2[x_0, x_2]$ يؤدي إلى حل ذي معنى؟

27. استخدم التمرين (26) لتحديد شريحة تكعيبية S تستكمل داخليًّا البيانات $f(0) = 0$ ، $f(1) = 1$ ، $f(2) = 2$ وتحقّق $s'(0) = 2$.

28. أ. تضمنت مقدمة هذا الباب جدولًا يضم عدد السكان للولايات المتحدة للأعوام 1940 إلى 1990. استخدم استكمالًا داخليًّا للشريحة التكعيبية لتقريب عدد السكان في السنوات 1930 و1965 و2010.

ب. عدد السكان عام 1930 كان 123,203,000 تقريبًا. فما دقة أرقام السنتين 1965 و 2010؟

29. تتحرك سيارة على طريق مستقيم، وتسجل بياناتها عند نقط كثيرة. وتظهر هذه البيانات في الجدول الآتي، حيث يظهر الزمن (Time) بالثانية، المسافة (Distance) بالقدم، والسرعة (Speed) بالقدم لكل ثانية.

الوقت	0	3	5	8	13
المسافة	0	225	383	623	993
السرعة	75	77	80	74	72

أ. استخدم شريحة تكعيبية متشابكة لتخمين موقع السيارة وسرعتها عند الثانية العاشرة $t = 10$ s.

ب. استخدم مشتقة الشريحة لتحديد ما إذا كان يمكن للسيارة أن تتجاوز سرعة 55-mi/h على الطريق. وإذا كان ذلك فما المرة الأولى التي تتجاوز فيها السيارة هذه السرعة؟

ج. ما السرعة القصوى المتوقعة لهذه السيارة؟

30. فاز حصان يدعى Smart Jones في سباق الخيول (Kentucky Derby) لعام 2004 في وقت 2:04.06 (دقيقتين و4.06) في سباق 1.25 ميل. والزمن عند نقطة (علامة) ربع الميل، نصف الميل، والميل، كانت 0:22.99 و 0:46.73 و 1:37.35 على التوالي.

أ. استخدم هذه القيم معًا عند وقت الانطلاق لإنشاء شريحة تكعيبية حرّة لسباق Smart Jones.

ب. استخدم الشريحة لتخمين الزمن عند نقطة ثلاثة أرباع الميل، وقارن ذلك بالزمن الحقيقي 1:11.80.

ج. استخدم الشريحة لتقريب سرعة انطلاق Smart Jones وسرعته عند خط النهاية.

31. من المعتقد أن الكميات العالية من حمض التنتلك في أوراق أشجار البلوط البالغة تعيق نموّ يرقات عثّة الشتاء (*Operophtera bromata L., Geometridae*) التي تؤذي هذه الأشجار كثيرًا في سنوات معينة. يبين الجدول الآتي معدل وزن عينتين من هذه اليرقات خلال الأيام 28 الأولى

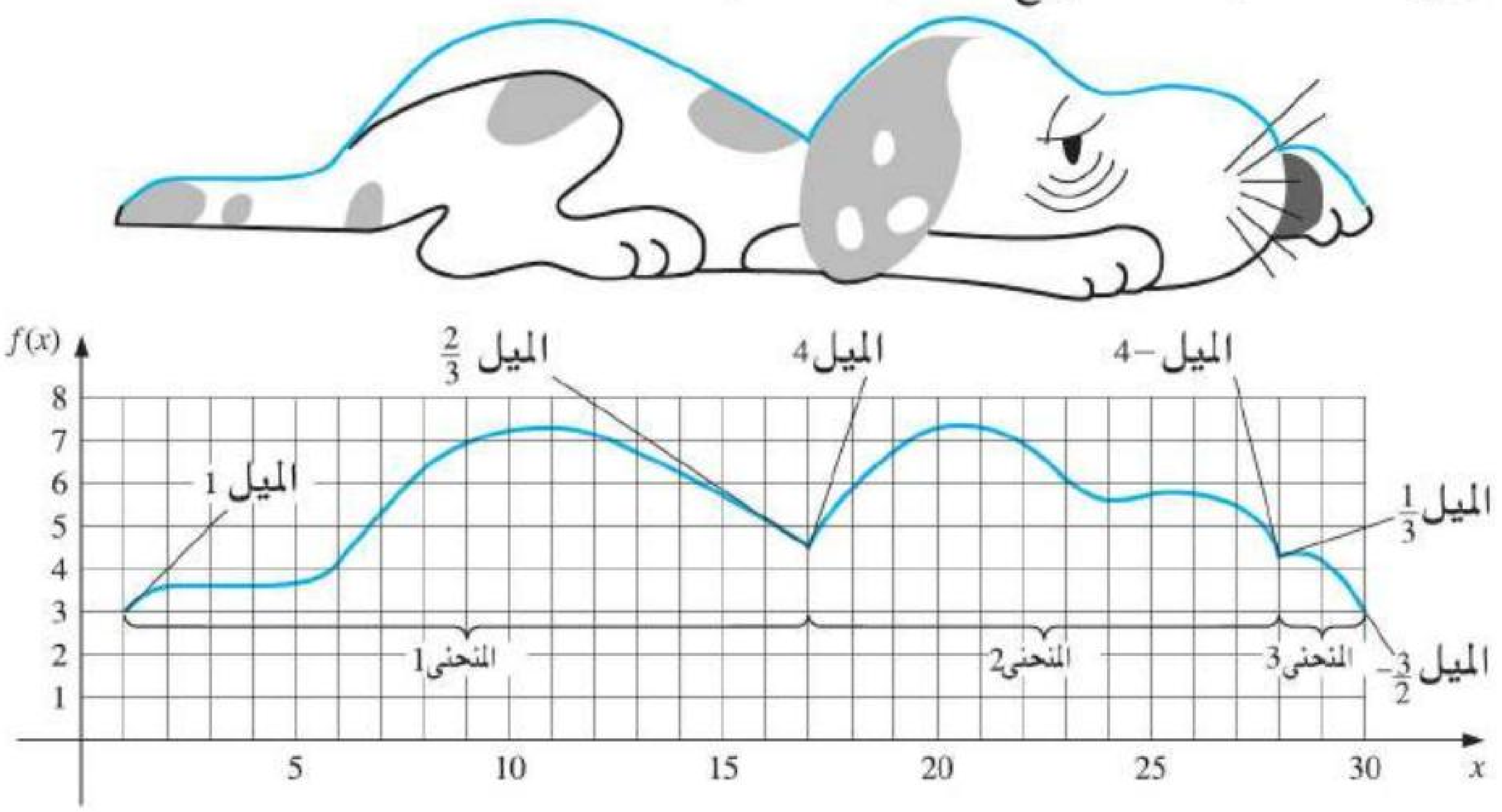
بعد ولادتها. أخذت العينة الأولى من يرقات تربّت على أوراق بلوط طريّة (حديثة)، حيث تربت العينة الثانية على أوراق بالغة (عتيقة) من نفس الشجرة.

أ. استخدم شريحة تكعيبية حرّة لتقريب منحنى معدل الوزن لكل عينة.

ب. أوجد أعلى معدل وزن تقريبي لكل عينة من خلال إيجاد القيمة القصوى للشريحة.

اليوم	0	6	10	13	17	20	28
معدل وزن العينة (2) بالملجم	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
معدل وزن العينة (1) بالملجم	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

32. طلب تقدير الجزء العلوي من هذا الوحش الأرستقراطي باستخدام استكمالات داخلية لشريحة تكعيبية متشابكة. وقد رسم المنحنى على مخطط شبكي، وبني الجدول منه. استخدم الخوارزمية (5.3) لإنشاء الشرائح التكعيبية المتشابكة الثلاثة.



المنحنى 3				المنحنى 2				المنحنى 1			
$f'(x_i)$	$f(x_i)$	x_i	i	$f'(x_i)$	$f(x_i)$	x_i	i	$f'(x_i)$	$f(x_i)$	x_i	i
0.33	4.1	27.7	0	3.0	4.5	17	0	1.0	3.0	1	0
	4.3	28	1		7.0	20	1		3.7	2	1
	4.1	29	2		6.1	23	2		3.9	5	2
−1.5	3.0	30	3		5.6	24	3		4.2	6	3
					5.8	25	4		5.7	7	4
					5.2	27	5		6.6	8	5
				−4.0	4.1	27.7	6		7.1	10	6
									6.7	13	7
								−0.67	4.5	17	8

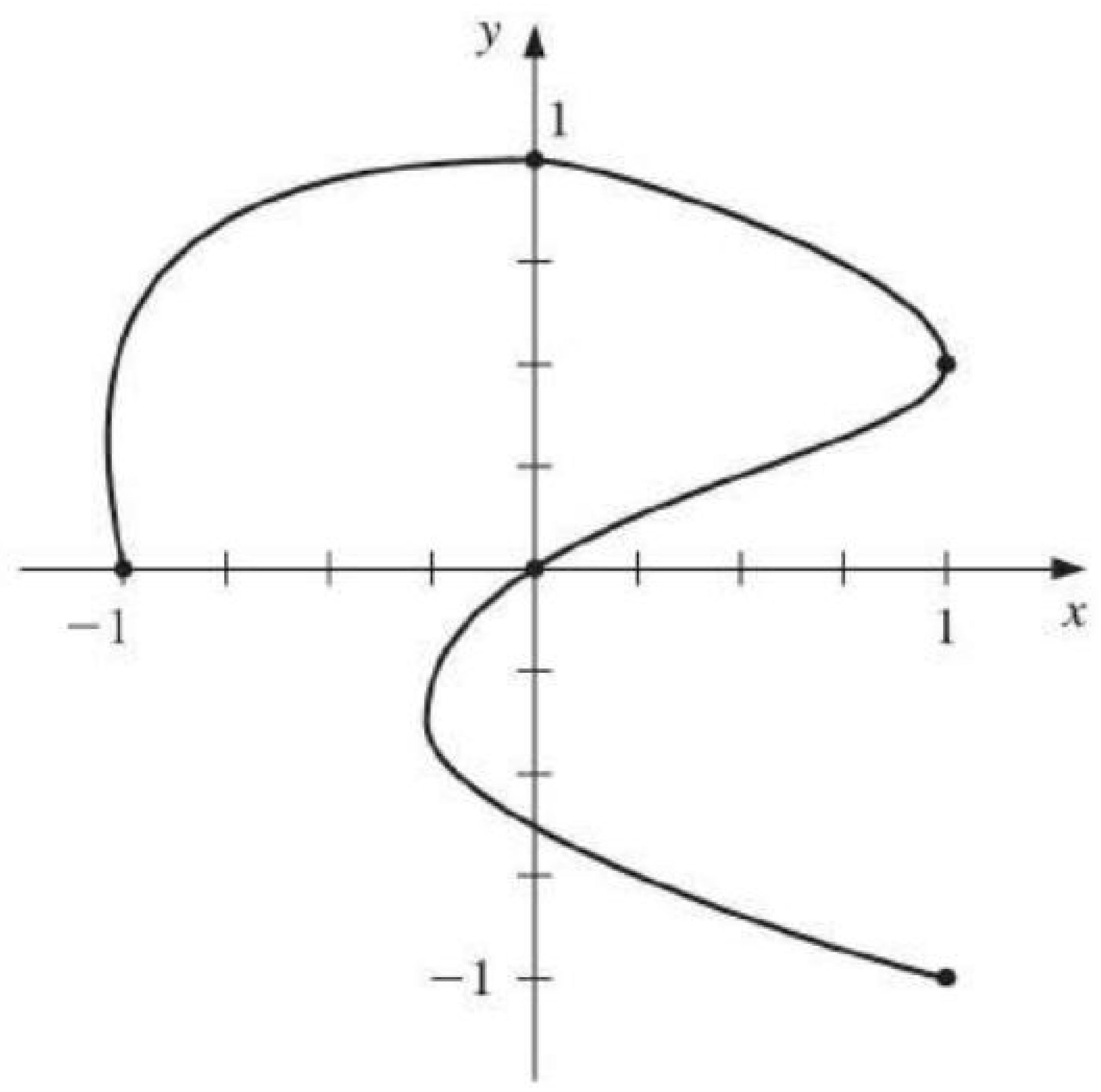
33. كرّر التمرين (32)، ولكن بإنشاء ثلاث شرائح طبيعية مستخدمًا الخوارزمية (4.3).

5.3 المنحنيات الوسيطية Parametric Curves

ليس ممكنًا استخدام أي من الأساليب التي تطوَّرت في هذا الفصل لتوليد منحنيات بالصيغة التي نراها في شكل (14.3)؛ لأن هذا المنحنى لا يمكن الصيغة عنه بوصفه دالّة لأحد الوسيطات التنسيقية بدلالة الآخر. سوف نرى في هذا الفصل كيف تمثل منحنيات عامة باستخدام وسيط

للتعبير عن كل من متغيري إحداثيات -x و-y. ويمكن توسيع هذا الأسلوب ليمثِّل منحنيات عامة وأسطحًا في فضاء. ويكون أسلوب الوسيط المباشر لتحديد كثيرة حدود أو كثيرة حدود مجزأة لربط النقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ وفق ترتيب محدد مستخدمًا وسيط t على فترة $[t_0, t_n]$ مع $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ثم إنشاء دوالّ تقريب
مع $x_i = x(t_i)$ و $y_i = y(t_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$.
يعرض المثال الآتي ذلك الأسلوب في حالة كون كل من دالتي التقريب كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي.

شكل 14.3



مثال 1 أنشئ زوجًا من كثيرات حدود لاجرانج لتقريب المنحنى على صورة الشكل (14.3) مستخدمًا نقاط البيانات الظاهرة على المنحنى.
هناك مرونة في اختيار المتغيّر، وسوف نختار النقاط $\{t_i\}_{i=0}^{4}$ المتساوية التباعد في $[0, 1]$، التي تعطي البيانات في جدول (19.3).

جدول 19.3

i	0	1	2	3	4
t_i	0	0.25	0.5	0.75	1
x_i	−1	0	1	0	1
y_i	0	1	0.5	0	−1

وهذا ينتج كثيرات حدود استكمال داخلي متداخلة

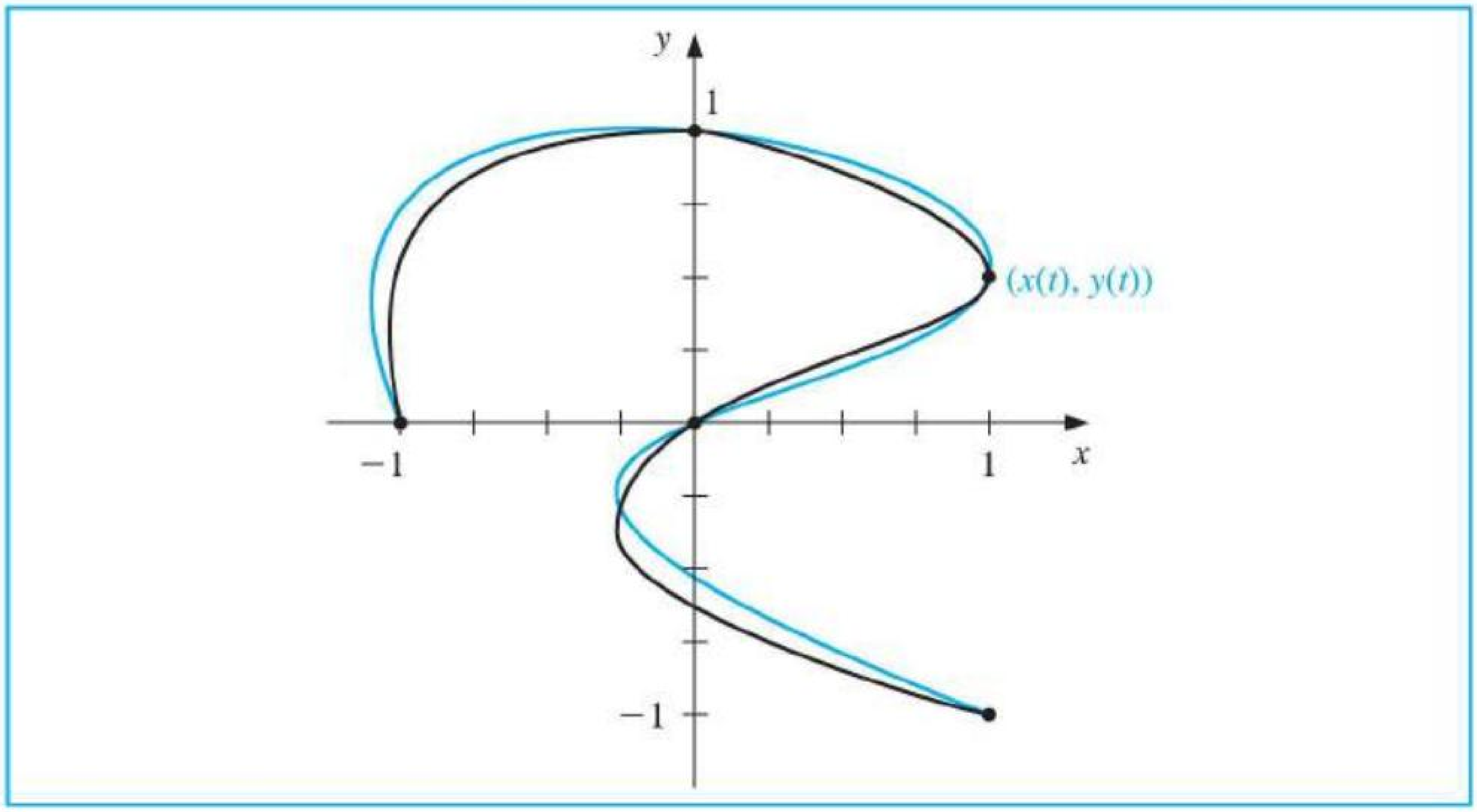
$$x(t) = \left(\left(\left(64t - \frac{352}{3}\right)t + 60\right)t - \frac{14}{3}\right)t - 1$$

و

$$y(t) = \left(\left(\left(-\frac{64}{3}t + 48\right)t - \frac{116}{3}\right)t + 11\right)t$$

وعند رسم هذا النظام الوسيط نحصل على الشكل البياني الموضح بالأزرق في شكل (15.3). ومع أنه يمرّ عبر النقاط المطلوبة، وله الشكل الرئيس نفسه، فإنه لا يتعدى التقريب الخام (الابتدائي) للمنحنى الأصلي. سيتطلب التقريب الأدق نقاطًا إضافية، مع زيادة مرافقة بالحسابات.

شكل 15.3



إن نظامًا ناجحًا لرسوم الحاسوب يحتاج لأن يكون مبنيًا على أساس مبرهنة رياضية منتظمة بحيث تكون النتائج متوقعة. ولكن هذه المبرهنة يجب تطبيقها ضمن الخلفية بحيث يتمكن الرسام من تأسيس التصميم وفقًا للافتراض.

ويمكن توليد منحنيات هرمايت والشريحة بالأسلوب نفسه، ولكنها تتطلب جهودًا حسابية واسعة أيضًا. تتطلب التطبيقات في الرسوم الحاسوبية توليدًا سريعًا لمنحنيات ملساء يمكن تعديلها بسهولة وسرعة. ولغرض حسابي وجمالي؛ فإن تغيير جزء واحد من هذه المنحنيات يجب ألا يكون له أثر ولو قليلًا في بقية أجزائها. يلغي هذا استخدام كثيرات حدود استكمال داخلي أو الشرائح؛ لأن تغيير أحد الأجزاء يؤثر في المنحنى كله. إن اختيار منحنى الاستخدام في الرسم الحاسوبي يكون غالبًا عبارة عن صيغة لكثيرة حدود هرمايت التكعيبية المجزّأة. ويحدد كل جزء من كثيرة حدود هرمايت التكعيبية كليًّا من خلال وصف أطرافها والمشتقات عند الأطراف هذه. ويمكن لجزء واحد من المنحنى أن يتغير نتيجةً لذلك، حيث يترك غالبية المنحنى على حاله. وتحتاج الأجزاء المتجاورة إلى التعديل؛ لضمان الملوسة عند الأطراف فقط. ويمكن تنفيذ الحسابات سريعًا، ويمكن تعديل المنحنى جزءًا بعد آخر. تحتاج مشكلة استكمال هرمايت الداخلي إلى وصف المشتقات عند الأطراف لكل جزء من المنحنى. لنفترض أن المنحنى له $n + 1$ من نقاط البيانات $(x(t_0), y(t_0)), \ldots, (x(t_n), y(t_n))$، ونرغب في تحديد معالم المكعب لاستيعاب سمات معقدة. ويجب وصف $x'(t_i)$ و $y'(t_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ بعد ذلك.

هذا ليس صعبًا على الصورة التي تبدو لنا؛ لأن كل جزء ينتج مستقلًّا. وعلينا ضمان أن المشتقات عند الأطراف لكل جزء تماثل تلك التي في الجزء المجاور فقط. وأخيرًا نستطيع تبسيط العملية لتكون عبارة عن تحديد زوج من كثيرات حدود هرمايت التكعيبية في الوسيط t في الأساس، حيث إن $t_0 = 0$ و $t_1 = 1$ علمًا أن بيانات الأطراف $(x(0), y(0))$ و $(x(1), y(1))$ والمشتقات dy/dx (at $t = 0$) و dy/dx (at $t = 1$).

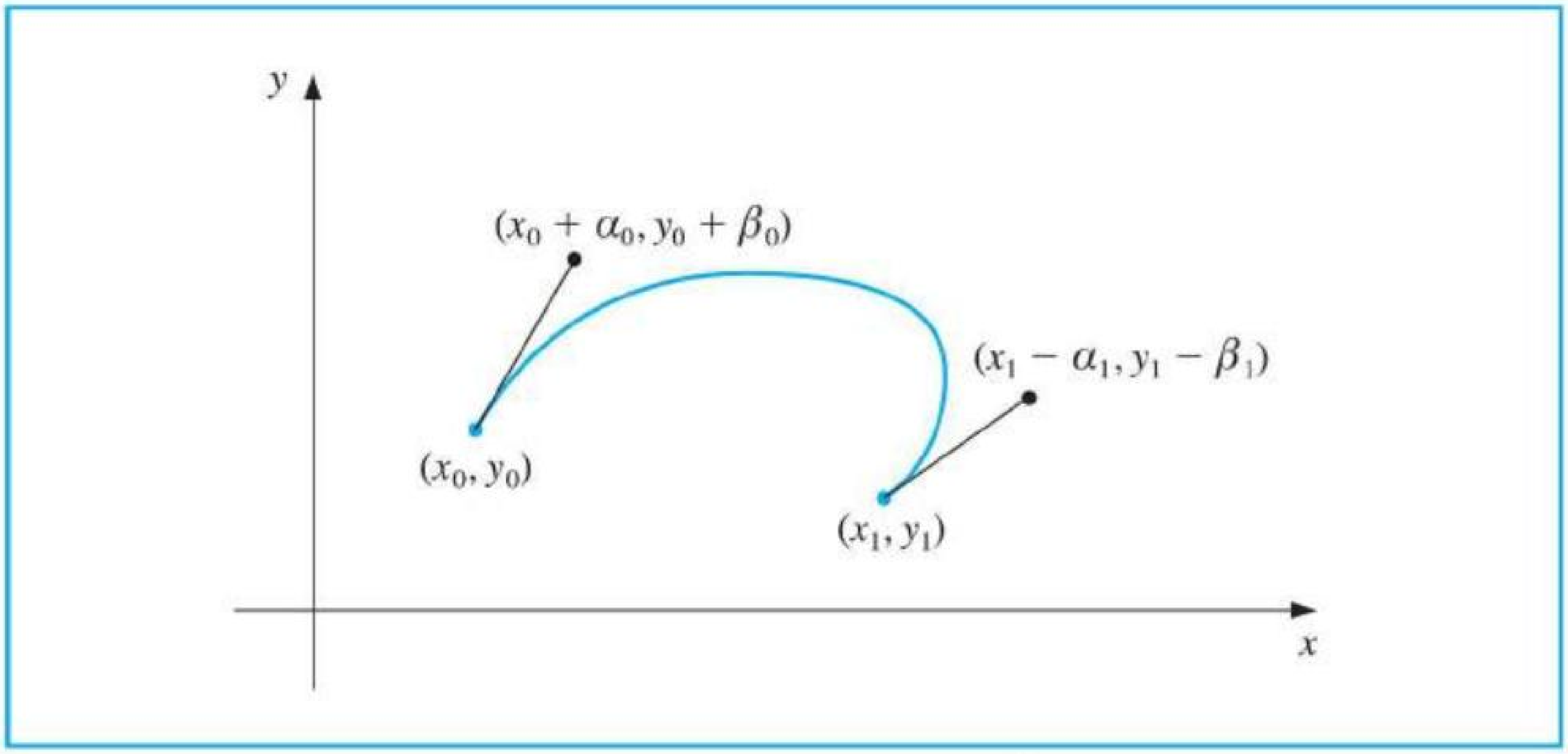
لاحظ أننا نعرّف ستة شروط فقط، وأن كثيرات الحدود التكعيبية في $x(t)$ و $y(t)$ لكل منها أربعة وسيطات، ليصبح المجموع ثمانية. وهذا يوفر مرونة في اختيار زوج من كثيرات حدود هرمايت التكعيبية لتحقيق الشروط؛ كون الصيغة الطبيعية لتحديد $x(t)$ و $y(t)$ تتطلب منا وصف $x'(0), x'(1), y'(0), y'(1)$. يتطلب منحنى هرمايت الواضح في x و y وصف المحصلات

$$\frac{dy}{dx}(t=0)=\frac{y'(0)}{x'(0)} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx}(t=1)=\frac{y'(1)}{x'(1)}$$ فقط.

وعند ضرب $x'(0)$ و $y'(0)$ في عامل قياس مشترك، فإن خط المماس للمنحنى عند $(x(0), y(0))$ يبقى نفسه، لكن يتغير شكل المنحنى. وكلما كان عامل القياس أكبر، يكون المنحنى أقرب في تقريب خط المماس من $(x(0), y(0))$. وتظهر حالة مشابهة عند نقطة النهاية الأخرى $(x(1), y(1))$. ولمزيد حول تبسيط العملية في الرسوم الحاسوبية المتداخلة، فإن المشتقة عند نقطة نهاية تبسط مستخدمة نقطة ثانية (وتدعى نقطة الدلالة *guidepoint*) على خط التماس المطلوب. وكلما كانت نقطة الدلالة بعيدة عن النقطة، أصبح بإمكان المنحنى تقريب خط المماس أكثر من النقاط.

تظهر النقاط عند (x_0, y_0) و (x_1, y_1) في شكل (16.3)، ونقطة الدلالة لـ (x_0, y_0) هي $(x_0+\alpha_0, y_0+\beta_0)$، ونقطة الدلالة لـ (x_1, y_1) هي $(x_1-\alpha_1, y_1-\beta_1)$. إن كثيرة حدود هرمايت التكعيبية $x(t)$ على $[0, 1]$ تحقّق

$$x(0)=x_0, \quad x(1)=x_1, \quad x'(0)=\alpha_0, \quad x'(1)=\alpha_1$$



شكل 16.3

وكثيرة الحدود الوحيدة التي تحقّق هذه الشروط هي

$$x(t)=[2(x_0-x_1)+(\alpha_0+\alpha_1)]t^3+[3(x_1-x_0)-(\alpha_1+2\alpha_0)]t^2+\alpha_0 t+x_0 \qquad (22.3)$$

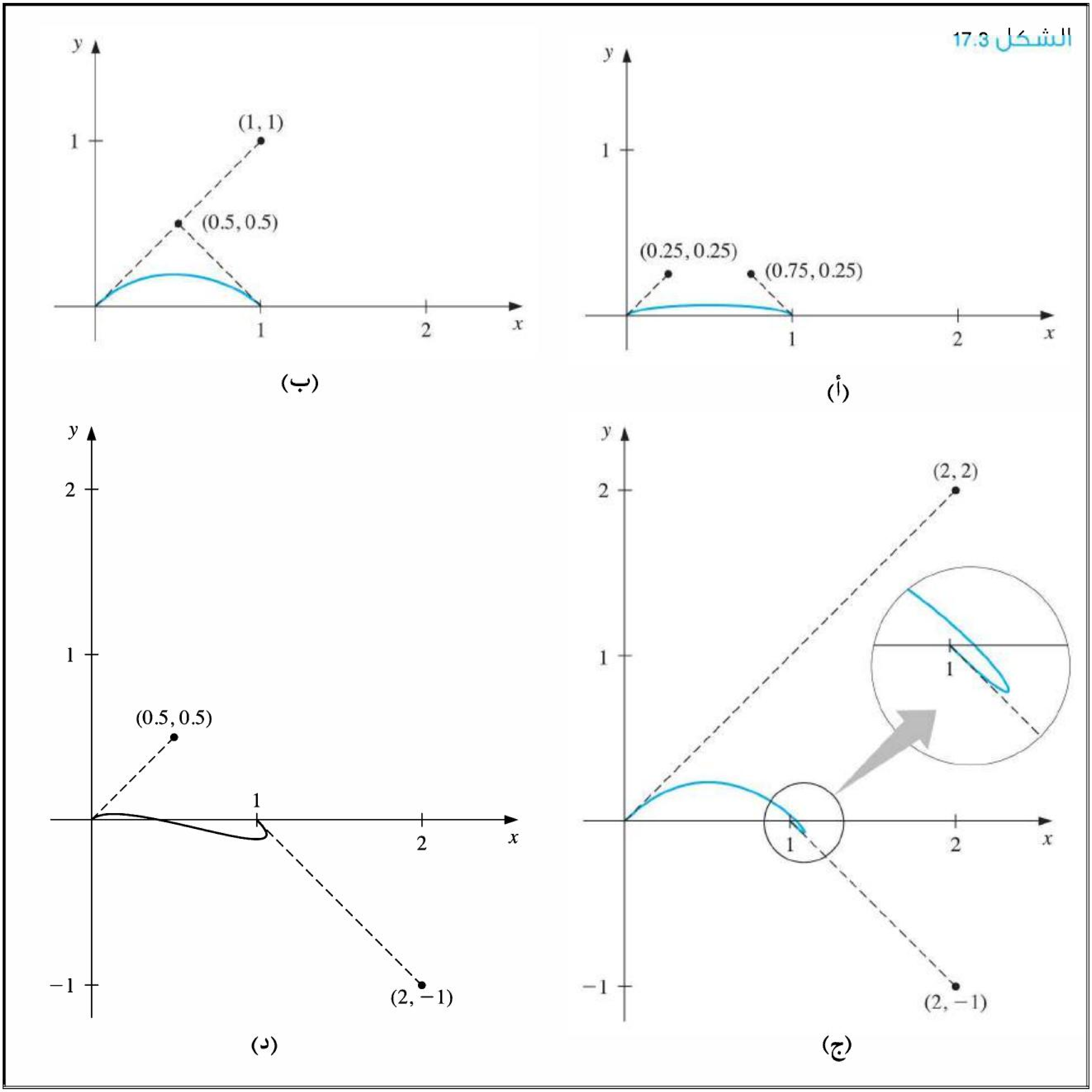
وبالأسلوب نفسه، فإن كثيرة الحدود التكعيبية الوحيدة التي تحقّق

$$y(0)=y_0, \quad y(1)=y_1, \quad y'(0)=\beta_0, \quad y'(1)=\beta_1$$

تكون

$$y(t)=[2(y_0-y_1)+(\beta_0+\beta_1)]t^3+[3(y_1-y_0)-(\beta_1+2\beta_0)]t^2+\beta_0 t+y_0 \qquad (23.3)$$

الشكل 17.3



مثال 2 تبين الرسوم البيانية في الشكل 17.3 بعض الإمكانات لمنحنيات أنتجت من خلال الصيغ (22.3) و (23.3) عندما تكون النقاط هي (0, 0) و (1, 0) ومقدار الميل عند هذه النقاط 1 و -1 على التوالي. إن تبيان الميل عند الأطراف يتطلب كون $\alpha_0 = \beta_0$ و $\alpha_1 = \beta_1$ فقط؛ لأن النسب α_0 / β_0 و α_1 / β_1 تعطي على التوالي الميل عند يسار الأطراف ويمينها. ■

والأسلوب المعياري لتحديد منحنيات في حالة رسوم بيانية متداخلة هو استخدام الفأرة أولًا أو كرة المسار **trackball** لتحديد النقاط ونقاط الدلالة لتوليد التقريب الأول للمنحنى. ويمكن تحديد هذه يدويًا، ولكن معظم أنظمة الرسوم البيانية تسمح لك باستخدام جهاز الإدخال لرسم المنحنى على الشاشة تلقائيًا، وسوف تختار النقاط ونقاط الدلالة المناسبة لهذا المنحنى التلقائي.

ويمكن المناورة بالنقاط ونقاط الدلالة فيما بعد لمواضع تستطيع إنتاج منحنى ذي شكل مقبول. ولكون الحسابات بحدها الأدنى، فإن المنحنى يمكن تحديده سريعًا، حيث يمكن فضلًا عن ذلك ملاحظة التغيير الناتج حالًا. والأكثر من ذلك، فإن جميع البيانات المطلوبة لحساب المنحنيات يتوقع وجودها في الإحداثيات ونقاط الدلالة، ولا يتطلب الأمر معرفة تحليلية لمستخدم النظام أخيرًا.

وتستخدم برامج الرسوم البيانية المشهورة هذا النوع من الأنظمة لتمثيل رسمها البياني التلقائي بصيغة صيغة إلى حد ما. وتكعيبيات هرمايت موضحة على أنها كثيرات حدود بيزير **Be'zier** التي تدخل عامل قياس 3 عند حساب الاشتقاقات عند نقاط النهاية. وهذا يختزل الصيغ الوسيطة إلى

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + 3\alpha_0 t + x_0 \quad (24.3)$$

و

$$y(t) = [2(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1)]t^3 + [3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0)]t^2 + 3\beta_0 t + y_0 \quad (25.3)$$

إلى $0 \le t \le 1$، لكن هذا التغيير يكون واضحًا لمستخدم النظام.

تُنشئ الخوارزمية (6.3) مجموعة منحنيات بيزير معتمدة على الصيغ الوسيطة في المعادلتين (24.3 و 25.3).

كان بيير آيتن بيزير (1910-1999) **PierreEtienne Be'zier** رئيسًا للتصميم والإنتاج في شركة رينو للسيارات معظم حياته المهنية. بدأ بحثه في التصميم المدعم بالحاسوب والتصنيع عام 1960، مطوّرًا أدوات فاعلة في تصميم المنحنى والسطح وأسس طريقة توليد حاسوبية في ثلاثة اتجاهات (3D) لنماذج السيارات.

من إيجابيات منحنيات بيزير **Be'zier** التي تحمل اسمه، أنها تستند إلى مبرهنة رياضية دقيقة. ولا تحتاج لأن تكون ماثلة كليًا أمام النقطة بالتطبيق الذي يريد عمل منحنى أو سطح تتحقق فيه الافتراضات. هذه المنحنيات هي القاعدة لنظام هوامش **Adobe Postscript** القوي. حيث تنتج المنحنيات آليًا. وتظهر في العديد من برمجيات التصاميم الحاسوبية.

ALGORITHM

الخوارزمية 6.3

منحنى بيزير Be'zier Curve

لإنشاء منحنيات بيزير التكعيبية $C_0, \ldots, C_{n-1}$ بصيغة متغيّرة، بحيث C_i ممثّلة كالآتي:

$$(x_i(t), y_i(t)) = \left(a_0^{(i)} + a_1^{(i)}t + a_2^{(i)}t^2 + a_3^{(i)}t^3,\ b_0^{(i)} + b_1^{(i)}t + b_2^{(i)}t^2 + b_3^{(i)}t^3\right)$$

لـ $0 \le t \le 1$، حيث إنها محددة بنقطة الطرف الأيسر (x_i, y_i)، نقطة الدلالة اليسرى (x_i^+, y_i^+) نقطة الطرف الأيمن (x_{i+1}, y_{i+1})، ونقطة الدلالة اليمنى (x_{i+1}^-, y_{i+1}^-) لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$

المدخلات: $n; (x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n); (x_0^+, y_0^+), \ldots, (x_{n-1}^+, y_{n-1}^+); (x_1^-, y_1^-), \ldots, (x_n^-, y_n^-)$

المخرجات: المعاملات $\{a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}$ لكل $0 \le i \le n-1\}$

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$، أنشئ الخطوتين 2 و 3.
2	ضع $a_0^{(i)} = x_i$ $b_0^{(i)} = y_i$ $a_1^{(i)} = 3(x_i^+ - x_i)$



2	$b_1^{(i)} = 3(y_i^+ - y_i)$ $a_2^{(i)} = 3(x_i + x_{i+1}^- - 2x_i^+)$ $b_2^{(i)} = 3(y_i + y_{i+1}^- - 2y_i^+)$ $a_3^{(i)} = x_{i+1} - x_i + 3x_i^+ - 3x_{i+1}^-$ $b_3^{(i)} = y_{i+1} - y_i + 3y_i^+ - 3y_{i+1}^-$
3	المخرجات $(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)})$.
4	توقف.

■

تتكون المنحنيات الثلاثية الأبعاد بطريقة مماثلة بواسطة تعيين مركبات إضافية لـ z_0 و z_1 للعقد، و $z_0 + \gamma_0$ و $z_1 - \gamma_1$ للنقاط الدالة. وتعتبر المسألة الصعبة المتضمنة تمثيل المنحنيات ثلاثية الأبعاد في فقدان البعد الثالث عند رسم المنحنى على شاشة الحاسوب ثنائية الأبعاد. تستخدم تقنيات متعددة ومختلفة، ولكن هذا الموضوع يقع ضمن واقع الرسوم البيانية الحاسوبية. وللحصول على مقدمة لهذا الموضوع وطرق إمكانية تعديل هذه التقنيات عند تمثيلها على السطوح المستوية، يرجى الرجوع إلى الكتب المتعددة حول أساليب رسومات الحاسوب البيانية مثل [Hill, F] أو [FVFH].

مجموعة التمارين 5.3 EXERCISE SET

1. لتكن $(x_0, y_0) = (0, 0)$ و $(x_1, y_1) = (5, 2)$ نقاط نهاية منحنى. استخدم نقاط الدلالة أدناه لإنشاء تقريبات هرمايت التكعيبية الوسيطة $(x(t), y(t))$ للمنحنى، وارسم التقريبات:

أ. $(1, 1)$ و $(6, 1)$ ب. $(0.5, 0.5)$ و $(5.5, 1.5)$

ج. $(1, 1)$ و $(6, 3)$ د. $(2, 2)$ و $(7, 0)$

2. كرّر التمرين (1) مستخدمًا كثيرات حدود بيزير التكعيبية.

3. أنشئ كثيرات حدود بيزير التكعيبية معتمدًا الأطراف ونقاط الدلالة الآتية وارسمها:

أ. النقطة $(1, 1)$ مع نقطة دلالة $(1.5, 1.25)$ للنقطة $(6, 2)$ مع نقطة دلالة $(7, 3)$.

ب. النقطة $(1, 1)$ مع نقطة دلالة $(1.25, 1.5)$ للنقطة $(6, 2)$ مع نقطة دلالة $(5, 3)$.

ج. النقطة $(0, 0)$ مع نقطة دلالة $(0.5, 0.5)$ للنقطة $(4, 6)$ مع نقطة دلالة داخلة $(3.5, 7)$ ونقطة دلالة خارجة $(4.5, 5)$ للنقطة $(6, 1)$ مع نقطة دلالة $(7, 2)$.

د. النقطة $(0, 0)$ مع نقطة دلالة $(0.5, 0.5)$ للنقطة $(2, 1)$ مع نقطة دلالة داخلة $(3, 1)$ ونقطة دلالة $(3, 1)$ للنقطة $(4, 0)$ مع نقطة دلالة داخلة $(1, 5)$ ونقطة دلالة $(3, -1)$ للنقطة $(6, -1)$ مع نقطة دلالة $(6.5, -0.25)$.

4. استخدم البيانات في الجدول الآتي والخوارزمية (6.3) لتقريب شكل الحرف $\mathscr{N}$:

i	x_i	y_i	α_i	β_i	α'_i	β'_i
0	3	6	3.3	6.5		
1	2	2	2.8	3.0	2.5	2.5
2	6	6	5.8	5.0	5.0	5.8
3	5	2	5.5	2.2	4.5	2.5
4	6.5	3			6.4	2.8

5. افترض أن كثيرة حدود بيزير التكعيبية قد وضعت عبر النقاط (u_0, v_0) و (u_3, v_3) مع نقاط دلالة (u_1, v_1) و (u_2, v_2) على التوالي.

أ. اشتق الصيغ الوسيطة لـ $u(t)$ و $v(t)$ مفترضًا أن

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_3, \quad u'(0) = u_1 - u_0, \quad u'(1) = u_3 - u_2$$

و

$$v(0) = v_0, \quad v(1) = v_3, \quad v'(0) = v_1 - v_0, \quad v'(1) = v_3 - v_2$$

ب. لتكن $f(\frac{1}{3}i) = u_i$ لكل $i = 0, 1, 2, 3$ و $g(\frac{1}{3}i) = v_i$ لكل $i = 0, 1, 2, 3$. أثبت أن كثيرة حدود برنستاين من الرتبة 3 في t لـ f هي $u(t)$، وكثيرة حدود برنستاين من الرتبة 3 في t لـ g هي $v(t)$.
(انظر تمرين 29 من الفصل 1.3)

6.3 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Methods and Software

بحثنـــا في هذا الباب تقريب دالّة باســـتخدام كثيرات حدود وكثيرات حدود مجزّأة. ويمكن وصف الدّالة من خلال صيغة تعريفية أو من خلال تهيئة نقاط في السطح يمرّ من خلالها الشكل البياني للدّالة.

إن مجموعـــة النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ معطاة في كل حالة، وإن معلومات أخرى كقيمة مشـــتقات مختلفـــة، يمكن أن تكون ضمـــن المتطلبات أيضًا. نحن بحاجة إلى إيجـــاد دالّة تقريبية تحقّق الشروط المحددة من قبل هذه البيانات. إن كثيرة حدود استكمال داخلي $P(x)$ هي كثيرة حدود ذات أقل رتبة وتحقّق للدّالة f

$$P(x_i) = f(x_i) \text{ لكل } i = 0, 1, \ldots, n$$

ومـــع أن كثيـــرة الحدود هذه هي اســـتكمال داخلي وحيد، فإنه يمكـــن أن تأخذ صيغًا مختلفة. وصيغـــة لاجرانج غالبًا ما تســـتخدم في جداول اســـتكمال داخلي عندمـــا تكون n صغيرة، وفي اشتقاق صيغ لتقريب المشتقات والتكاملات أيضًا. وتستخدم طريقة نيفيل في حساب الكثير من كثيرات الحدود المســـتكملة داخليًّا عند نفس القيمة لـــ x. وتكون صيغ نيوتن لكثيرات الحدود أكثر تناســـبًا للحساب، وتستخدم على نحو واسع لاشـــتقاق صيغ لحل الصيغ التفاضلية أيضًا. ويتســـم اســـتكمال داخلي كثيرة حدود بحالة ضعف تكمن في التذبذب، خصوصًا إذا كان عدد النقاط كبيرًا. ويمكن تطبيق طرائق أخرى في هذه الحالة.

تســـتكمل كثيرات حدود هرمايت الدّالة ومشـــتقاتها عند النقاط داخليًّا. ويمكن أن تكون دقيقة جدًّا، لكن ذلك يتطلّب معلومات أكثر حول الدّالة المراد تقريبها. وعندما يكون هناك عدد كبير من النقاط، فإن كثيرات حدود هرمايت معرضة لحالة ضعف التذبذب أيضًا.

أكثر صيغ الاستكمال الداخلي شيوعًا في الاستخدام هي استكمال داخلي كثيرة حدود مجزّأة. فإذا توفّرت قيم الدّالة والمشتقة، فإنه ينصح باستكمال هرمايت الداخلي التكعيبي. إنها الطريقة الفضلى لقيم استكمال داخلي الدّالة، التي تمثّل حل صيغة الاشتقاق. وعندما لا يتوافر سوى قيم الدّالة، فإنه يمكن استخدام استكمال داخلي الشريحة التكعيبية الحرّة. هذا يجبر المشتقة الثانية للشـــريحة لتصبح صفرًا عند الأطراف. وتتطلب شـــرائح تكعيبية أخرى بيانات إضافية. ويحتاج الشريحة التكعيبية التشابكية إلى قيم مشتقة الدّالة عند الأطراف للفترة على سبيل المثال.

هناك طرائق استكمال داخلي أخرى شائعة الاستخدام مثل الاستكمال داخلي مثلثاتي، وبالتحديد

تحول فورير الســريع **Fast Fourier Transform** الذي ســيُتناوَل في الباب الثامن، ويستخدم مع كميات كبيرة من البيانات عندما تكون الدّالة ذا طبيعة دورية. ويستخدم الاستكمال الداخلي من خلال دوالّ معقولة أيضًا. وإذا حصل شك في دقة البيانات، فإن أساليب الملوسة يمكن تطبيقها، وينصح عندئذ باســتخدام بعض صيغ المربعات الصغــرى **Least Squares** لتوفيق البيانات مثل كثيرات حدود، دوالّ مثلثاتية، دوال معقولة، وشــرائح يمكن استخدامها في المربعات الصغرى لتوفيق البيانات. وسوف نتناول هذه المواضيع في الباب الثامن. تستند برامج نمطية الاستكمال الداخلي في مكتبة **IMSL** إلى الكتاب

"*A Practical Guide to Splines* by Carl de Boor [Deb2]" واســتخدام اســتكمال داخلي من خلال شــرائح تكعيبية. ويُســتخدم النمط البرامجي **CSDEC** لاستكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية مع شروط إنهاء تُتاح للمستخدم، **CSPER** هو لاستكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية مع شــروط إنهاء دورية، و**CSHER** هو لاستكمال داخلي من خلال كثيرات حدود هرمايت شبه المجــزأة. والنمــط البرامجي **CSDEC** يدمج ما بــين الخوارزميتــين (4.3 و5.3). والنمط البرامجي **CSINT** يستخدم شرط اللاعقدة الذي ذُكر في نهاية الفصل (4.3). وهناك شرائح تكعيبية لتقليل التذبذبات والإبقاء على التقعر أيضًا. وطرائق اســتكمال داخلي في اتجاهين من خلال شــرائح ثنائية التكعيب موجودة أيضًا.

تتضمــن مكتبــة **NAG** http://www.netlib.org برامــج نمطيــة فرعيــة **subroutines** مثــل **EO1AEF** لاستكمال داخلي كثيرات حدود وهرمايت، **EO1BAF** لاستكمال داخلي شرائحي تكعيبي و **EO1BEF** لاســتكمال داخلــي هرمايت التكعيبي المجزّأ. يُســتخدم النمــط البرامجي الفقرةي **EO1ABF** لاســتكمال داخلي لبيانات عند نقاط متســاوية التباعد. أمــا النمط البرامجي الفقرةي **EO1AAF** فيطبــق على بيانات عند نقاط غير متســاوية التباعــد. ويتضمن **NAG** برامج نمطية جزئية لاستكمال داخلي من دوالّ بمتغيرين أيضًا.

وتحتــوي المكتبــة **netlib** على البرامج النمطيــة الجزئية **cubsp1.f** من خــلال الحزمة **pppack** لحساب الشريحة التكعيبية مع شروط مختلفة الأطراف. ومن خلال الحزمة **slatec**، فإن **polint**.f يعطي معامل فروقات نيوتن المنقسمة لنقاط بيانات متقطعة (منفصلة)، ونجد برامج نمطية فرعية مختلفة لحساب كثيرات حدود هرمايت المجزأة من خلال الحزمة **slatec/pchip**.

ويمكن اســتخدام دالّة **MATLAB** التي هي **INTERP1** لاســتكمال داخلــي لمجموعة نقاط بيانات متقطعة، باستخدام أقرب استكمال داخلي مجاور، أو استكمال داخلي خطي، أو استكمال شريحة داخلي تكعيبي، أو استكمال داخلي تكعيبي. مخرجات **INTERP1** كثيرة حدود قيد الحساب عنــد مجموعة نقاط متقطعة. ويمكن اســتخدام **POLYFIT** المبني على تقريب المربعات الصغرى (انظــر الفصل 1.8) لإيجاد دالّة اســتكمال داخلي من الرتبــة n على الأكثر، ويمرّ عبر $n+1$ من النقاط المحددة. ويمكن إنتاج شرائح تكعيبية مع الدّالة **SPLINE**. يمكن استخدام **Maple** لإنشاء كثيرة حدود استكمال داخلي مستخدمًا الأوامر

```
>interp(X,Y,x);
```

حيث X عبارة عن النقطة [x[0], x[1],..., x[n]]

وY عبارة عن النقطة [f(x[0]), f(x[1]),..., f(x[n])]

وx هو المتغير قيد الاستخدام. ويمكن إنشاء الشريحة التكعيبية الطبيعية مع Maple أيضًا. أدخل أولا

```
>readlib(spline);
```

لجاهزية الحزمة. ومع X وY المبينين في المقطع السابق، فإن الأمر

```
>spline(X,Y,x,3);
```

تَنشأ الشريحة التكعيبية الطبيعية التي تستكمل داخليًّا

$$Y = [y[0],\ldots, y[n]] \quad \text{و} \quad X = [x[0],\ldots, x[n]]$$

حيث X هو المتغير، والعدد 3 يشير إلى رتبة الشريحة التكعيبية. ويمكن إيجاد شرائح خطية وتربيعية أيضًا.

المراجع العامة للطرائق في هذا الفصل من تأليف [Po] Powell و [Da] Davis وتعود الورقة حول الشرائح إلى [Scho] Schoenberg. هذه كتب مهمة حول الشرائح من تأليف Schultz [Schul], De Boor [Deb2], Diercx [Di], Schumaker [Schum].

الباب

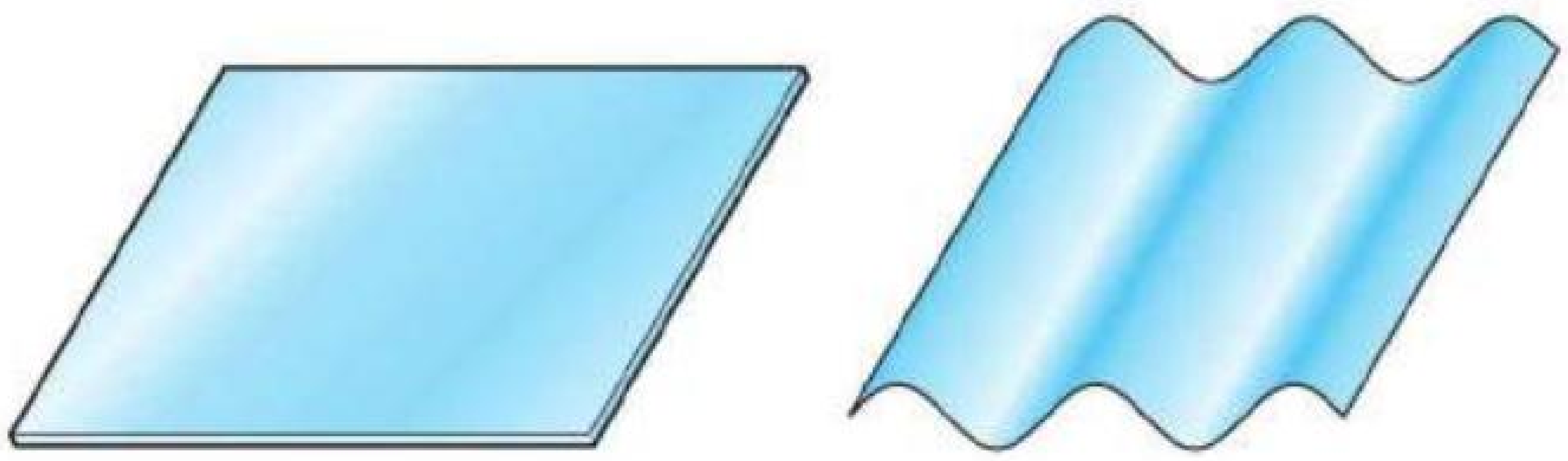
4

الاشتقاق والتكامل العدديان

Numerical Differentation and Integration

مقدمة

يُصنع السقف المموّج بضغط لوح الألمنيوم المستوي ليصبح مموّجًا، مقطعه العرضي على شكل موجة الجيب.



افترض أنك بحاجة إلى صفيحة مموّجة طولها 4 ft، وارتفاع كل موجة منها 1 in من الخط المركزي، وقيمة كل موجة ذات دورة 2π in تقريبًا.

إن مسألة إيجاد طول الصفيحة الأصلية تكمن في إيجاد طول المنحنى $f(x) = \sin x$ من $x = 0$ in إلى $x = 48$ in، ومن حساب التفاضل والتكامل نعرف أن الطول هو

$$L = \int_0^{48} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\, dx$$

وبذلك تختزل المسألة إلى إيجاد هذا التكامل.

وعلى الرغم من أن دالّة الجيب هي أحد أكثر الدّوال الرياضية شيوعًا، إلا أن حساب طوله يتضمن تكاملًا ناقصيًّا (بيضاوي الشكل) من النوع الثاني الذي لا يمكن إيجاد قيمته بالطرائق العادية. وهناك طرائق قد طُوِّرت في هذا الباب لإيجاد حلول تقريبية لمثل هذا النوع من المسائل. ولقد أخِذت هذه المسألة في الحسبان في التمرين (25) من استخدام الفصل (4.4) وفي التمرين (12) من الفصل (5.4).

لقد ذكرنا في مقدمة الباب (3) أن أحد أسباب استخدام كثيرات الحدود الجبرية لتقريب أي مجموعة من البيانات هو معرفة دّالة متصلة على فترة مغلقة هي كثيرة حدود قريبة قدر ما نريد من الدّالة عند كل نقطة في الفترة، وبالإضافة إلى ذلك فإنه يمكن إيجاد مشتقات كثيرات الحدود وتكاملاتها بسهولة. فليس غريبًا أن معظم عمليات تقريب التكاملات والمشتقات تستخدم كثيرات الحدود التي تقرّب الدّالة.

1.4 الاشتقاق العددي Numerical Differentiation

مشتقة الدّالة f عند x_0 هي

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

تعد هذه الصيغة طريقة واضحة لتوليد تقريب للمشتقة $f'(x)$ وذلك بحساب

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

لقيم صغيرة للعدد h.

وعلى الرغم من أن هذا الأمر واضح، إلا أنه غير ناجح، بسبب وجود خطأ التدوير الملازم، ولكنها نقطة البداية بالتأكيد. ولكي تجد تقريبًا للمشتقة $f'(x_0)$؛ افترض أولًا أن $x_0 \in (a, b)$، حيث $f \in C^2[a, b]$، وأن $x_1 = x_0 + h$ لقيمة ما $h \neq 0$ التي تكون صغيرة على نحو كافٍ لتضمن أن $x_1 \in [a, b]$.

أنشأ أول كثيرة حدود لاجرانج Lagrange $P_{0,1}(x)$ للدّالة f المحدّد بالقيمتين x_0 و x_1، ويحتوي على حد الخطأ

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{0,1}(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(\xi(x)) \\ &= \frac{f(x_0)(x - x_0 - h)}{-h} + \frac{f(x_0 + h)(x - x_0)}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2} f''(\xi(x)) \end{aligned}$$

لبعض قيم $\xi(x)$ في الفترة $[a, b]$. ويعطي الاشتقاق ما يلي

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + D_x\left[\frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2} f''(\xi(x))\right] \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{2(x - x_0) - h}{2} f''(\xi(x)) \\ &\quad + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2} D_x(f''(\xi(x))) \end{aligned}$$

ومن ثم

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

إن إحدى الصعوبات في هذه الصيغة هي عدم حصولنا على أي معلومات عن $D_x f''(\xi(x))$، ومن ثم لا يمكن تقدير خطأ القطع.

على كل حال عندما تكون x هي x_0، فإن معامل $D_x f''(\xi(x))$ يكون صفرًا، وتكتب الصيغة على الصورة المبسّطة الآتية:

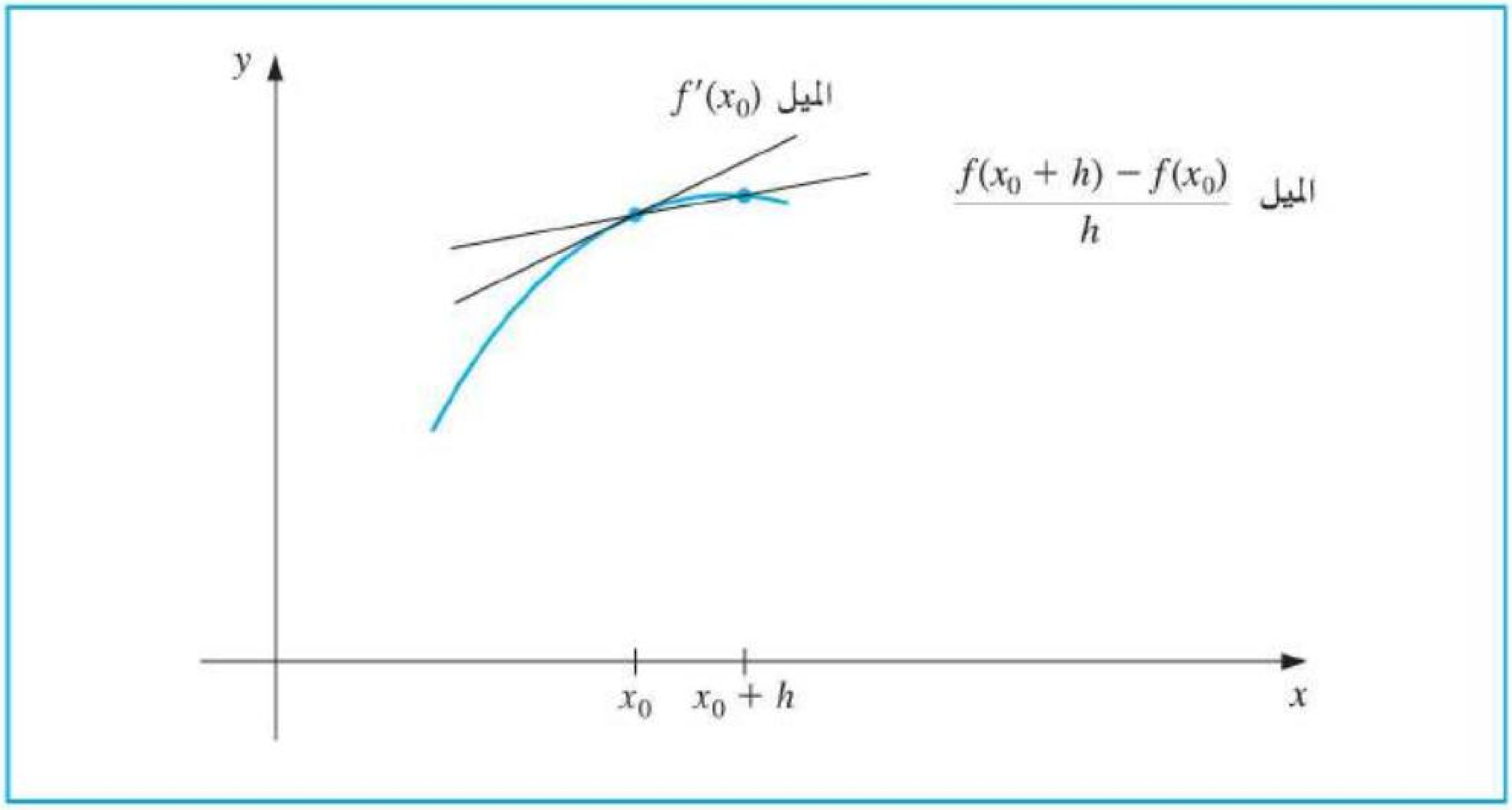
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi) \tag{1.4}$$

ولقيم h الصغيرة، يمكننا استخدام الفرق الكسري $[f(x_0 + h) - f(x_0)]/h$ لتقريب $f'(x_0)$ بخطأ محدود بالقيمة $M|h|/2$، حيث M هو حد على $|f''(x)|$ لكل $x \in [a, b]$، تُعرف هذه الصيغة بصيغة الفرق الأمامي **forward-difference formual** إذا كانت $h > 0$ **(انظر شكل 1.4)**

استخدم إسحق نيوتن **Isaac Newton** معادلات الفرق. ودعا إلى شيوعها في الربع الأخير من القرن السابع عشر. ولكن كثيرا من هذه التقنيات قد طوّرها توماس هاريوت **Thomas Harriot (1561-1621)** وهنري برجس **Henry Briggs (1561-1631)**. لقد تقدم هاريوت تقدمًا مهمًا في تقنيات البحث. وكان برجس مسؤولًا عن قبول اللوغارتمات ليكون لها دور في الحسابات.

حيث تعرف بصيغة الفرق الخلفي **backward-difference formual** إذا كانت $h < 0$.

شكل 1.4



مثال 1 ليكن $f(x) = \ln x$ و $x_0 = 1.8$. نستخدم صيغة الفرق الأمامي

$$\frac{f(1.8+h) - f(1.8)}{h}$$

لإيجاد تقريب للقيمة $f'(1.8)$ بخطأ مقداره

$$\frac{|hf''(\xi)|}{2} = \frac{|h|}{2\xi^2} \le \frac{|h|}{2(1.8)^2} \quad \text{لكل} \quad 1.8 < \xi < 1.8 + h$$

حُسبت النتائج في جدول (1.4) عندما $h = 0.1, 0.01, 0.001$

جدول 1.4

$\frac{\|h\|}{2(1.8)^2}$	$\frac{f(1.8+h) - f(1.8)}{h}$	$f(1.8+h)$	h
0.0154321	0.5406722	0.64185389	0.1
0.0015432	0.5540180	0.59332685	0.01
0.0001543	0.5554013	0.58834207	0.001

وبما أن $f'(x) = 1/x$ فإن القيمة الصحيحة للمشتقة $f'(1.8)$ هي $0.55\overline{5}$، وإن حدود الخطأ قريبة جدًّا من خطأ التقريب الحقيقي. ■

ولكي نجد صيغًا عامة لتقريب المشتقة؛ نفترض أن $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ هي $(n+1)$ من الأعداد المميزة، عددها، وموجودة في فترة ما I، وأن $f \in C^{n+1}(I)$. ومن المبرهنة 3.3 يكون

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) + \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

لقيمة ما $\xi(x)$ في I، حيث ترمز $L_k(x)$ إلى كثيرة حدود لمعاملات لاجرانج من الرتبة k للدالّة f على $x_0, x_1, \ldots, x_n$. وباشتقاق هذا التعبير نجد أن

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L'_k(x) + D_x \left[\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1!)}\right] f^{(n+1)}(\xi(x)) + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} D_x[f^{(n+1)}(\xi(x))]$$

وقد وُجِدت معضلة في تقدير خطأ القطع مرّة أخرى، إلا إذا كان x أحد الأعداد x_j. وفي هذه الحالة فإن الحد الذي يُضرب فيه $D_x[f^{(n+1)}(\xi(x))]$ هو صفر، وتصبح الصيغة

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L'_k(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} (x_j - x_k) \tag{2.4}$$

التي تسمى صيغة النقاط التي عددها $(n+1)$ لتقريب $f'(x_j)$. وعمومًا فإن استخدام نقاط أكثر للتقييم في الصيغة (2.4) يؤدي إلى دقة أعلى على الرغم من أن عدد الحسابات الدالّية ونمو خطأ التقريب لا يشجعان على ذلك إلى حد ما.

إن الصيغ الأكثر شيوعًا هي تلك التي تستخدم ثلاث نقاط تقييم أو خمس.

نبدأ أولًا باشتقاق صيغ مناسبة ذات ثلاث نقاط، ونأخذ في الحسبان الأخطاء المرتبطة بها.

وحيث إن $L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$ فإن $L'_0(x) = \dfrac{2x - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

وبالطريقة نفسها $L'_1(x) = \dfrac{2x - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$ و $L'_2(x) = \dfrac{2x - x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

ولذلك من المبرهنة (2.4) يكون

$$f'(x_j) = f(x_0)\left[\frac{2x_j - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right] + f(x_1)\left[\frac{2x_j - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right] + f(x_2)\left[\frac{2x_j - x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right] + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_j) \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2} (x_j - x_k) \tag{3.4}$$

كل $j = 0, 1, 2$ حيث يعبر الرمز ξ_j عن اعتماد هذه النقطة على x_j.

إن الصيغ الثلاث من الصيغة (3.4) تصبح مناسبة، وخصوصًا إذا كانت المسافات بين الرؤوس متساوية، أي عندما $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ لقيمة ما $h \neq 0$.

سنفترض أن المسافات بين الرؤوس متساوية التباعد فيما سنقدمه حتى نهاية هذا الفصل.

باستخدام الصيغة (3.4)، وبافتراض $x_j = x_0, x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ نجد أن

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2} f(x_0) + 2 f(x_1) - \frac{1}{2} f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

وبالعمل نفسه للقيمة $x_j = x_1$ فإن

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_2)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

وللقيمة $x_j = x_2$ فإن

$$f'(x_2) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2).$$

وبما أن $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ فإنه يمكن التعبير عن هذه الصيغ كالآتي

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0+h) - \frac{1}{2}f(x_0+2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$
$$f'(x_0+h) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0+2h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

و

$$f'(x_0+2h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_0+h) + \frac{3}{2}f(x_0+2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

وللتبسيط، نعوّض x_0 بدلاً من x_0+h في وسط الصيغة، لإعطاء حلّ تقريبيّ للمشتقة $f'(x_0)$. وبطريقة مماثلة نعوّض x_0 بدلاً من x_0+2h في الصيغة الأخيرة. إن هذه الطريقة تعطي ثلاث صيغ لتقريب $f'(x_0)$ وهي:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$
$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

و

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

وأخيرًا لاحظ أن الصيغة الأخيرة من هذه الصيغ يمكن الحصول عليها بتعويض $-h$ بدلاً من h، وعليه فهناك في الحقيقة معادلتان فقط.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0) \qquad (4.4)$$

حيث تقع ξ_0 بين x_0 و x_0+2h

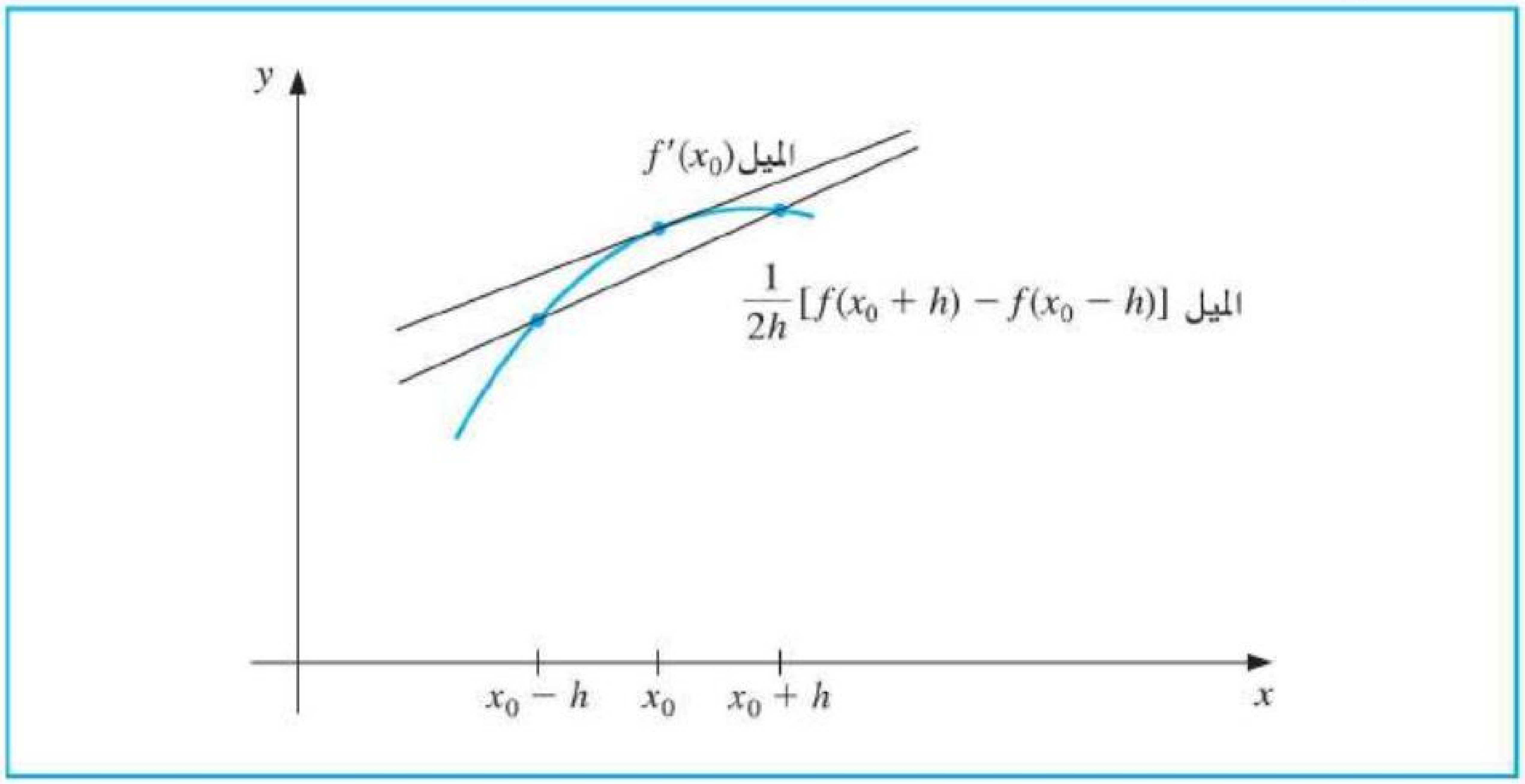
$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) \qquad (5.4)$$

حيث تقع ξ_1 بين (x_0-h) و (x_0+h).

على الرغم من أن الأخطاء في كلا المعادلتين (4.4) و (5.4) هي $O(h^2)$ إلا أن الخطأ في الصيغة (5.4) يساوي تقريبًا نصف الخطأ في الصيغة (4.4). ويحدث هذا لأن الصيغة (5.4) تستخدم بيانات على جهتي x_0، والصيغة (4.4) تستخدم بيانات على جهة واحدة فقط.

لاحظ أيضًا أن f يحتاج إلى نقطتين فقط في الصيغة (5.4)، حيث توجد حاجة إلى ثلاثة حسابات في الصيغة (4.4). ويُظهر شكل (2.4) شرحًا للتقريب الحاصل من الصيغة (5.4).

شكل 2.4



إن التقريب باستخدام الصيغة (4.4) مناسب بالقرب من نهايتي الفترة؛ لأن المعلومات عن f خارج الفترة قد تكون غير متاحة.

إن الطرائق المشروحة في المعادلتين (4.4) و (5.4) تسمى صيغ الثلاث نقاط (على الرغم من أن النقطة الثالثة $f(x_0)$ لا تظهر في الصيغة (5.4))، وبأسلوب مماثل فهناك صيغ الخمس نقاط، التي تستخدم قيمة الدّالة على نقطتين أخريين، إذ يكون حد الخطأ فيهما $O(h^4)$. وإحدى هذه الصيغ

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(ع) \quad (6.4)$$

حيث تقع ع بين x_0-2h و x_0+2h، ويعطى اشتقاق هذه الصيغة في الفصل (2.4).

وإن صيغة الخمس نقاط الأخرى مناسبة لتقريبات نقطة الطرف، خصوصًا بشأن استكمال الشريحة التكعيبية التي درست في الفصل (3.4).

هذه الصيغة هي

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \frac{1}{12h}[&-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) \\ &+ 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(ع) \end{aligned} \quad (7.4)$$

حيث تقع ع بين x_0 و x_0+4h.

يمكن إيجاد التقريبات على نقطة النهاية اليسرى باستخدام هذه الصيغة و $h > 0$، أما التقريبات على نقطة الطرف الأيمن فيمكن إيجادها باستخدام $h < 0$.

مثال 2 يُظهر جدول (2.4) قيمًا للدالّة $f(x) = xe^x$. بما أن المشتقة هي $f'(x) = (x+1)e^x$ فإن $f'(2.0) = 22.167168$. لإيجاد قيمة تقريبية للمقدار $f'(2.0)$؛ فإن استخدام صيغ الثلاث نقاط والخمس نقاط يظهر النتائج الآتية.

جدول 2.4

x	$f(x)$
1.8	10.889365
1.9	12.703199
2.0	14.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855030

صيغ الثلاث نقاط Three-Point Formulas

باستخدام (4.4) مع $h = 0.1$: $\frac{1}{0.2}[-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)] = 22.032310$

باستخدام (4.4) مع $h = -0.1$: $\frac{1}{-0.2}[-3f(2.0) + 4f(1.9) - f(1.8)] = 22.054525$

باستخدام (5.4) مع $h = 0.1$: $\frac{1}{0.2}[f(2.1) - f(1.9)] = 22.228790$

باستخدام (5.4) مع $h = 0.2$: $\frac{1}{0.4}[f(2.2) - f(1.8)] = 22.414163$

إن الأخطاء في هذه الصيغة هي تقريبًا

1.35×10^{-1} و 1.13×10^{-1} و -6.16×10^{-2} و -2.47×10^{-1} على التوالي.

صيغة الخمس نقاط Five-Point Formula

باستخدام الصيغة (6.4) مع $h = 0.1$ (صيغة الخمس نقاط الوحيدة الممكن تطبيقها)

$$\frac{1}{1.2}[f(1.8) - 8f(1.9) + 8f(2.1) - f(2.2)] = 22.166999$$

إن الخطأ في هذه الصيغة يساوي 1.69×10^{-4} تقريبًا.
من الواضح أن صيغة الخمس نقاط أفضل من الأخريات.
لاحظ أيضًا أن الخطأ في الصيغة (5.4) و $h = 0.1$ يساوي تقريبًا نصف قيمة الخطأ الناتج عن استخدام الصيغة (4.4) باختيار $h = 0.1$ أو $h = -0.1$. ■

يمكن اشتقاق طرائق صالحة لإيجاد تقريبات للمشتقات العليا للدالة، وذلك باستخدام قيم للدالّة عند نقاط مختلفة وموضوعة على شكل جدول.
وعلى كل حال فالاشتقاق مُضن جبريًّا، ولذلك سنشرح فقط طريقة ممثلة لهذه العمليات.
ابدأ بتمثيل الدّالة f بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة حول نقطة x_0، وأوجد التقييم عند $x_0 + h$ و $x_0 - h$. إذن

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4$$

و

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_{-1})h^4$$

حيث $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$

إذا جمعنا هذه الصيغ فإن الحدود التي تحوي $f'(x_0)$ و $f'''(x_0)$ يلغي بعضها بعضًا ونحصل على

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{1}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]h^4$$

وبحل هذه الصيغة لإيجاد $f''(x_0)$ نحصل على

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})] \qquad (8.4)$$

افترض أن $f^{(4)}$ متصلة عند $[x_0 - h, x_0 + h]$.
بما أن $\frac{1}{2}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]$ تقع بين $f^{(4)}(\xi_1)$ و $f^{(4)}(\xi_{-1})$، فإن مبرهنة القيمة الوسطية تضمن وجود عدد ξ بين ξ_1 و ξ_{-1}، ومن ثم ففي الفترة $(x_0 - h, x_0 + h)$ يكون

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}\left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})\right]$$

إن هذا يسمح لنا بإعادة كتابة الصيغة (8.4) على الصيغة

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi) \qquad (9.4)$$

لقيمة ما ξ حيث $x_0 - h < \xi < x_0 + h$. بما أن $f^{(4)}$ متصلة على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$ فإنها محدودة، ومن ثم يكون التقريب $O(h^2)$.

مثال 3 بالعودة إلى البيانات في مثال (2) للدالّة $f(x) = xe^x$ يمكن أن نستخدم الصيغة (9.4) لتقريب $f''(2.0)$. وبما أن $f''(x) = (x+2)e^x$ فإن القيمة الحقيقية هي $f''(2.0) = 29.556224$.

باستخدام الصيغة (9.4) و $h = 0.1$ نحصل على

$$f''(2.0) \approx \frac{1}{0.01}[f(1.9) - 2f(2.0) + f(2.1)] = 29.593200$$

باستخدام الصيغة (9.4) و $h = 0.2$ نجد أن

$$f''(2.0) \approx \frac{1}{0.04}[f(1.8) - 2f(2.0) + f(2.2)] = 29.704275$$

وتكون الأخطاء -3.70×10^{-2} و -1.48×10^{-1} تقريبًا على التوالي. ■

إنه من المهم على نحو خاص أن نهتم بتدوير الخطأ عند تقريب المشتقات. ولشرح هذا الوضع دعنا نتفحص الصيغة (5.4) على نحو أدق.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

افترض أنه عند إيجاد قيمة $f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h)$ حصلنا على أخطاء التدوير $e(x_0 + h)$ و $e(x_0 - h)$، عندئذ تكون القيم التي حسبناها $\tilde{f}(x_0 + h)$ و $\tilde{f}(x_0 - h)$ مرتبطة بالقيم الحقيقية $f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h)$ في الصيغ الآتية

$$f(x_0 + h) = \tilde{f}(x_0 + h) + e(x_0 + h)$$

و

$$f(x_0 - h) = \tilde{f}(x_0 - h) + e(x_0 - h)$$

إن الخطأ التام في التقريب، أي

$$f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} = \frac{e(x_0 + h) - e(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

يحصل جزئيًا بسبب خطأ التقدير، وبسبب جزئي آخر هو خطأ القطع.

إذا افترضنا أن أخطاء التدوير $e(x_0 \pm h)$ محدودة بعدد ما $\varepsilon > 0$، وأن المشتقة الثالثة للدالّة f محدودة بعدد ما $M > 0$ فإن

$$\left| f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} \right| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$$

ولتخفيض خطأ القطع $h^2M/6$ يجب تخفيض h. ولكن بتخفيض h فإن خطأ التدوير ε/h يزداد. وفي الحالات العملية فإن من النادر وجود ميزة في اختيار قيمة صغيرة جدًّا للعدد h؛ وذلك لأن خطأ التدوير يسيطر على الحسابات.

مثال 4 افترض القيم في جدول (3.4) التي حسبت لتقريب $f'(0.900)$ حيث $f(x) = \sin x$. إن القيمة الحقيقية هي $\cos 0.900 = 0.62161$. باستخدام الصيغة

$$f'(0.900) \approx \frac{f(0.900 + h) - f(0.900 - h)}{2h}$$

وباختبار قيم مختلفة للعدد h، نحصل على الإجابات التقريبية في جدول (4.4).

جدول 3.4

x	$\sin x$	x	$\sin x$
0.800	0.71736	0.901	0.78395
0.850	0.75128	0.902	0.78457
0.880	0.77074	0.905	0.78643
0.890	0.77707	0.910	0.78950
0.895	0.78021	0.920	0.79560
0.898	0.78208	0.950	0.81342
0.899	0.78270	1.000	0.84147

جدول 4.4

h	التقدير إلى $f'(0.900)$	الخطأ
0.001	0.62500	0.00339
0.002	0.62250	0.00089
0.005	0.62200	0.00039
0.010	0.62150	−0.00011
0.020	0.62150	−0.00011
0.050	0.62140	−0.00021
0.100	0.62055	−0.00106

إن الاختبار الأمثل للعدد h يظهر أنه يقع بين 0.005 و 0.05. وإذا ما أجرينا بعض التحليلات على حد الخطأ

$$e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$$

فبإمكاننا استخدام حساب التفاضل والتكامل (انظر التمرين 29) للتحقق من أن أصغر قيمة للخطأ e يحدث عندما $h = \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$ حيث

$$M = \max_{x\in[0.800,\,1.00]} |f'''(x)| = \max_{x\in[0.800,\,1.00]} |\cos x| = \cos 0.8 \approx 0.69671$$

وبما أن قيم f معطاة لخمس منازل، فإننا نفترض أن خطأ التدوير محدود بالقيمة $\varepsilon = 0.000005$ ولذلك فالاختيار الأمثل للعدد h يكون تقريبًا

$$h = \sqrt[3]{\frac{3(0.000005)}{0.69671}} \approx 0.028$$

الذي هو متلائم مع النتائج في جدول (4.4).

من جانب عملي لا نستطيع حساب قيمة h الفضلى لنستخدمها لإيجاد تقريب للمشتقة؛ وذلك لعدم وجود أي معرفة لدينا عن المشتقة الثالثة للدالة. ■

ولكن يجب أن نبقى يقظين من أن تقليل حجم الخطوات لا يحسّن دائمًا التقريب الذي نحصل عليه.

لقد ناقشنا فقط مسائل خطأ التدوير الناتجة من استخدام صيغة النقاط الثلاث (5.4)، ولكن هناك صعوبات مماثلة تحدث مع جميع صيغ الاشتقاق.

يمكن تتبع السبب حتى نصل إلى مدى الحاجة إلى القسمة على قوى h. وكما وجدنا في الفصل (2.1) (انظر المثال (3) خصوصًا) فإن القسمة على أعداد صغيرة تميل إلى المبالغة في خطأ التدوير ويجب تجنب هذه العملية إذا أمكن.

وفي حالة الاشتقاق العددي لا يمكن تجنب المسألة بالكامل، مع أن الطرائق ذات الرتب الأعلى تحد من هذه الصعوبة.

تذكر أن طرائق الفرق للتقريب يمكن أن تكون غير مستقرة.

وبالنظر إلى الاشتقاق العددي بوصفه طرائق تقريب نجده غير مستقر؛ لأن قيم h الصغيرة التي نحتاج إليها لتصغير خطأ القطع تجعل خطأ التدوير يزداد أيضًا.

إن هذه أول مجموعة من الطرائق غير المستقرة التي تعرضنا لها، ويجب تجنب هذه الطرائق إذا كان ذلك ممكنًا. وعلى كل حال فبالإضافة إلى أن هذه الصيغ تستخدم لأغراض حسابية، فإننا نحتاج إليها لتقريب حلول الصيغ التفاضلية العادية والصيغ التفاضلية الجزئية.

EXERCISE SET   مجموعة التمارين 1.4

1. استخدم صيغ الفرق الأمامي والفرق الخلفي لتحديد كل مدخل ناقص في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	0.4794	
0.6	0.5646	
0.7	0.6442	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.0	0.00000	
0.2	0.74140	
0.4	1.3718	

2. استخدم صيغ الفرق الأمامي والفرق الخلفي لتحديد المدخل المفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.3	1.9507	
−0.1	2.0421	
−0.1	2.0601	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.0	1.0000	
1.2	1.2625	
1.4	1.6595	

3. إن البيانات في التمرين (1) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (1) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = \sin x$ ب. $f(x) = e^x - 2x^2 + 3x - 1$

4. إن البيانات في التمرين (2) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (2) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ

أ. $f(x) = 2\cos 2x - x$ ب. $f(x) = x^2 \ln x + 1$

5. استخدم صيغة النقاط الثلاث الأدق لتحديد كل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	9.025013	
1.2	11.02318	
1.3	13.46374	
1.4	16.44465	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.1	16.94410	
8.3	17.56492	
8.5	18.19056	
8.7	18.82091	

جـ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.9	−4.827866	
3.0	−4.240058	
3.1	−3.496909	
3.2	−2.596792	

د.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.0	3.6887983	
2.1	3.6905701	
2.2	3.6688192	
2.3	3.6245909	

6. استخدم صيغة النقاط الثلاث الأدق لتحديد كل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.3	−0.27652	
−0.2	−0.25074	
−0.1	−0.16134	
0	0	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
7.4	−68.3193	
7.6	−71.6982	
7.8	−75.1576	
8.0	−78.6974	

جـ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.3	−0.27652	
−0.2	−0.25074	
−0.1	−0.16134	
0	0	

د.

x	$f(x)$	$f'(x)$
7.4	−68.3193	
7.6	−71.6982	
7.8	−75.1576	
8.0	−78.6974	

7. إن البيانات في التمرين (5) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (5) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = e^{2x}$ ب. $f(x) = x \ln x$

ج. $f(x) = x\cos x - x^2 \sin x$ د. $f(x) = 2(\ln x)^2 + 3\sin x$

8. إن البيانات في التمرين (5) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (5) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = e^{2x} - \cos 2x$ ب. $f(x) = \ln(x+2) - (x+1)^2$

ج. $f(x) = x\sin x + x^2 \cos x$ د. $f(x) = (\cos 3x)^2 - e^{2x}$

9. استخدم الصيغ المعطاة في هذا الفصل لتحديد التقريب بالدقة المكنة لكل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.1	−1.709847	
2.2	−1.373823	
2.3	−1.119214	
2.4	−0.9160143	
2.5	−0.7470223	
2.6	−0.6015966	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−3.0	9.367879	
−2.8	8.233241	
−2.6	7.180350	
−2.4	6.209329	
−2.2	5.320305	
−2.0	4.513417	

10. استخدم الصيغ المعطاة في هذا الفصل لتحديد التقريب بالدقة المكنة لكل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.05	−1.709847	
1.10	−1.373823	
1.15	−1.119214	
1.20	−0.9160143	
1.25	−0.7470223	
1.30	−0.6015966	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−3.0	16.08554	
−2.8	12.64465	
−2.6	9.863738	
−2.4	7.623176	
−2.2	5.825013	
−2.0	4.389056	

11. إن البيانات في تمرين (9) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في تمرين (9) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = \tan x$ ب. $f(x) = e^{x/3} + x^2$

12. إن البيانات في تمرين (10) أخذت من الدّوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في تمرين (10) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = \tan 2x$ ب. $f(x) = e^{-x} - 1 + x$

13. استخدم البيانات الآتية والمعلومة: المشتقات الخمس الأولى للدالّة f محدودة على الفترة $[1, 5]$ بالقيم 2، 3، 6، 12 و 23 على التوالي، وذلك لتقريب $f'(3)$ بالدقة المكنة. أوجد حدًّا للخطأ.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

14. كرّر تمرين (13) ولكن على فرض أن المشتقة الثالثة للدالّة f على $[1, 5]$ محدودة بالعدد 4.

15. كرّر تمرين (1) باستخدام حساب التدوير لأربعة أرقام، وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (3).

16. كرّر تمرين (5) باستخدام حساب القطع لأربعة أرقام، وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (7).

17. كرّر تمرين (9) باستخدام حساب التدوير لأربعة أرقام، وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (11).

18. لديك البيانات في جدول الآتي:

1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	x
0.3843735	0.6386093	0.808038	0.9177710	0.9798652	$f(x)$

أ. استخدم الصيغ المناسبة جميعها في هذا الفصل لتقريب $f'(0.4)$ و $f''(0.4)$.
ب. استخدم الصيغ المناسبة جميعها في هذا الفصل لتقريب $f'(0.6)$ و $f''(0.6)$.

19. ليكن $f(x) = \cos \pi x$. استخدم الصيغة (9.4) وقيم $f(x)$ على النقاط $x = 0.25, 0.5$ و 0.75 لتقريب $f''(0.5)$. قارن هذه النتيجة بالقيمة الحقيقية وكذلك بالتقريب الناتج في التمرين (15) من الفصل (3.4)، اشرح سبب كون هذه الطريقة على نحو خاص دقيقة في حل هذه المسألة أوجد حدًّا للخطأ.

20. ليكن $f(x) = 3xe^x - \cos x$ استخدم البيانات الآتية والصيغة (9.4) لتقريب $f''(1.3)$ باختيار $h = 0.1$ و $h = 0.01$

1.40	1.31	1.30	1.29	1.20	x
16.86187	14.30741	14.04276	13.78176	11.59006	$f(x)$

قارن نتائجك بقيمة $f''(1.3)$.

21. لديك جدول البيانات الآتية:

1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	x
0.3843735	0.6386093	0.8080348	0.9177710	0.9798652	$f(x)$

أ. استخدم الصيغة (4.7) لتقريب $f'(0.2)$.
ب. استخدم الصيغة (4.7) لتقريب $f'(1.0)$.
ج. استخدم الصيغة (4.6) لتقريب $f'(0.6)$.

22. اشتق صيغة خمس نقاط من الرتبة $O(h^4)$ لتقريب $f'(x_0)$ التي تستخدم

$$f(x_0 - h),\ f(x_0),\ f(x_0 + h),\ f(x_0 + 2h) \text{ و } f(x_0 + 3h)$$

[إضاءة: خذ التعبير $Af(x_0 - h) + Bf(x_0 + h) + Cf(x_0 + 2h) + Df(x_0 + 3h)$، استخدم امتداد كثيرة حدود تايلور الرابعة، واختر قيم A, B, C, D اختيارًا مناسبًا.]

23. استخدم الصيغة التي اشتُقَّت في التمرين (22) والبيانات في التمرين (21) لتقريب $f'(0.4)$ و $f'(0.8)$.

24. أ. حلّل أخطاء التدوير كما في المثال (4) للصيغة $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \dfrac{h}{2} f''(\xi_0)$
ب. أوجد أفضل $h > 0$ للدالة في المثال (2).

25. لقد أُعطيت في التمرين (10) من الفصل (3.3) بيانات تصف سيارة تسير على طريق مستقيم. لقد طلب ذلك التمرين التنبؤ بمكان السيارة وسرعتها عند $t = 10\,\text{s}$. استخدم الأوقات والأمكنة الآتية للتنبؤ بالسرعة عند كل زمن معطى.

13	10	8	5	3	0	الوقت
993	742	623	383	225	0	المسافة

26. يعطي القانون الأول لكيرتشوف (Kirchoff) العلاقة $\xi(t) = L\dfrac{di}{dt} + Ri$ وذلك في الدائرة الكهربائية التي فيها جهد مكثّف $\xi(t)$، وتوصيل L، ومقاومة في الدائرة R والتيار i.

افترض أننا قسنا التيار لقيم متعددة لـ t وحصلنا على

t	1.00	1.01	1.02	1.03	1.0
i	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

حيث قيست t بالثواني و i بالأمبيرات، وثابت التوصيل $L = 0.98$ هنري والمقاومة تساوي 0.142 أوم. أعطِ تقريبًا لقيمة الجهد $\varepsilon(t)$ عندما $t = 1.00, 1.01, 1.02, 1.03, 1.04$.

27. يعرف طلاب التفاضل والتكامل جميعهم أنه يمكن تعريف مشتقة أي f عند x، ومن ثم

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اختر دالّةً المفضل f، وقيمة x غير الصفرية، واستخدم الحاسوب أو حساب التفاضل والتكامل. ولّد تقريبات $f'_n(x)$ للمشتقة $f'(x)$ باستخدام الصيغة

$$f'_n(x) = \frac{f(x+10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$

للقيم $n = 1, 2, \ldots, 20$ جميعها، وصف ماذا يحدث.

28. اشتق طريقة لتقريب $f'''(x_0)$ بحيث يكون حد الخطأ من الرتبة h^2، وذلك بفك الدّالة f بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة حول x_0 وإيجاد القيم عند $x_0 \pm h$ و $x_0 \pm 2h$.

29. لديك الدّالة $e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$ حيث M هي للمشتقة الثالثة لدالّة ما. برهن أن $e(h)$ لها قيمة صغرى عند $\sqrt[3]{3\varepsilon/M}$.

2.4 استكمال ريتشاردسون الخارجي Richardson's Extrapolation

لويس فراي ريتشاردسون Lewis Fry Richardson (1881-1953) كان أول شخص طبق الرياضيات على نحو منظم على موضوع التنبؤ الجوي بينما كان يعمل لمكتب الأحوال الجوية في إنجلترا وبوصفه معارضا أخلاقيّاً للحرب العالمية الأولى فقد كتب على نحو مستفيض عن التدمير الاقتصادي الناشئ عن الحرب، مستخدماً نظم المعادلات التفاضلية لإيجاد أنموذج منطقي للتفاعلات بين الدول.

إن طريقة الاستيفاء الخارجي المقترنة باسمه كانت إعادة اكتشاف طريقة تعود جذورها على الأقل إلى عصر كريستيان هاجينس Christian Huygens (1629-1695) وربما إلى عصر أرخميدس Archimedes (287-212 BCE).

تستخدم استكمال ريتشاردسون الخارجي لتوليد نتائج عالية الدقة، ولكن باستخدام صيغ ذات رتب منخفضة.

وعلى الرغم من أن اسم الطريقة مرتبط ببحث نشره ريتشاردسون غونت [RG] عام 1927، إلا أن فكرتها قديمة، فهناك مقالة ممتعة حول تاريخ الاستكمال الخارجي، وتطبيقاته موجودة في [Joy].

ويمكننا استخدام الاستكمال الخارجي عندما نعلم أن طريقة التقريب تنتج حد خطأ ذا شكل قابل للتنبؤ، وهي الطريقة التي تعتمد على الوسيط (برامتر) الذي عادة ما تكون الخطوة h.

افترض أن لدينا لكل عدد $h \neq 0$ صيغة $N(h)$ الذي تعطي تقريبًا للقيمة M، وأن خطأ القطع المرتبط بالتقريب له الصيغة

$$M - N(h) = K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$$

لمنظومة من الثوابت المجهولة $K_1, K_2, K_3, \ldots$.

بما أن خطأ القطع $O(h)$ فإننا نتوقع على سبيل المثال أنّ

$$M - N(0.1) \approx 0.1K_1, \quad M - N(0.01) \approx 0.01K_1$$

وعمومًا $M - N(h) \approx K_1h$ إلا إذا كان هناك تغير كبير في المقدار بين الثوابت $K_1, K_2, K_3, \ldots$.

وإن الغرض من الاستكمال الخارجي هو إيجاد طريقة سهلة لدمج التقريبات غير الصحيحة إلى

حد ما $O(h)$ بطريقة مناسبة للحصول على صيغ ذات خطأ قطع من الرتبة العالية، افترض على سبيل المثال أن بإمكاننا دمج صيغ $N(h)$ للحصول على صيغة تقريب $\hat{N}(h)$ للقيمة M بحيث تكون ذات رتبة $O(h^2)$ وعلى الصيغة

$$M - \hat{N}(h) = \hat{K}_2 h^2 + \hat{K}_3 h^3 + \cdots$$

لمنظومة من الثوابت المجهولة . . . . $\hat{K}_1, \hat{K}_2, \ldots$

نحصل عندئذ على $M - \hat{N}(0.1) \approx 0.01\hat{K}_2, \quad M - \hat{N}(0.01) \approx 0.0001\hat{K}_2$ وهكذا.

إذا كان للثابتين K_1 و $\hat{K}_2$ القيمة نفسها تقريبًا فإن التقريبات $\hat{N}(h)$ تكون أفضل بكثير من التقريبات المقابلة $N(h)$. يستمر الاستكمال الخارجي عن طريق دمج التقريبات $\hat{N}(h)$ بطريقة تنتج صيغ بخطأ قطع من الرتبة $O(h^3)$ وهكذا.

وكي ترى بالتحديد كيف نولّد هذه الصيغ الأعلى رتبة، نفترض أن الصيغة التي تعطي التقريب للقيمة M على الصيغة

$$M = N(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \cdots \qquad (10.4)$$

وبما أنه يفترض صحة الصيغة لقيم h الموجبة جميعها، فانظر إلى النتيجة عندما نعوض الوسيط h بنصف قيمتها، وعندئذ نحصل على الصيغة

$$M = N\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 \frac{h}{2} + K_2 \frac{h^2}{4} + K_3 \frac{h^3}{8} + \cdots$$

وبطرح الصيغة (10.4) من مثلي هذه الصيغة نتخلص من الحد الذي يحوي K_1 ونحصل على

$$M = \left[2N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h)\right] + K_2\left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) + K_3\left(\frac{h^3}{4} - h^3\right) + \cdots$$

ولتسهيل النقاش؛ نعرّف $N_1(h) \equiv N(h)$

$$N_2(h) = \left[2N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right]$$

وعندئذ نحصل على صيغة ذات رتبة $O(h^2)$ لتقريب M على الصيغة

$$M = N_2(h) - \frac{K_2}{2}h^2 - \frac{3K_3}{4}h^3 - \cdots \qquad (11.4)$$

وإذا عوضنا h بدلًا من $h/2$ في هذه الصيغة فإننا نحصل على

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{K_2}{8}h^2 - \frac{3K_3}{32}h^3 - \cdots \qquad (12.4)$$

يمكننا دمج هذا مع صيغة (11.4) للتخلص من الحد h^2، وبالتحديد فإن طرح الصيغة (11.4) من 4 أمثال الصيغة (12.4) يعطي

$$3M = 4N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h) + \frac{3K_3}{8}h^3 + \cdots$$

وبالقسمة على 3 نحصل على صيغة من الرتبة $O(h^3)$ لتقريب M على الصيغة

$$M = \left[N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2(h/2) - N_2(h)}{3}\right] + \frac{K_3}{8}h^3 + \cdots$$

وبتعريف

$$N_3(h) \equiv N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2(h/2) - N_2(h)}{3}$$

نحصل على الصيغة من الرتبة $O(h^3)$

$$M = N_3(h) + \frac{K_3}{8}h^3 + \cdots$$

تستمر في هذه العملية بإنشاء تقريب من الرتبة $O(h^4)$ على الصيغة

$$N_4(h) = N_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_3(h/2) - N_3(h)}{7}$$

وتقريب من الرتبة $O(h^5)$ على هذه الصيغة

$$N_5(h) = N_4\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_4(h/2) - N_4(h)}{15}$$

وهكذا.

وعمومًا إذا أمكن كتابة M على الصيغة

$$M = N(h) + \sum_{j=1}^{m-1} K_j h^j + O(h^m) \tag{13.4}$$

فمن الممكن إيجاد تقريب من الرتبة $O(h^j)$ لكل $j = 2, 3, \ldots, m$ على الصيغة

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1} \tag{14.4}$$

لقد تولّدت هذه التقريبات في سطور، وبالرتب الظاهرة في المدخلات المعددة في جدول (5.4)؛ وذلك نتيجة لاستغلال أفضل النتائج للصيغ ذات الرتب العليا.

جدول 5.4

$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$
$N_1(h) \equiv N(h)$:**1**			
$N_1(\frac{h}{2}) \equiv N(\frac{h}{2})$:**2**	$N_2(h)$:**3**		
$N_1(\frac{h}{4}) \equiv N(\frac{h}{4})$:**4**	$N_2(\frac{h}{2})$:**5**	$N_3(h)$:**6**	
$N_1(\frac{h}{8}) \equiv N(\frac{h}{8})$:**7**	$N_2(\frac{h}{4})$:**8**	$N_3(\frac{h}{2})$:**9**	$N_4(h)$:**10**

يمكن تطبيق الاستكمال الخارجي كلما كان خطأ القطع على الصيغة

$$\sum_{j=1}^{m-1} K_j h^{\alpha_j} + O(h^{\alpha_m})$$

لمنظومة من الثوابت K_j وعندما $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_m$ في المثال الآتي نستخدم $\alpha_j = 2j$.

مثال 1 يمكن التعبير عن صيغة الفرق المركزية المعطاة في الصيغة (5.4) لتقريب $f'(x_0)$ بصيغة خطأ بالصيغة

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \cdots$$

وبما أن صيغة الخطأ هذه تحوي قوى h الزوجية فقط، فإن الاستكمال الخارجي يكون أكثر كفاءة مما لُخِّص في بداية النقاش.

في هذه الحالة يكون لدينا التقريب من الرتبة $O(h^2)$

$$f'(x_0) = N_1(h) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \cdots \tag{15.4}$$

حيث

$$N_1(h) \equiv N(h) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)]$$

وإن تعويض $h/2$ بدلاً من h في هذه الصيغة ينتج التقريب

$$f'(x_0) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{24}f'''(x_0) - \frac{h^4}{1920}f^{(5)}(x_0) - \cdots$$

وبطرح الصيغة (15.4) من 4 أمثال هذه الصيغة نتخلص من الحد $O(h^2)$ الذي يحتوي $f'''(x_0)$ ويعطي

$$3f'(x_0) = 4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) + \frac{h^4}{160}f^{(5)}(x_0) + \cdots$$

وبالقسمة على 3 نحصل على صيغة من الرتبة $O(h^4)$ بالصيغة

$$f'(x_0) = N_2(h) + \frac{h^4}{480}f^{(5)}(x_0) + \cdots$$

حيث

$$N_2(h) = \frac{1}{3}\left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1(h/2) - N_1(h)}{3}$$

وباستمرار هذه العملية يعطى لكل $j = 2, 3, \ldots$ صيغة تقريب من الرتبة $O(h^{2j})$ بالصيغة

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1}$$

لاحظ أن مقام الكسر هو $4^{j-1} - 1$ بدلاً من $2^{j-1} - 1$؛ لأننا في هذه الحالة نتخلص من قوى h^2 بدلاً من قوى h.

وبما أن $(h/2)^2 = h^2/4$ فإن عوامل الضرب المستخدمة للتخلص من قوى h^2 هي قوى 4 بدلاً من قوى 2.

افترض أن $x_0 = 2.0, h = 0.2$ و $f(x) = xe^x$ فإن

$$N_1(0.2) = N(0.2) = \tfrac{1}{0.4}[f(2.2) - f(1.8)] = 22.414160$$

$N_1(0.1) = N(0.1) = 22.228786,$ و $N_1(0.05) = N(0.05) = 22.182564$

إن جدول الاستكمال الخارجي لهذه البيانات يظهر في جدول (6.4).

إن القيمة الصحيحة للمشتقة $f'(x) = xe^x + e^x$ عند $x_0 = 2.0$ مقربة إلى ست خانات عشرية هي 22.167168، ومن ثم فإن أعداد $N_3(0.2)$ جميعها صحيحة على الرغم من أن أفضل تقريب أصلي $N_1(0.05)$ يحوي منزلة عشرية واحدة دقيقة. ■

ولما حصلنا على كل عمود بعد العمود الأول في جدول (6.4) بطريقة إيجاد أوساط بسيطة، فإنها قد تؤدي إلى تقريبات عالية الرتبة، باستخدام الحد الأدنى من التكلفة الحسابية. وعمومًا كلما ازدادت k، ازداد خطأ التدوير في $N_1(h/2^k)$؛ لأن عدم استقرار الاشتقاق العددي مرتبط بحجم الخطوة $h/2^k$.

جدول 6.4

$N_1(0.2) = 22.414160$		
$N_1(0.1) = 22.228786$	$N_2(0.2) = N_1(0.1) + \dfrac{N_1(0.1) - N_1(0.2)}{3} = 22.166995$	
$N_1(0.05) = 22.182564$	$N_2(0.1) = N_1(0.05) + \dfrac{N_1(0.05) - N_1(0.1)}{3} = 22.167157$	$N_3(0.2) = N_2(0.1) + \dfrac{N_2(0.1) - N_2(0.2)}{15} = 22.167168$

لقد ناقشنا في الفصل (1.4) طريقتي الثلاث نقاط والخمس نقاط لتقريب $f'(x_0)$ عند معرفة قيم متعددة للدالّة f. وقد تم اشتقاق طريقة الثلاثة نقاط عن طريق تمييز كثيرة حدود لاجرانج للدالة f. ويمكن الحصول على طرائق الخمس نقاط بطريقة مماثلة، ولكن الاشتقاق مضنٍ. ويمكن استخدام الاستكمال الخارجي لاشتقاق هذه الصيغ بسهولة أكثر.

افترض أننا كتبنا مفكوك الدالة f في كثيرة حدود تايلور الرابعة حول x_0. إذن

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi)(x - x_0)^5$$

لعدد ما ξ بين x و x_0.

إن إيجاد قيمة f عند $x_0 + h$ و $x_0 - h$ يعطي

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_1)h^5 \quad (16.4)$$

و

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_2)h^5 \quad (17.4)$$

حيث $x_0 - h < \xi_2 < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$ وبطرح الصيغة (17.4) من الصيغة (16.4) ينتج

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)] \quad (18.4)$$

إذا كانت $f^{(5)}$ متصلة على $[x_0 - h, x_0 + h]$ ، فإن مبرهنة القيمة الوسطية تضمن وجود عدد ξ في $(x_0 - h, x_0 + h)$ بحيث

$$f^{(5)}(\tilde{\xi}) = \tfrac{1}{2}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)]$$

ونتيجة لهذا يمكن حل الصيغة (4.18) لإيجاد $f'(x_0)$ والحصول على التقريب من الرتبة $O(h^2)$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(\tilde{\xi}) \quad (19.4)$$

وعلى الرغم من أن التقريب في الصيغة (19.4) هو التقريب نفسه المعطى في صيغة الثلاث نقاط (5.4)، إلا أن نقطة التقييم الآن تحدث في $f^{(5)}$ بدلًا من f'''.

إن الاستكمال الخارجي يستفيد من هذا بوجود $2h$ بدلًا من h في الصيغة (19.4) ليعطي الصيغة الجديدة

$$f'(x_0) = \frac{1}{4h}[f(x_0+2h) - f(x_0-2h)] - \frac{4h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{16h^4}{120}f^{(5)}(\hat{\xi}) \qquad (20.4)$$

حيث $\hat{\xi}$ بين $x_0 - 2h$ و $x_0 + 2h$

بضرب الصيغة (19.4) في أربعة وطرح الصيغة (20.4) ينتج

$$3f'(x_0) = \frac{2}{h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{1}{4h}[f(x_0+2h) - f(x_0-2h)] - \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\tilde{\xi}) + \frac{2h^4}{15}f^{(5)}(\hat{\xi})$$

إذا كان $f^{(5)}$ متصلًا على $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ فإنه يمكن استخدام طريقة بديلة لبرهنة أنه يمكن الاستعاضة عن $f^{(5)}(\hat{\xi})$ و $f^{(5)}(\tilde{\xi})$ بقيمة مشتركة $f^{(5)}(\xi)$. استخدام هذه النتيجة والقسمة على 3 تنتج صيغة الخمس نقاط

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

التي هي صيغة الخمس نقاط المعطاة في صيغة (6.4).

وبطريقة مماثلة يمكن اشتقاق الصيغ الأخرى للمشتقة الأولى والمشتقات العليا، وستُناقش بعض هذه الصيغ في التمارين.

وستستخدم طريقة الاستكمال الخارجي على مدى هذا الكتاب. وإن التطبيقات الأكثر شهرة تظهر في تقريب التكاملات في الفصل (5.4)، وتلك التي تعطي الحلول التقريبية لحل الصيغ التفاضلية في الفصل (8.4).

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 2.4

1. استخدم عملية الاستكمال الخارجي الموصوفة في المثال (1) لتحديد التقريب $N_3(h)$ للقيمة $f'(x_0)$ لكل من الدّوال الآتية وحجم الخطوة:

أ. $f(x) = \ln x, x_0 = 1.0, h = 0.4$ ب. $f(x) = x + e^x, x_0 = 0.0, h = 0.4$

جـ. $f(x) = 2^x \sin x, x_0 = 1.05, h = 0.4$ د. $f(x) = x^3 \cos x, x_0 = 2.3, h = 0.4$

2. أضف سطرًا آخر إلى جدول الاستكمال في التمرين (1) للحصول على التقريب $N_4(h)$.

3. كرّر تمرين (1) مستخدمًا حساب التدوير لأربعة أرقام.

4. كرّر تمرين (2) مستخدمًا حساب التدوير لأربعة أرقام.

5. البيانات الآتية تعطي تقريبات للتكامل $M = \int_0^\pi \sin x\, dx$

$$N_1(h) = 1.570796, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = 1.896119, \quad N_1\left(\frac{h}{4}\right) = 1.974232, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = 1.993570$$

على فرض أن $M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + K_4h^8 + O(h^{10})$ اكتب جدول استكمال لتحديد $N_4(h)$.

6. يمكن استخدام البيانات الآتية لتقريب التكامل $M = \int_0^{3\pi/2} \cos x\, dx$

$$N_1(h) = 2.356194, \qquad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = -0.4879837$$

$$N_1\left(\frac{h}{4}\right) = -0.8815732, \qquad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = -0.9709157$$

افترض أنه يوجد صيغة من النوع نفسه في التمرين 5، وحدِّد $N_4(h)$.

7. أثبت أن تطبيق صيغة الخمس نقط (6.4) على الدّالة $f(x) = xe^x$ على النقطة $x_0 = 2.0$ يعطي $N_2(0.2)$ في جدول (6.4) عندما $h = 0.1$، ويعطي $N_2(0.1)$ عندما $h = 0.05$.

8. من الممكن تمثيل صيغة الفرق إلى الأمام بالصيغة

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + O(h^3)$$

استخدم الاستكمال لاشتقاق صيغة من رتبة $O(h^3)$ للقيمة $f'(x_0)$.

9. افترض أن $N(h)$ تقريب للمقدار M لكل $h > 0$، وأن

$$M = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots \text{ لبعض الثوابت } K_1, K_2, K_3, \ldots$$

استخدم قيم $N(h), N(h/3)$ و $N(h/9)$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^3)$ للمقدار M.

10. افترض أن $N(h)$ تقريب للمقدار M لكل $h > 0$، وأن

$$M = N(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \cdots \text{ لبعض الثوابت } K_1, K_2, K_3, \ldots$$

استخدم قيم $N(h), N(h/3)$ و $N(h/9)$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^6)$ للمقدار M.

11. تعلمنا في حساب التفاضل والتكامل أن $e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$

أ. أوجد تقريبات e المقابلة لاستخدام $h = 0.04, 0.02$ و 0.01

ب. استخدم الاستكمال على التقريبات مفترضًا وجود ثوابت $K_1, K_2, \ldots$ و $e = (1+h)^{1/h} + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^3)$ للقيمة e، حيث $h = 0.04$

ج. هل تعتقد أن الافتراض في (ب) صحيح؟

12. أ. أثبت أن

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h} = e$$

ب. احسب تقريبات للعدد e باستخدام الصيغة

$$N(h) = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h}$$

والأعداد $h = 0.04, 0.02$ و 0.01

ج. افترض أن $e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$ استخدم الاستكمال الخارجي بدرجة دقة لغاية 16 عددًا على الأقل لتحسب تقريبًا من رتبة $O(h^3)$ للقيمة e مستخدمًا $h = 0.04$ هل تعتقد أن الافتراض صحيح؟

د. أثبت أن $N(-h) = N(h)$.

هـ. استخدم الفقرة (د) لإثبات أن $K_1 = K_3 = K_5 = \cdots = 0$ في الصيغة

$$e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + K_4h^4 + K_5h^5 + \cdots$$

وعليه تختزل الصيغة لتصبح

$$e = N(h) + K_2h^2 + K_4h^4 + K_6h^6 + \cdots$$

و. استخدم نتائج الفقرة (هـ) والاستيفاء لتحسب تقريبًا من رتبة $O(h^6)$ للعدد e باستخدام $h = 0.04$

13. افترض أن جدول للاستكمال الآتي قد بُنِي لتقريب العدد M المعطى في الصيغة

$$M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6$$

		$N_1(h)$
	$N_2(h)$	$N_1\left(\frac{h}{2}\right)$
$N_3(h)$	$N_2\left(\frac{h}{2}\right)$	$N_1\left(\frac{h}{4}\right)$

أ. أثبت أن كثيرة الحدود للاستكمال الداخلي الخطي $P_{0,1}(h)$ المار بالنقطتين $(h^2, N_1(h))$ و $(h^2/4, N_1(h/2))$ يحقق $P_{0,1}(0) = N_2(h)$ وبطريقة مماثلة، أثبت أن $P_{1,2}(0) = N_2(h/2)$.

ب. أثبت أن كثيرة الحدود للاستيفاء الداخلي الخطي $P_{0,2}(h)$ المار بالنقطتين $(h^4, N_2(h))$ و $(h^4/16, N_2(h/2))$ يحقق $P_{0,2}(0) = N_3(h)$.

14. افترض أن $N_1(h)$ صيغة تنتج تقريبات من الرتبة $O(h)$ لتقريب M، وأن

$$M = N_1(h) + K_1h + K_2h^2 + \cdots$$

لمنظومة من الثوابت الموجبة $K_1, K_2, \ldots$ لذلك فإن $N_1(h), N_1(h/2), N_1(h/4), \ldots$ تكون جميعها حدودًا دنيا للمقدار M. ماذا يمكن أن نقول عن التقريبات الاستكمالية $N_2(h), N_3(h), \ldots$؟

15. استخدمت أنصاف محيطات أكبر المضلعات المنتظمة ذات k من الأضلاع التي ترسم داخل دائرة الوحدة، وأنصاف محيطات المضلعات المنتظمة ذات $\{p_k\}$ من الأضلاع التي ترسم خارج دائرة الوحدة، وتكون مماسة لها من قبل أرخميدس **Archimedes** لتقريب π نصف محيط دائرة الوحدة، وكان ذلك قبل 200 قبل الميلاد.

يمكن استخدام الهندسة لإثبات أن متتاليات أنصاف المحيطات الداخلية والخارجية (كما هو أعلاه) $\{p_k\}$ و $\{p_k\}$ على التوالي تحقق

$$P_k = k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad \text{و} \quad p_k = k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

و $p_k < \pi < P_k$ لكل $k \geq 4$.

أ. أثبت أن $p_4 = 2\sqrt{2}$ و $P_4 = 4$

ب. أثبت أنه عند $k \geq 4$ فإن المتتاليات تحقق العلاقات الرجعية

$$p_{2k} = \sqrt{p_k P_{2k}} \quad \text{و} \quad P_{2k} = \frac{2p_k P_k}{p_k + P_k}$$

ج. قرّب π ضمن 10^{-4} بحساب p_k و P_k حتى يكون $P_k - p_k < 10^{-4}$.

د. استخدم متتالية تايلور لإثبات أن

$$\pi = p_k + \frac{\pi^3}{3!}\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{\pi^5}{5!}\left(\frac{1}{k}\right)^4 + \cdots$$

و

$$\pi = P_k - \frac{\pi^3}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2\pi^5}{15}\left(\frac{1}{k}\right)^4 - \cdots$$

هـ. استخدم لاستكمال الخارجي $h = 1/k$.

Elements of Numerical Integration مبادئ التكامل العددي 3.4

غالبًا ما نحتاج إلى إيجاد قيمة التكامل المحدود لدالّة ليس لها دالّة أصلية صريحة أو أن دالّته الصريحة يصعب الحصول عليها. إن الطريقة الرئيسة في تقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ تسمى الطريقة العددية **numerical quadrature** وتستخدم الجمع

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$.

إن الطرائق العددية في هذا الفصل ترتكز على كثيرات الحدود للاستكمال التي بحث فيها في الفصل الثالث.

نختار أولًا مجموعة من النقاط المتميزة $\{x_0, \ldots, x_n\}$ من الفترة $[a, b]$، ثم تكامل كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

وتكامل خطأ القطع على $[a, b]$ لنحصل على

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

حيث $\xi(x)$ في $[a, b]$ لكل x

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

إن صيغة التكامل العددي **quadrature** تكون

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

ويكون الخطأ معطى بالصيغة

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

وقبل شرح الحالة العامة لصيغ التكامل العددي، دعنا نبحث في الصيغ التي نحصل عليها باستخدام كثيرات حدود لاجرانج الأولى والثانية ونقاط متساوية التباعد.

إن هذا يعطي قاعدة شبه المنحرف **Trapezoidal rule** وقاعدة سمبسون **Simpson's rule** اللتين تُقدَّمان في مقررات التفاضل والتكامل، ولاشتقاق قاعدة شبه المنحرف لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ افترض $x_0 = a, x_1 = b, h = b - a$، واستخدم كثيرة حدود لاجرانج الخطية

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

عندئذ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx \qquad (21.4)$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

وبما أن $(x-x_0)(x-x_1)$ لا تتغير إشارتها في الفترة $[x_0, x_1]$ فإنه يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكامل على حد التكامل لتعطي لقيمة ما ξ ضمن (x_0, x_1)

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx = f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$
$$= f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(x_1+x_0)}{2}x^2+x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$= -\frac{h^3}{6}f''(\xi)$$

عنـد اسـتخدام مصطلـح شـبـه المنحرف، فإننـا نقصد أي شكل رباعـي فيه ضلعـان متوازيان على الأقـل. إن المصطلـح الأوروبـي لهـذا شـكل هـو "trapezium". ولزيادة الأمر تعقيـدًا، فإن الكلمة الأوروبيـة "trapezoid" تـشـيـر إلـى أي شـكل رباعـي ليس فيه أي ضلعيـن متسـاويين، والكـلمة الأمريكيـة المقابلة لهذا شـكل هي "trapezium".

ومن ثم فإن الصيغة (21.4) تعطي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}f(x_1)\right]_{x_0}^{x_1}-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$
$$= \frac{(x_1-x_0)}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi).$$

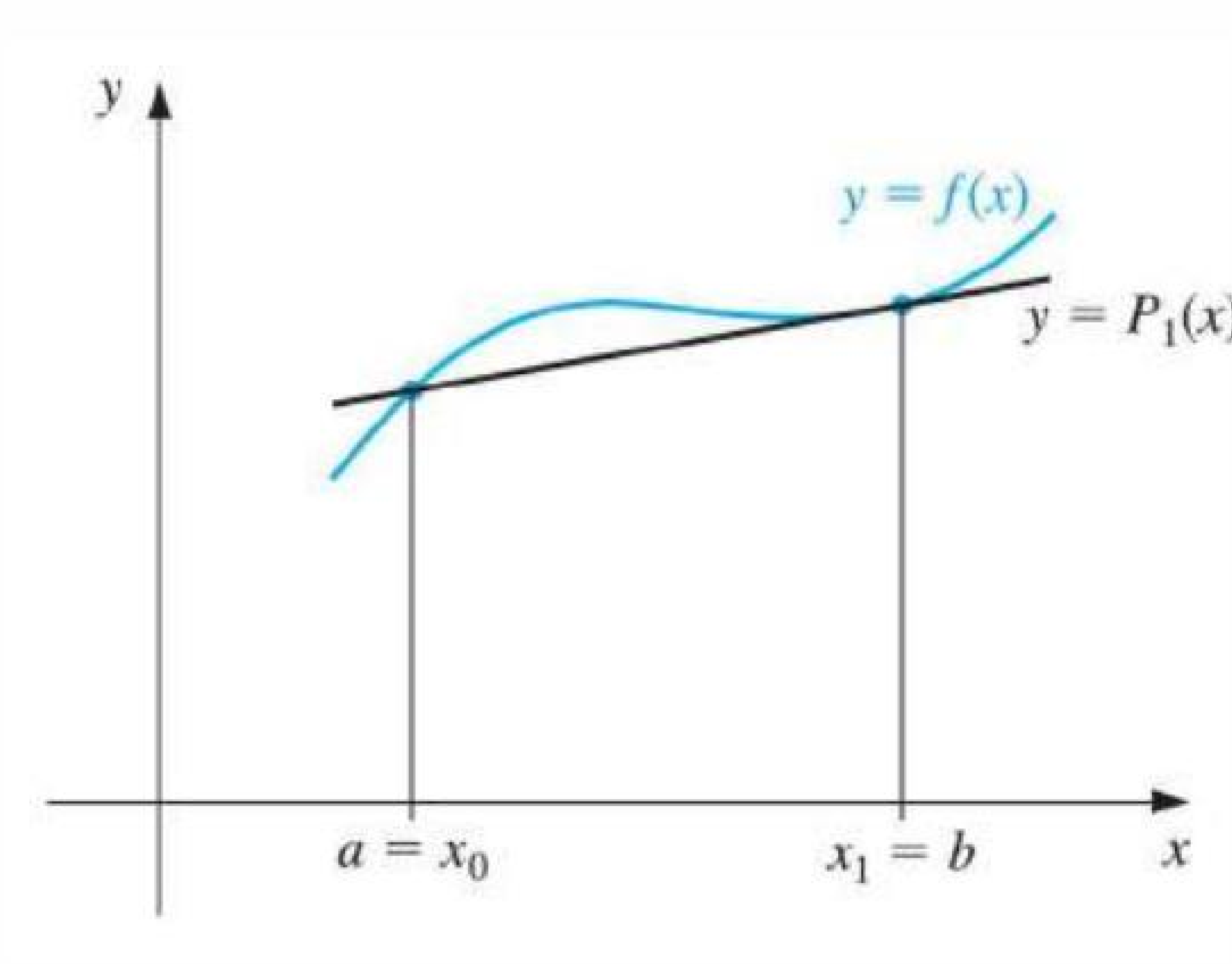
وبما أن $h = x_1 - x_0$ فلدينا القاعدة الآتية.

قاعدة شبه المنحرف **Trapezoidal Rule**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

وتسمى هذه بقاعدة شبه المنحرف؛ لأن f عندما تكون دالة قيمتها موجبة فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يكون مقرّبًا بمساحة شبه المنحرف. (كما يظهر في شكل 3.4).

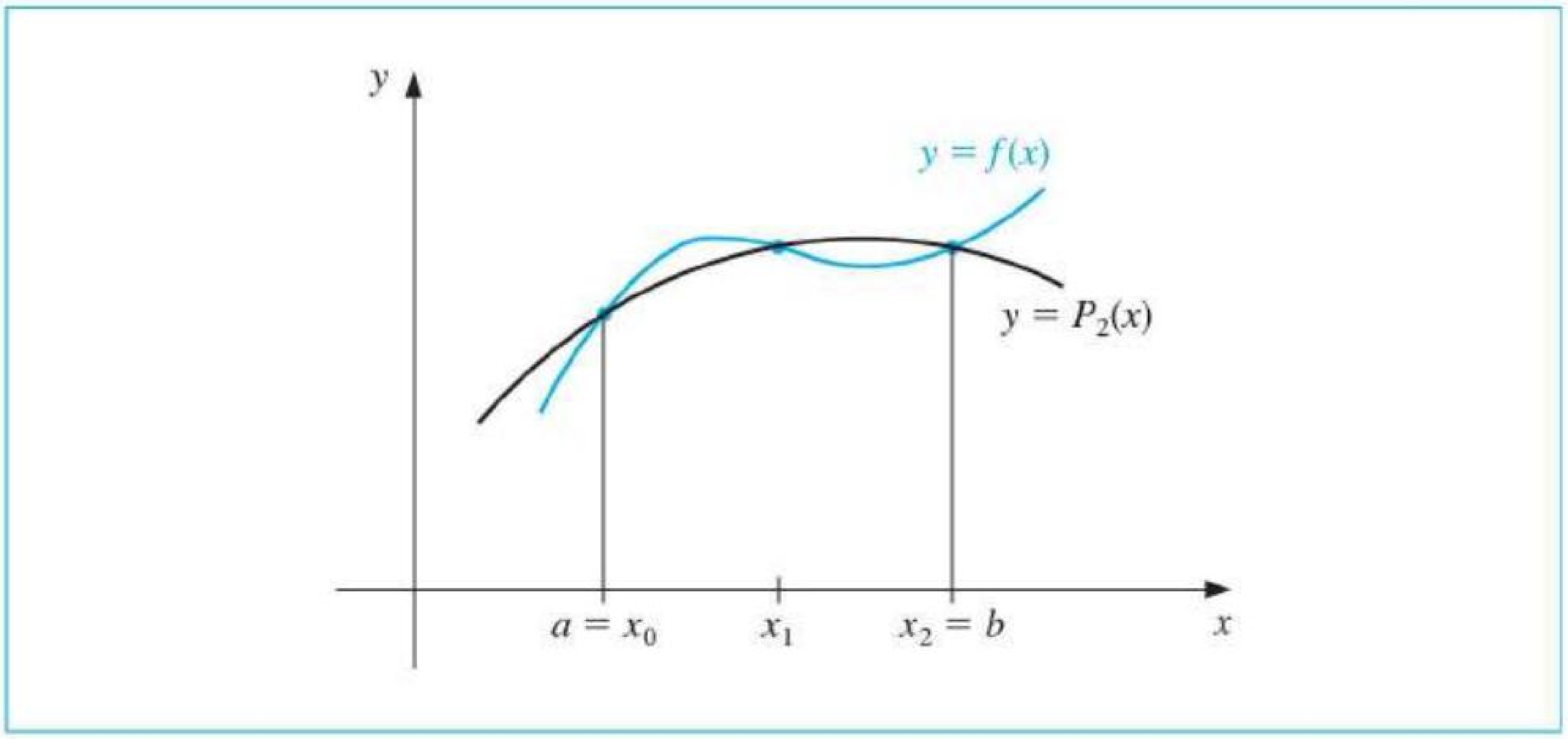
شكل 3.4



وبما أن حد الخطأ في قاعدة شبه المنحرف تحتوي على f''، فإن القاعدة تعطي النتائج الدقيقة عندما تطبق على أي دالّة مشتقتها الثانية مطابقة للصفر، أي لأي كثيرة حدود من الرتبة 1 أو أقل.

إن قاعدة سمبسون تنتج من تكامل كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة الثانية على الفترة $[a, b]$ باستخدام $x_0 = a, x_2 = b$ و $x_1 = a + h$ حيث $h = (b - a)/2$ **(انظر شكل 4.4)**

شكل 4.4



ولذلك فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx + \int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}f^{(3)}(\xi(x))\,dx$$

وعلى كل حال فإن اشتقاق قاعدة سمبسون بهذه الطريقة يعطي فقط خطأً من رتبة $O(h^4)$ محتويًا $f^{(3)}$.

وبمحاولة حل المسألة بطريقة أخرى، يمكننا اشتقاق حد ذي رتبة أعلى تحتوي $f^{(4)}$. ولشرح هذه الصيغة البديلة؛ نفترض f مفكوكًا بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة حول x_1. عندئذ كل x في $[x_0, x_2]$ يوجد العدد $\xi(x)$ في (x_0, x_2) بحيث

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4$$

و

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \left[f(x_1)(x-x_0) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4\right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\,dx \qquad (22.4)$$

وبما أن $(x - x_1)^4$ لا يكون سالبًا أبدًا في $[x_0, x_2]$، فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة تعطي

$$\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}\int_{x_0}^{x_2}(x - x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120}(x - x_1)^5\Big]_{x_0}^{x_2}$$

لعددٍ ما ξ_1 في (x_0, x_2)

على كل حال، $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ ولذلك فإن

$$(x_2 - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2 = (x_2 - x_1)^4 - (x_0 - x_1)^4 = 0$$

حيث

$$(x_2 - x_1)^3 - (x_0 - x_1)^3 = 2h^3 \quad \text{و} \quad (x_2 - x_1)^5 - (x_0 - x_1)^5 = 2h^5$$

وعليه يمكن كتابة الصيغة (22.4) على الصيغة

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

وإذا عوّضنا عن $f''(x_1)$ بالقيمة التقريبية المعطاة في الصيغة (9.4) في الفصل (1.4) نجد أن

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\left\{\frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2)\right\} + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{12}\left[\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_1)\right]$$

من الممكن استخدام طرائق بديلة (انظر التمرين 24) لبرهنة أن القيمتين ξ_1 و ξ_2 في هذا التعبير يمكن الاستعاضة عنهما بقيمة مشتركة ξ في (x_0, x_2). إن هذا يعطي قاعدة سمبسون.

ثوماس سمبسون

Thomas Simpson

1710–1761 عالم رياضيات قد تعلّمها بنفسه، وكان يعمل نسّاجًا لكسب رزقه. كان اهتمامه الأساس بمبرهنة الاحتمال، إلا أنه في عام 1750 نشر كتابًا في التفاضل والتكامل في مجلدين اسمه

The Doctrine and Application of Fluxions.

قاعدة سمبسون **Simpson's Rule**

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

وبما أن حد الخطأ فيه المشتقة الرابعة للدالّة f، فإن قاعدة سمبسون تعطي نتائج صحيحة لكل كثيرة حدود من الرتبة الثالثة أو أقل.

مثال 1 قاعدة شبه المنحرف للدالّة f على الفترة $[0, 2]$ هي

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx f(0) + f(2)$$

وقاعدة سمبسون للدالّة f على الفترة $[0, 2]$ هي

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

يظهر ملخص النتائج مقربًا إلى ثلاث خانات لبعض الدّوال الابتدائية في جدول (7.4).

لاحظ أن قاعدة سمبسون هي الأفضل في كل حالة. ■

جدول 7.4

$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x+1)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
القيمة الصحيحة	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
شبه المنحرف	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
سمبسون	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

إن الاشـــتقاق العادي لصيغ الخطأ يبنى على كثيرات الحدود التي تنتج نتائج صحيحة لتطبيق هذه الصيغ عليها. ويستخدم التعريف الآتي لتسهيل شرح هذا الاشتقاق.

تعريف 1.4 تعرف درجة الدقة لصيغة عددية على أنها أكبر عدد صحيح موجب n بحيث تكون جميع قيم الصيغة غير مقرّبة عند x^k لكل $k = 0, 1, 2 \ldots,\ n$. ■

إن التحسن في الدقة لقاعدة سمبسون على قاعدة شبه المنحرف يفسَّر عفويًّا بحقيقة أن قاعدة سمبسون تحتوي على التقييم عند نقطة متوسطة تؤدي إلى توازن أفضل للتقريب.

ويبين تعريف (1.4) أن قاعدة شـــبه المنحرف وقاعدة سمبســون لهما درجات دقة واحدة وثلاثة على التوالي.

إن كلًّا من التكامل والجمع عملية خطية، أي أن

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

و

$$\sum_{i=0}^{n}(\alpha f(x_i) + \beta g(x_i)) = \alpha \sum_{i=0}^{n} f(x_i) + \beta \sum_{i=0}^{n} g(x_i)$$

لكل زوج من الدّوال القابلة للتكامل f و g وأي زوج من الثوابت α, β.

إن المصطلح «مفتوحة ومغلقة لطرائق إيجاد التكامل» تعني أن الطرائق المفتوحة تستخدم لتقييم النقاط في الفترة المفتوحة (a, b) عند إيجاد تقريب للتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$. أما الطرائق المغلقة فهي تستخدم لتقييم نقطتي النهاية في الفترة المغلقة $[a, b]$.

وهذا يتضمن (انظر التمرين 25) أن رتبة الدقة لأي صيغة تكامل هي n إذا وفقط إذا كان الخطأ $E(P(x)) = 0$ لكثيرات الحدود $P(x)$ جميعها من الرتبة n ، $k = 0, 1, 2 \ldots,$ ، ولكن $E(P(x)) \neq 0$ لكثيرات حدود ما من الرتبة $n + 1$.

إن قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون هي أمثلة لعائلة من الطرائق تعرف بصيغ نيوتن – كوتس **Newton – Cotes formulas**.

هناك نوعان من صيغ نيوتن – كوتس: مفتوحة ومغلقة.

إن صيغـــة نيوتـــن – كوتـــس المغلقـــة ذات $(n + 1)$ نقطـــة تســـتخدم $x_i = x_0 + ih$ لـــكل $i = 0, 1, \ldots,\ n$. (انظر شكل 5.4).

تسمى هذه الصيغة مغلقة؛ لأن نقطتي الحدود للفترة المغلقة $[a, b]$ متضمنة في نقاط التقييم. تأخذ هذه الصيغة الصورة

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

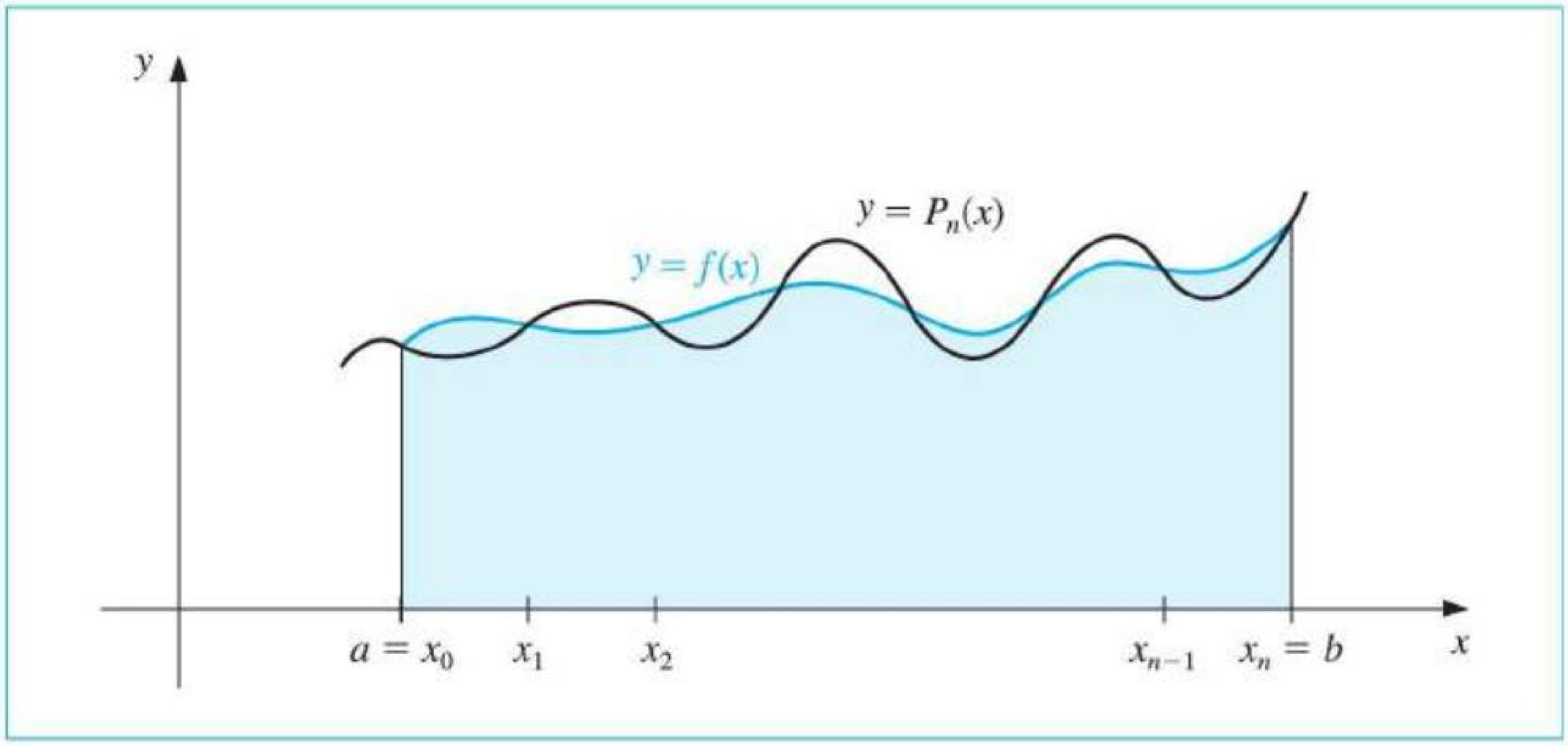
حيث

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\, dx$$

وتصف المبرهنة الآتية تفاصيل تحليل الخطأ المرتبط بصيغ نيوتن – كوتس.

انظر برهان هذه المبرهنة [IK, p. 313].

شكل 5.4



مبرهنة 2.4 افترض أن $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ هي صيغة نيوتن – كوتس ذات $(n+1)$ نقطة حيث $x_0 = a, x_n = b$ و $h = (b-a)/n$. عندئذ، يوجد عدد $\xi \in (a, b)$ يحقق

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

إذا كان n عددًا زوجيًّا و $f \in C^{n+2}[a,b]$. أما إذا كان n عددًا فرديًّا و $f \in C^{n+1}[a,b]$ فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

■

لاحظ أنه عندما يكون n عددًا صحيحًا زوجيًّا، فإن رتبة الدقة $n+1$ على الرغم من أن كثيرة الحدود للاستيفاء الداخلي **interpolation** هي من رتبة n على الأكثر.

عندما يكون n عددًا فرديًّا فإن رتبة الدقة هي فقط n.

بعض صيغ نيوتن – كوتس المغلقة الشائعة **closed Newton–Cotes formulas**، وحدود الخطأ لها هي كما يلي:

$n = 1$: قاعدة شبه المنحرف **Trapezoidal rule**

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad (23.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_1$.

$n = 2$: قاعدة سمبسون **Simpson's rule**

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \qquad (24.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_2$.

$n = 3$: قاعدة الثلاثة أثمان لسمبسون **Simpson's Three-Eighths rule**

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \qquad (25.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_3$.

:$n = 4$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi) \qquad (26.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_4$.

إن صيغ نيوتن – كوتس المفتوحة *open Newton–Cotes formulas* تستخدم لتقييم النقاط $x_i = x_0 + ih$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ حيث $h = (b-a)/(n+2)$ و $x_0 = a + h$.

إن هذا يعطي $x_n = b - h$، ولذلك نعدد نقاط النهاية بوضع $x_{-1} = a$ و $x_{n+1} = b$ (كما يظهر في شكل 6.4).

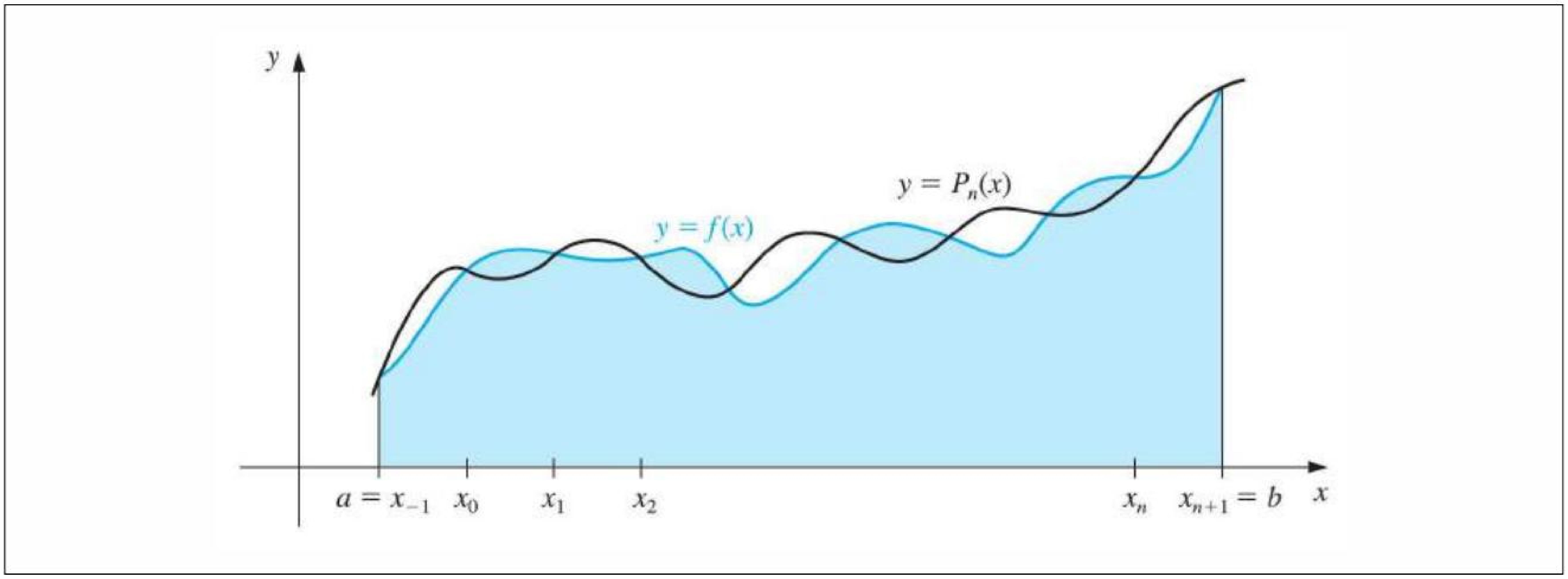
إن الصيغ المفتوحة تحوي النقاط المستخدمة جميعها في التقريب في الفترة المفتوحة (a, b).

تصبح الصيغ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

حيث $a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$ أيضًا.

شكل 6.4



المبرهنة الآتية مماثلة للمبرهنة (2.4)، وبرهانها موجود في [IK, p. 314].

مبرهنة 3.4 افتـرض أن $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ هـي صيغـة نيوتن – كوتـس المفتوحـة ذات $(n+1)$ نقطة حيث $x_{-1} = a, x_{n+1} = b$ و $h = (b-a)/(n+2)$. عندئذ، يوجد عدد $\xi \in (a, b)$ بحيث

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

إذا كان n زوجيًّا و $f \in C^{n+2}[a, b]$، وأما إذا كان n فرديًّا و $f \in C^{n+1}[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} t(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$ ■

بعض صيغ نيوتن – كوتس المفتوحة مع حد الخطأ هي

$n = 0$: قاعدة النقطة الوسيطية **Midpoint rule**

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \quad \text{حيث} \quad x_{-1} < \xi < x_1 \tag{27.4}$$

$n = 1$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \quad \text{حيث} \quad x_{-1} < \xi < x_2 \tag{28.4}$$

$n = 2$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) \tag{29.4}$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_3$.

$n = 3$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{5h}{24}[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95}{144} h^5 f^{(4)}(\xi) \tag{30.4}$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_4$.

مثـال 2 إن استخدام صيغ نيوتن – كوتس المفتوحة والمغلقة المدرجة في الصيغ (23.4)–(26.4) و(27.4)–(30.4) لإيجاد تقريب للتكامل $\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = 1 - \sqrt{2}/2 \approx 0.29289322$ يعطي النتائج المدوّنة في جدول (8.4). ■

جدول 8.4

n	0	1	2	3	4
المعادلات المغلقة		0.27768018	0.29293264	0.29291070	0.29289318
الخطأ		0.01521303	0.00003942	0.00001748	0.00000004
المعادلات المفتوحة	0.30055887	0.29798754	0.29285866	0.29286923	
الخطأ	0.00766565	0.00509432	0.00003456	0.00002399	

EXERCISE SET مجموعة التمارين 3.4

1. أوجد تقريبًا للتكاملات الآتية باستخدام قاعدة شبه المنحرف:

أ. $\int_{0.5}^{1} x^4\, dx$ ب. $\int_{0}^{0.5} \frac{2}{x-4}\, dx$ جـ. $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x\, dx$ د. $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x}\, dx$

هـ. $\int_{1}^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\, dx$ و. $\int_{0}^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\, dx$ ز. $\int_{0}^{\pi/4} x \sin x\, dx$ حـ. $\int_{0}^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x\, dx$

2. أوجد تقريبًا للتكاملات الآتية باستخدام قاعدة شبه المنحرف

أ. $\int_{-0.25}^{0.25} (\cos x)^2\, dx$ ب. $\int_{-0.5}^{0} x \ln(x+1)\, dx$

جـ. $\int_{0.75}^{1.3} \left((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1\right)\, dx$ د. $\int_{e}^{e+1} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

3. أوجد حدًّا للخطأ في التمرين (1) باستخدام صيغة الخطأ، وقارن ذلك بالخطأ الفعلي.
4. أوجد حدًّا للخطأ في التمرين (2) باستخدام صيغة الخطأ، وقارن ذلك بالخطأ الفعلي.
5. أعد حل التمرين (1) باستخدام قاعدة سمبسون.
6. أعد حل التمرين (2) باستخدام قاعدة سمبسون.
7. أعد حل التمرين (3) باستخدام قاعدة سمبسون ونتائج التمرين (5).
8. أعد حل التمرين (4) باستخدام قاعدة سمبسون ونتائج التمرين (6).
9. أعد حل التمرين (1) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية.
10. أعد حل التمرين (2) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية.
11. أعد حل التمرين (3) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية ونتائج التمرين (9).
12. أعد حل التمرين (4) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية ونتائج التمرين (10).
13. إن تطبيق قاعدة شبه المنحرف لإيجاد $\int_0^2 f(x)\, dx$ يعطي القيمة 4، أما قاعدة سمبسون فتعطي القيمة 2، فما قيمة $f(1)$؟
14. إن تطبيق قاعدة شبه المنحرف لإيجاد $\int_0^2 f(x)\, dx$ يعطي القيمة 5، وقاعدة النقطة الوسيطية تعطي القيمة 4، فما القيمة التي تعطيها قاعدة سمبسون؟
15. أوجد رتبة الدقة التي تعطيها قاعدة التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

16. افترض أن $h = (b-a)/3,\ x_0 = a,\ x_1 = a+h$ و $x_2 = b$ أوجد رتبة الدقة التي تعطيها قاعدة التكامل

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \frac{9}{4} h f(x_1) + \frac{3}{4} h f(x_2)$$

17. إن قاعدة التكامل $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات جميعها الحدود من الرتبة الثانية أو أقل. حدّد قيم c_2, c_1, c_0.
18. إن قاعدة التكامل $\int_0^2 f(x)\, dx = c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)$ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات الحدود جميعها من الرتبة الثانية أو أقل.حدّد قيم c_2, c_1, c_0.
19. أوجد الثوابت c_0, c_1, x_1 بحيث تعطي صيغة التكامل $\int_0^1 f(x)\, dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$ أعلى رتبة ممكنة من الدقة.
20. أوجد الثوابت x_0, x_1, c_1 بحيث تعطي صيغة التكامل $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2} f(x_0) + c_1 f(x_1)$ أعلى رتبة ممكنة من الدقة.

21. أوجد قيمًا تقريبية للتكاملات الآتية باستخدام الصيغ (23.4) حتى (30.4).
هل درجات الدقة في التقريبات متلائمة مع صيغ الخطأ؟
أي الفقرتين (د) و (هـ) يعطي التقريب الأفضل؟

أ. $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x}\, dx$ ب. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2\, dx$ جـ. $\int_{1.1}^{1.5} e^x\, dx$

د. $\int_1^{10} \frac{1}{x}\, dx$ هـ. $\int_1^{5.5} \frac{1}{x}\, dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x}\, dx$ و. $\int_0^1 x^{1/3}\, dx$

22. لديك قيم الدّالة f على القيم الآتية:

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

أوجد التقريب للتكامل $\int_{1.8}^{2.6} f(x)\, dx$ باستخدام جميع صيغ التكامل المناسبة التي درست في هذا الفصل.

23. افترض أن في بيانات التمرين (22) أخطاء تدوير كما في جدول الآتي

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
الخطأ في $f(x)$	2×10^{-6}	-2×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	2×10^{-6}

احسب الأخطاء الناتجة من التدوير عند حل التمرين (22).

24. اشتق قاعدة سمبسون مع حد الخطأ باستخدام

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi)$$

أوجد a_0، a_1، a_2 من حقيقة أن قاعدة سمبسون تكون صحيحة للدالّة $f(x) = x^n$ عندما $n = 1, 2, 3$.
ثم أوجد k بتطبيق صيغة التكامل على $f(x) = x^4$.

25. برهن العبارة الواردة بعد تعريف (1.4)، أي برهن أن صيغة التكامل لها رتبة دقة إذا وفقط إذا كان حد الخطأ $E(P(x)) = 0$ كثيرات الحدود $P(x)$ جميعها من الرتبة n $k = 0, 1, \ldots, n$ ولكن $E(P(x)) \neq 0$ لبعض كثيرات الحدود $P(x)$ من الرتبة $n + 1$.

26. اشتق قاعدة الثلاثة أثمان لسمبسون، الصيغة (25.4)، مع حد الخطأ باستخدام المبرهنة (2.4).

27. اشتق الصيغة (28.4) مع حد الخطأ باستخدام المبرهنة (3.4).

4.4 التكامل العددي المركب Composite Numerical Integration

غالبًا ما يكون التقريب المتقطع ذا فاعلية. تذكر أن هذا قد استُخدِم في استيفاء بيزييه Bézier.

إن صيغ نيوتن–كوتس عمومًا تصلح للاستخدام على فترات تكامل كبيرة. هناك حاجة إلى صيغ ذات رتبة عالية، لكن يصعب في هذه الصيغ إيجاد قيمها. بالإضافة إلى ذلك فإن صيغ نيوتن– كوتس مبنية على كثيرات حدود استكمالية مستخدمة نقاطا متساوية الأبعاد؛ وذلك بسبب طبيعة ذبذبة كثيرات الحدود عالية الدرجة. وسنناقش في هذا الفصل المنحنى المتقطع (*piecewise*) للتكامل العددي باستخدام صيغ نيوتن–كوتس ذات الرتب المتدنية.

إن هذه هي الطرائق الأكثر استخدامًا.

افترض إيجاد تقريب للتكامل $\int_0^4 e^x\, dx$. إن قاعدة سمبسون على فرض $h = 2$ تعطي

$$\int_0^4 e^x\,dx \approx \frac{2}{3}(e^0 + 4e^2 + e^4) = 56.76958$$

وبما أن الجواب الدقيق في هذه الحالة هو $e^4 - e^0 = 53.59815$ ، فإن الخطأ يساوي -3.17143 وهو أكثر كثيرًا مما نقبله عادة.

ولتطبيق تقنية متقطعة لهذه المسألة؛ قسّم $[0, 4]$ بين $[0, 2]$ و $[2, 4]$ واستخدم قاعدة سمبسون مرتين باستخدام $h = 1$.

إن هذا يعطيك

$$\begin{aligned}\int_0^4 e^x\,dx &= \int_0^2 e^x\,dx + \int_2^4 e^x\,dx \approx \frac{1}{3}\left(e^0 + 4e + e^2\right) + \frac{1}{3}\left(e^2 + 4e^3 + e^4\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(e^0 + 4e + 2e^2 + 4e^3 + e^4\right)\\ &= 53.86385\end{aligned}$$

لقد تقلّص الخطأ إلى -0.26570 وهذه النتائج تدفعنا إلى تقسيم الفترتين $[0, 2]$ و $[2, 4]$ واستخدام قاعدة سمبسون بالقيمة $h = \frac{1}{2}$ فنحصل على

$$\begin{aligned}\int_0^4 e^x\,dx &= \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 e^x\,dx + \int_2^3 e^x\,dx + \int_3^4 e^x\,dx\\ &\approx \frac{1}{6}\left(e_0 + 4e^{1/2} + e\right) + \frac{1}{6}\left(e + 4e^{3/2} + e^2\right)\\ &\quad + \frac{1}{6}\left(e^2 + 4e^{5/2} + e^3\right) + \frac{1}{6}\left(e^3 + 4e^{7/2} + e^4\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(e^0 + 4e^{1/2} + 2e + 4e^{3/2} + 2e^2 + 4e^{5/2} + 2e^3 + 4e^{7/2} + e^4\right)\\ &= 53.61622\end{aligned}$$

ويقدر الخطأ لهذا التقريب بالقيمة -0.01807.

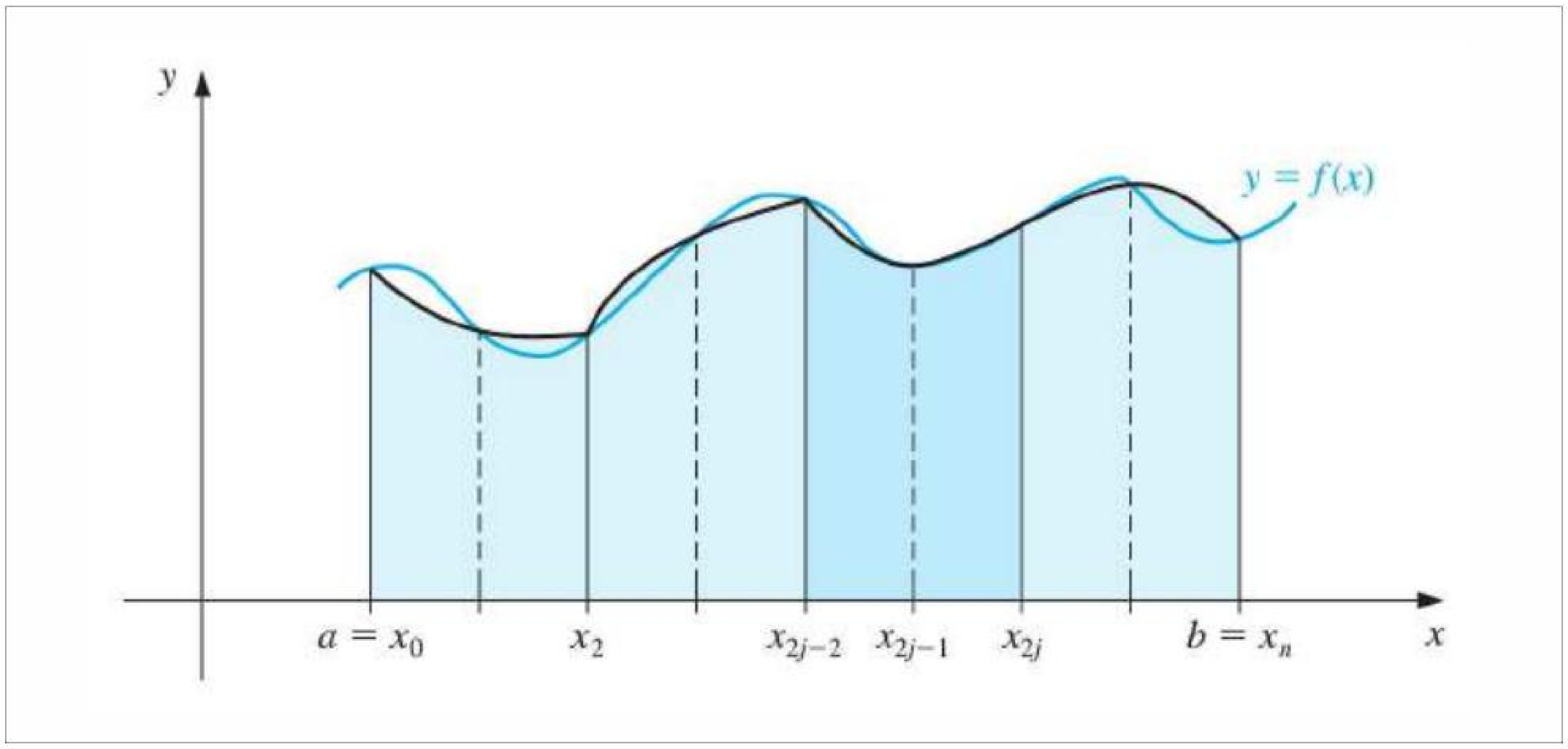
ولتعميم هذه الطريقة؛ سنختار عددًا صحيحًا زوجيًّا. قسّم الفترة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية، وطبّق قاعدة سمبسون على كل فترتين جزئيتين متتاليتين. (انظر شكل 7.4)

خذ $h = (b - a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ فنحصل على

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\,dx\\ &= \sum_{j=1}^{n/2} \left\{\frac{h}{3}[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_j)\right\}\end{aligned}$$

لبعض ξ_j حيث $x_{2j-2} < \xi_j < x_{2j}$ شريطة أن $f \in C^4[a, b]$.

باستخدام حقيقة أنه لكل $j = 1, 2, \ldots, (n/2) - 1$. يكون $f(x_{2j})$ ظاهرًا في الحد المقابل للفترة $[x_{2j-2}, x_{2j}]$ وكذلك في الحدّ المقابل للفترة $[x_{2j}, x_{2j+2}]$،



شكل 7.4

فيمكننا تقليص هذا المجموع إلى

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right] - \frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

ويكون الخطأ المرتبط بهذا التقريب

$$E(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

حيث $x_{2j-2} < \xi_j < x_{2j}$ لكل $j = 1, 2, \ldots, n/2$.

إذا كان $f \in C^4[a, b]$ فإن مبرهنة القيمة القصوى تتضمن أن $f^{(4)}$ يتخذ قيمته العظمى وقيمته الصغرى في الفترة $[a, b]$.

بما أن

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le f^{(4)}(\xi_j) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

فسنحصل على

$$\frac{n}{2}\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) \le \frac{n}{2}\max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

و

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

ومن مبرهنة القيمة الوسطية فإنه يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث

$$f^{(4)}(\mu) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

وهكذا فإن

$$E(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) = -\frac{h^5}{180} n f^{(4)}(\mu)$$

أو بما أن $h = (b-a)/n$ فإن

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$$

إن هذه المشاهدات تؤدي إلى النتيجة الآتية:

مبرهنة 4.4

ليكن $f \in C^4[a,b]$، n عدد زوجي، $h = (b-a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ فإنه يوجد $\mu \in (a,b)$ بحيث إن قاعدة سمبسون المركبة يمكن كتابتها مع حد الخطأ فيها إلى n من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$$

■

تستخدم الخوارزمية (1.4) قاعدة سمبسون المركبة على n من الفترات الجزئية، وإن هذه الخوارزمية هي الأكثر استخدامًا؛ لكونها خوارزمية عرض عام للتكامل.

ALGORITHM

الخوارزمية

1.4

قاعدة سمبسون المركبة Compsite Simpson's Rule

لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$

المدخلات: نقطتا النهاية b، a، n عدد صحيح موجب زوجي.

المخرجات: تقريب XI إلى I.

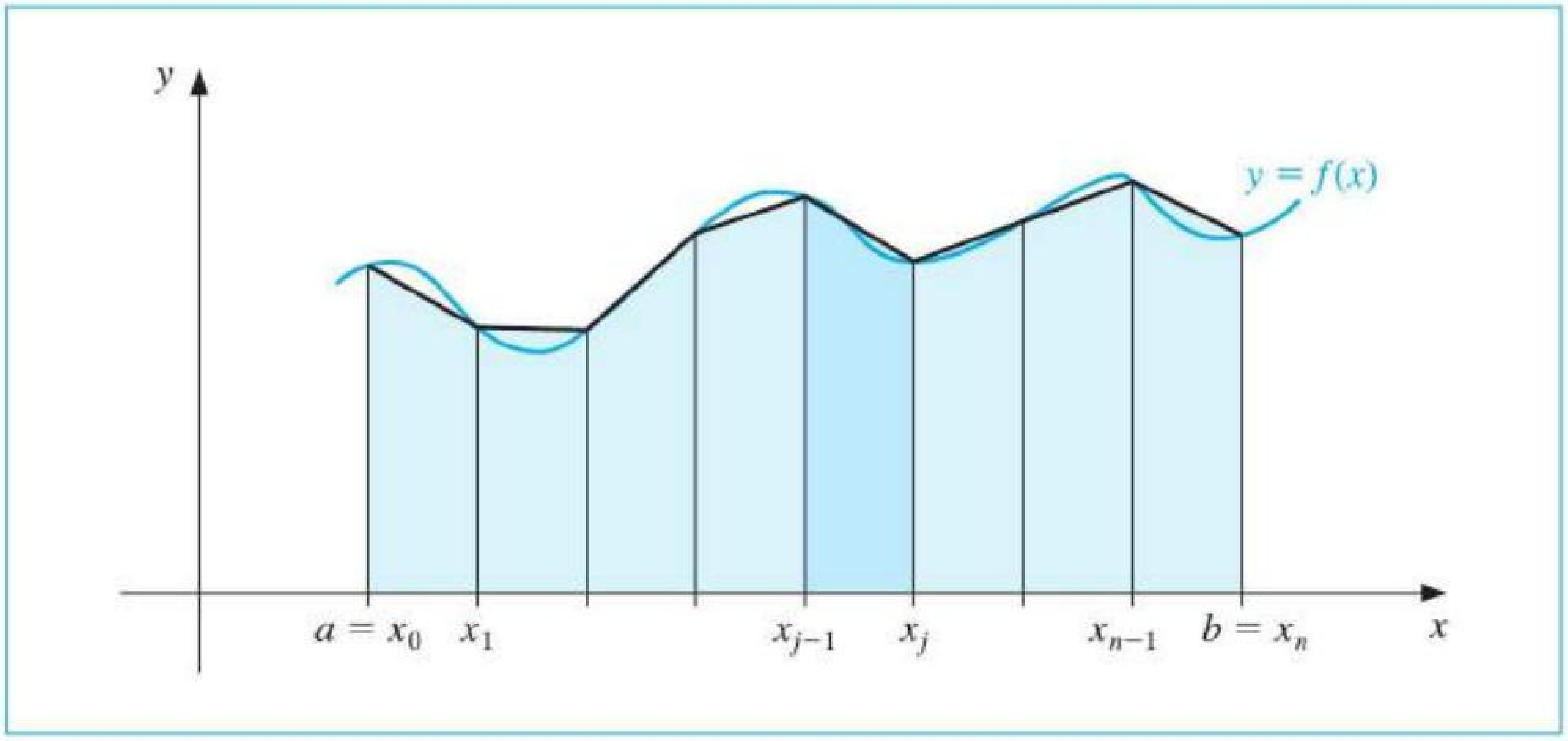
الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/n$.
2	ضع $XI0 = f(a) + f(b)$ $XI1 = 0$ (مجموع الدالة $f(x_{2i}-1)$) $XI2 = 0$ (مجموع الدالة $f(x_{2i})$)
3	كرر الخطوتين 4 و 5 لكل $i = 1, \ldots, n-1$.
4	ضع $X = a + ih$.
5	إذا كان i عددًا زوجيًا فضع $XI2 = XI2 + f(X)$ وإلا فضع $XI1 = XI1 + f(X)$.
6	ضع $XI = h(XI0 + 2 \cdot XI2 + 4 \cdot XI1)/3$.
7	المخرجات (XI) توقف.

■

يمكن تطبيق طريقة التجزئة لأي من صيغ نيوتن– كوتس.

إن تعميمات قاعدة شبه المنحرف (انظر شكل 8.4) وقاعدة النقطة الوسيطية أُعطيت دون برهان.

شكل 8.4



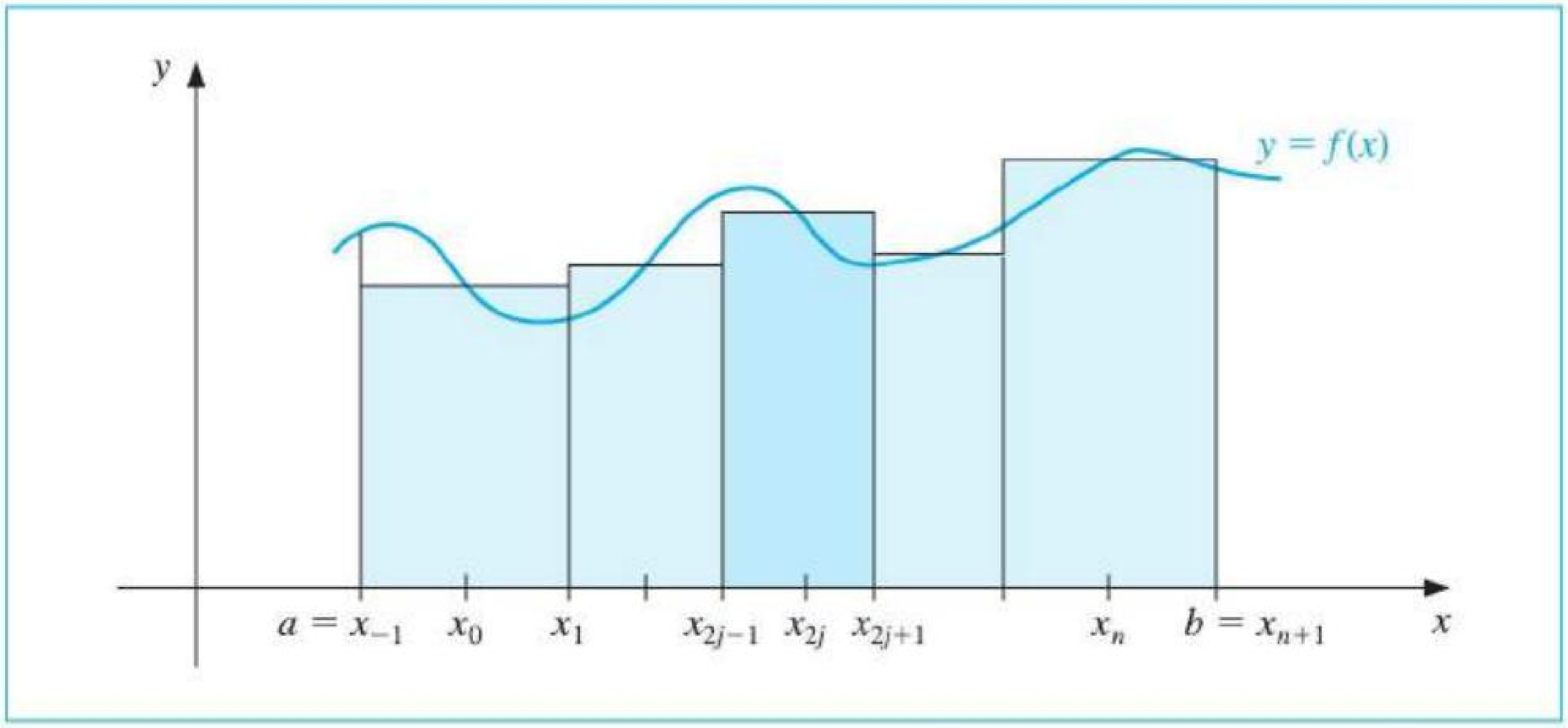
بما أن قاعدة شبه المنحرف تتطلب فترة واحدة لكل تطبيق، فإن العدد الصحيح n يمكن أن يكون فرديًا أو زوجيًا.

مبرهنة 5.4 ليكن $f \in C^2[a, b]$، $h = (b-a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$. عندئذ يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث إن قاعدة شبه المنحرف المركبة يمكن كتابتها مع حد الخطأ لكل n من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)$$ ■

أما قاعدة النقطة الوسيطية المركبة فإن n يجب أن يكون أيضًا زوجيًا. (انظر شكل 9.4)

شكل 9.4



مبرهنة 6.4 ليكن $f \in C^2[a, b]$، n عددًا زوجيًا، $h = (b-a)/(n+2)$ و $x_j = a + (j+1)h$ لكل $j = -1, 0, \ldots, n+1$. عندئذ يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث يمكن كتابة قاعدة النقطة الوسيطية

المركبة مع حد الخطأ فيها لكل $(n + 2)$ من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6}h^2 f''(\mu)$$ ■

مثال 1 ليكن المطلوب تقريب $\int_0^\pi \sin x\,dx$ بخطأ مطلق أقل من 0.00002 باستخدام قاعدة سمبسون المركبة. إن قاعدة سمبسون المركبة تعطي لعدد ما $\mu \in (a, b)$ الصيغة الآتية:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{h}{3}\left[2\sum_{j=1}^{(n/2)-1}\sin x_{2j} + 4\sum_{j=1}^{n/2}\sin x_{2j-1}\right] - \frac{\pi h^4}{180}\sin\mu$$

وبما أن الخطأ المطلق يجب أن يكون أقل من 0.00002 فعلينا أن نستخدم المتراجحة الآتية لتحديد n و h:

$$\left|\frac{\pi h^4}{180}\sin\mu\right| \le \frac{\pi h^4}{180} = \frac{\pi^5}{180n^4} < 0.00002$$

وباستكمال هذه الحسابات نحصل على $n \ge 18$. إذا كان $n = 20$ فإن الناتج هو $h = \pi/20$ وتعطينا الصيغة

$$\int_0^\pi \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{60}\left[2\sum_{j=1}^{9}\sin\left(\frac{j\pi}{10}\right) + 4\sum_{j=1}^{10}\sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{20}\right)\right] = 2.000006$$

وللتأكد من رتبة الدقة هذه؛ فإن استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة تستلزم أن

$$\left|\frac{\pi h^2}{12}\sin\mu\right| \le \frac{\pi h^2}{12} = \frac{\pi^3}{12n^2} < 0.00002$$

أو أن $n \ge 360$. وبما أن هذا يتطلب حسابات أكثر كثيرًا من تلك التي نحتاج إليها لقاعدة سمبسون المركبة، فإننا لا نريد استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة لهذه المسألة.

وبهدف المقارنة، فإن قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام $n = 20$ و $h = \pi/20$ تعطي

$$\int_0^\pi \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{40}\left[2\sum_{j=1}^{19}\sin\left(\frac{j\pi}{20}\right) + \sin 0 + \sin\pi\right] = \frac{\pi}{40}\left[2\sum_{j=1}^{19}\sin\left(\frac{j\pi}{20}\right)\right]$$

$$= 1.9958860$$

إن الجواب الصحيح هو 2، ولذلك فإن قاعدة سمبسون تعطينا جوابًا ضمن الخطأ، أما قاعدة شبه المنحرف باستخدام $n = 20$ فمن الواضح أنها لا تعطينا هذا الجواب. ■

إن معظم برامج CAS تتضمن قاعدة سمبسون المركبة وقاعدة شبه المنحرف المركبة.

أما في Maple فعليك أولًا الدخول إلى المكتبة حيث تكون معرفة بالأمر

```
>with(student)
```

أما طلبات طرائق الحل فهي trapezoid(f,x=a..b,n) و simpson(f,x=a..b,n)

أما مثالنا

```
>f:=sin(x)
```

$$f := \sin(x)$$

```
>trapezoid(f,x=0..Pi,20)
```

$$\frac{1}{20}\pi\left(\sum_{i=1}^{19}\sin\left(\frac{1}{20}i\pi\right)\right)$$

```
>evalf(%)
```

$$1.995885974$$

```
>evalf(simpson(f,x=0..Pi,20))
```

$$2.000006785$$

فإن قاعدة النقطة الوسيطية موجودة كذلك في مكتبة **Maple** ويمكن الوصول إليها بالأمر

```
>evalf(middlesum(f,  x=0...Pi,10))
```

التي تعطي التقريب 2.008248408

ولإيضاح رموز **Maple** لطريقة النقطة الوسيطية نعرّف $f(x), a, b, n, h$ بالأوامر

```
>f:=x->sin(x)
>a:=0;  b:=Pi;  n:=18;  h:=(b-a)/(n+2)
```

ونحتاج أيضًا إلى متغيّر لحساب الجمع الدوّار الذي نضع له القيمة الابتدائية 0.

```
>Tot:=0
```

وفي **Maple** تعرّف الحلقة المحكمة بالعد كما يلي:

```
for loop control variable from initial-value to terminal value do
      statement;
      statement;
      :
      statement;
od;
```

نضع متغير تحكم الحلقة j، الذي يبدأ من 0 وينتهي في $n/2 = 9$ بخطوات متساوية مقدارها 1.

كل قيمة $j = 0, 1, \ldots, 9$ تستكمل الحلقة، ويُنجز كل حساب داخل الحلقة حتى نصل إلى كلمة od. أما الكلمات المستخدمة المخزونة فهي od ،to،do،for،from. انتبه إلى عدم استخدام (;) بعد كلمة do

```
> for j from 0 to n/2 do
> xj:=a+(2*j+1)*h;
> Tot:=evalf(Tot+f(xj))
>od
```

إن هذا ينتج سلسلة من النتائج تنتهي بالمجموع

$$Tot = \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) = \sum_{j=0}^{9} f(x_{2j}) = 6.392453222$$

ثم نضرب في العدد $2h$ لإنهاء طريقة النقطة الوسيطية المركبة

```
>Tot:=evalf(2*h*Tot)
```

$$Tot := 2.008248408$$

هناك خاصية مهمة تشترك بها طرائق التكامل المركبة جميعها ألا وهي الاستقرار المتعلق بخطأ التدوير. ولشرح ذلك؛ افترض أننا طبقنا قاعدة سمبسون المركبة باستخدام n من الفترات الجزئية لتكامل دالة ما f على $[a, b]$، وجدنا الحد الأعلى لخطأ التدوير. افترض أنه قُرِّب $f(x_i)$ بالمقدار $\tilde{f}(x_i)$، وأن

$$f(x_i) = \tilde{f}(x_i) + e_i \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

حيث تعبر e_i عن خطأ التدوير المصاحب لاستخدام $\tilde{f}(x_i)$ بصفته تقريبًا للمقدار $f(x_i)$. وعندئذ فإن الخطأ التراكمي $e(h)$ باستخدام قاعدة سمبسون المركبة يساوي

$$e(h) = \left| \frac{h}{3} \left[e_0 + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} e_{2j} + 4 \sum_{j=1}^{n/2} e_{2j-1} + e_n \right] \right|$$

$$\leq \frac{h}{3} \left[|e_0| + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} |e_{2j}| + 4 \sum_{j=1}^{n/2} |e_{2j-1}| + |e_n| \right]$$

إذا كانت أخطاء التدوير محدودة تجانسيًّا بالقيمة ε ينتج

$$e(h) \leq \frac{h}{3} \left[\varepsilon + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right)\varepsilon + 4\left(\frac{n}{2}\right)\varepsilon + \varepsilon \right] = \frac{h}{3} 3n\varepsilon = nh\varepsilon$$

ولكن $nh = b - a$ ولذلك $e(h) \leq (b - a)\varepsilon$ وهو حدّ مستقل عن h (و n).

إن هذا يعني أنه على الرغم من حاجاتنا إلى تقسيم فترة إلى أجزاء عديدة لضمان الدقة، فإن الحساب الزائد اللازم لا يزيد خطأ التدوير.

وهذا يعني أن الطريقة مستقرة عندما تقترب h من الصفر.

تذكر أن هذا ليس صحيحًا في عمليات الاشتقاق العددي التي بحث فيها في بداية هذا الفصل.

مجموعة التمارين 4.4 EXERCISE SET

1. استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة بقيم n المشار إليها لإيجاد تقريب لكل من التكاملات الآتية:

أ. $\int_1^2 x \ln x \, dx, \quad n = 4$

ب. $\int_{-2}^2 x^3 e^x \, dx, \quad n = 4$

جـ. $\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx, \quad n = 6$

د. $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx, \quad n = 6$

هـ. $\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx, \quad n = 8$

و. $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx, \quad n = 8$

ز. $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx, \quad n=8$ ي. $\int_0^{3\pi/8} \tan x\,dx, \quad n=8$

2. استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة بقيم n المشار إليها لإيجاد تقريب لكل من التكاملات الآتية :

أ. $\int_{-0.5}^{0.5} \cos^2 x\,dx, \quad n=4$ ب. $\int_{-0.5}^{0.5} x\ln(x+1)\,dx, \quad n=6$

جـ. $\int_{.75}^{1.75} (\sin^2 x - 2x\sin x + 1)\,dx, \quad n=8$ د. $\int_e^{e+2} \frac{1}{x\ln x}\,dx, \quad n=8$

3. استخدم قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكاملات في التمرين (1).

4. استخدم قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكاملات في التمرين (2).

5. استخدم قاعدة النقطة الوسيطية بفترات جزئية، عددها $n+2$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (1).

6. استخدم قاعدة النقطة الوسيطية بفترات جزئية، عددها $(n+2)$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (2).

7. أوجد تقريبًا للتكامل $\int_0^2 x^2\ln(x^2+1)\,dx$ مستخدمًا $h=0.25$.

استخدم أ.قاعدة شبه المنحرف المركبة.

ب.قاعدة سمبسون المركبة.

جـ.قاعدة النقطة الوسيطية المركبة.

8. قرّب التكامل $\int_0^2 x^2e^{-x^2}\,dx$ مستخدمًا $h=0.25$

استخدم أ.قاعدة شبه المنحرف المركبة.

ب.قاعدة سمبسون المركبة.

جـ.قاعدة النقطة الوسيطية المركبة.

9. ليكن $f(0)=1,\ f(0.5)=2.5,\ f(1)=2$ و $f(0.25)=f(0.75)=\alpha$. أوجد α إذا كانت قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام $n=4$ تعطي القيمة 1.75 للتكامل $\int_0^1 f(x)\,dx$.

10. تعطي قاعدة النقطة الوسيطية القيمة 12؛ لكونها تقريبًا للتكامل $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$، وتعطي قاعدة النقطة الوسيطية المركبة باستخدام $n=2$ القيمة 5، وتعطي قاعدة سمبسون المركبة القيمة 6. استخدم الحقائق $f(-1)=f(1)$ و $f(-0.5)=f(0.5)-1$ لإيجاد قيم $f(-1)$، $f(-0.5)$، $f(0)$، $f(0.5)$ و $f(1)$.

11. أوجد قيم n و h اللازمة لتقريب $\int_0^2 e^{2x}\sin 3x\,dx$ ضمن 10^{-4}.

استخدم أ.قاعدة شبه المنحرف المركبة.

ب.قاعدة سمبسون المركبة.

جـ.قاعدة النقطة الوسيطية المركبة.

12. كرّر تمرين (11) للتكامل $\int_0^\pi x^2\cos x\,dx$.

13. أوجد قيم n و h اللازمة لتقريب $\int_0^2 \frac{1}{x+4}\,dx$ ضمن 10^{-5}، واحسب قيمة التقريب.

استخدم أ. قاعدة شبه المنحرف المركبة.

ب.قاعدة سمبسون المركبة.

جـ.قاعدة النقطة الوسيطية المركبة.

14. كرر التمرين 13 للتكامل $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

15. ليكن f معرفاً بما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+1, & 0\le x\le 0.1,\\ 1.001+0.03(x-0.1)+0.3(x-0.1)^2+2(x-0.1)^3, & 0.1\le x\le 0.2\\ 1.009+0.15(x-0.2)+0.9(x-0.2)^2+2(x-0.2)^3, & 0.2\le x\le 0.3\end{cases}$$

أ. ادرس الاتصال لمشتقات f.

ب. استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب $\int_0^{0.3} f(x)\,dx$ مستخدمًا $n = 6$، وقدّر الخطأ باستخدام حدّ الخطأ.

ج. استخدم قاعدة سمبسون المركبة مستخدمًا $n = 6$ لتقريب $\int_0^{0.3} f(x)\,dx$. هل النتائج أدقُّ مما هي في (ب)؟

16. أثبت أن الخطأ $E(f)$ لقاعدة سمبسون المركبة يمكن تقريبه بالمقدار

$$-\frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)]$$

[إضاءة: $\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)(2h)$ هي مجموع ريمان للتكامل $\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx$]

17. أ. اشتق تقديرًا للخطأ $E(f)$ في قاعدة شبه المنحرف المركبة مستخدمًا الطريقة في التمرين (16).

ب. كرّر الفقرة (أ) لقاعدة النقطة الوسيطية المركبة.

18. استخدم تقدير الخطأ في التمرينين (16) و (17) لتقدير الأخطاء في التمرين (12).

19. استخدم تقدير الخطأ في التمرينين (16) و (17) لتقدير الأخطاء في التمرين (14).

20. يُبرهَن في حساب التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات، وفي مقررات الإحصاء أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2}\,dx = 1$$

لأي قيمة موجبة σ.

إن الدّالة $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2}$ تسمى دالة الكثافة الاحتمالية الطبيعية ذات المعدل $\mu = 0$ والانحراف المعياري σ.

إن احتمال وقوع أي قيمة مختارة عشوائيًّا خاضعة لهذا التوزيع في الفترة $[a, b]$ هو $\int_a^b f(x)\,dx$.

أعطِ التقريب ضمن 10^{-5} لاحتمال أن أي قيمة مختارة عشوائيًّا وخاضعة لهذا التوزيع ستقع في كل فترة مما يلي:

أ. $[-\sigma, \sigma]$ ب. $[-2\sigma, 2\sigma]$ جـ. $[-3\sigma, 3\sigma]$

21. أوجد ضمن 10^{-6} طول منحنى القطع الناقص الذي معادلته $4x^2 + 9y^2 = 36$.

22. تقطع سيارة طريق السباق في 84 ثانية، وتحدّد سرعة السيارة في كل فترة مدتها 6 ثوانٍ باستخدام مسدس رادار، ويعطى مع بداية السباق بالقدم/ ثانية كما في جدول الآتي

الوقت	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
السرعة	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

ما طول طريق السباق؟

23. جسيم كتلته m يتحرك في سائل، ويخضع لمقاومة لزوجة R التي هي دالة في السرعة v تعطى العلاقة بين المقاومة R والسرعة v، والزمن t بالصيغة الآتية:

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}\,du$$

افترض أن $R(v) = -v\sqrt{v}$ لسائل ما، حيث وحدة R نيوتن والسرعة متر/ الثانية.

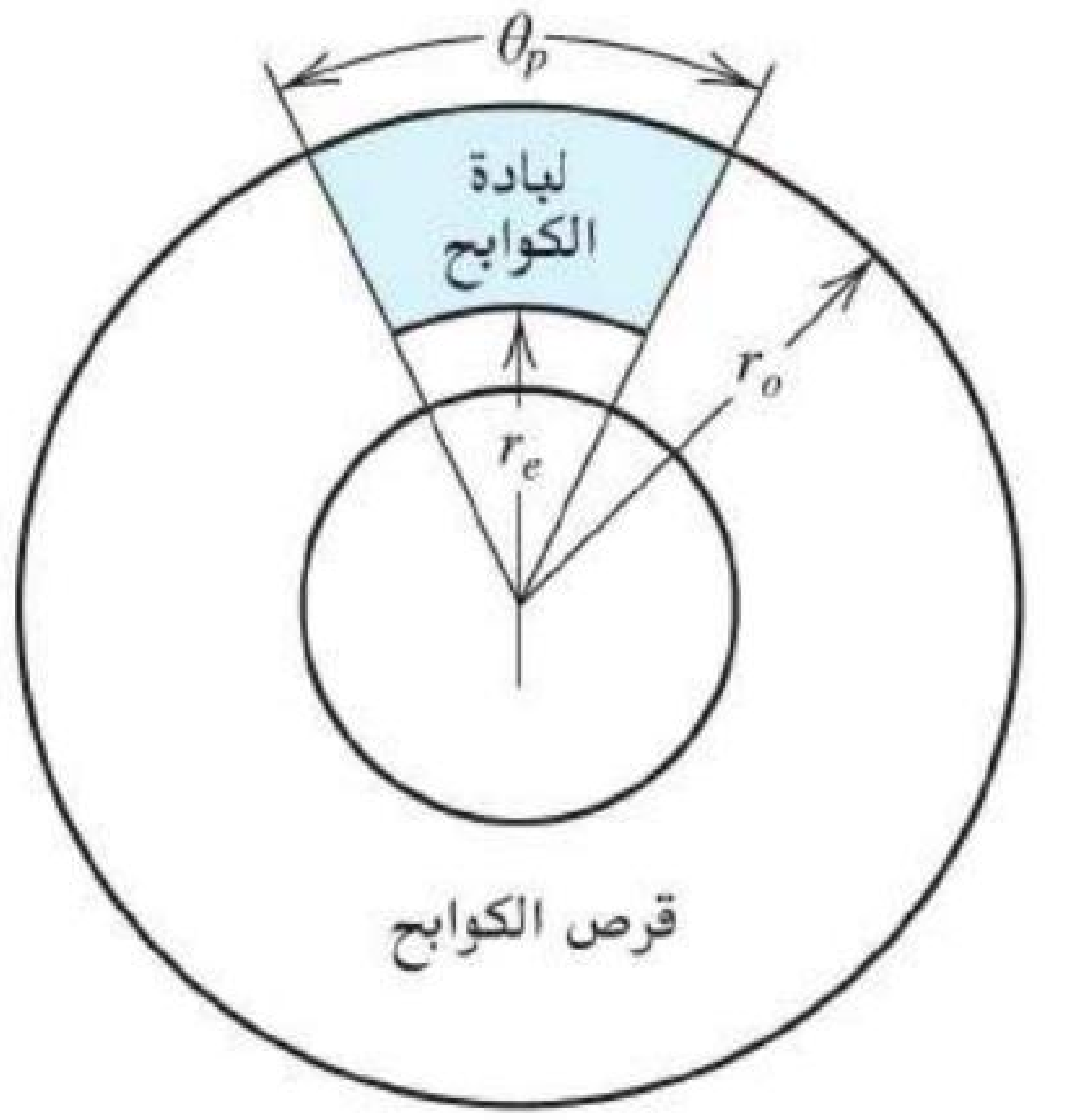
إذا كان $m = 10$ kg، $v(0) = 10$ m/s، فأوجد تقريبًا للزمن اللازم للجسيم ليتباطأ وتصل سرعته إلى $v = 5$ m/s.

24. لتوليد محاكاة خصائص قرص الكوابح (انظر شكل الآتي)، احتاج سيكرست وهورنبك D.A. Secrist and R.W. Hornbeck [SH] لإيجاد تقريب عددي لقيمة «الحرارة الداخلية معدّلة بحسب المساحة» T، إلى لبادة الكابح المعطاة بالصيغة

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_0} T(r) r\theta_p \, dr}{\int_{r_e}^{r_0} r\theta_p \, dr}$$

حيث تمثل r_e نصف القطر التي تبدأ عندها ملامسة لبادة القرص، وتمثل r_0 نصف القطر الخارجي للبادة القرص، أما θ_p فتمثل قياس الزاوية المقابلة لقطاع لبادة الكابح و$T(r)$ رتبة الحرارة على كل نقطة من اللبادة التي تحسب عدديًّا من تحليل صيغة الحرارة. (انظر الفصل 2.12)

افترض $r_0 = 0.478$ ft، $r_e = 0.308$ ft، $\theta_p = 0.7051$ رادين، ودرجات الحرارة كما في الجدول الآتي حيث حسبت على نقاط متعددة على القرص. أوجد تقريبًا لقيمة T.



r (ft)	$T(r)$(°F)
0.308	640
0.325	794
0.342	885
0.359	943
0.376	1034
0.393	1064
0.410	1114
0.427	1152
0.444	1204
0.461	1222
0.478	1239

25. أوجد تقريبًا ضمن 10^{-4} لقيمة التكامل الآتي الذي نوقِش في بداية الفصل الأول

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} \, dx$$

26. يمكن حل الصيغة الآتية لإيجاد x

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt = 0.45$$

باستخدام طريقة نيوتن مع

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt - 0.45$$

و

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

ولتقييم f عند التقريب p_k نحتاج إلى صيغة تربيعية لتقريب

$$\int_0^{p_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt$$

أ. أوجد حلًّا دقيقًا لـ $f(x) = 0$ لغاية 10^{-5} مستخدمًا طريقة نيوتن مع $p_0 = 0.5$ وقاعدة سمبسون المركبة.

ب. أعد الفقرة (أ) مستخدمًا قاعدة شبه المنحرف المركبة بدلًا من قاعدة سمبسون المركبة.

5.4 تكامل رومبرج Romberg Integration

قدّم ويرنر رومبـرج (1909-2003) هذه الطريقة عام 1955 لتحسـين دقة قاعدة شـبه المنحرف عن طريق حذف الحدود المتتالية في التوسع التقاربي.

يستخدم تكامل رومبرج قاعدة شبه المنحرفِ المركبة لإيجاد تقريبات ابتدائية، ثم يطبق عملية استكمال ريتشاردسون لتحسين التقريبات. تذكر من الفصل (2.4) أن استكمال ريتشاردسون يمكن تطبيقه على أي عملية تقريب على الصيغة

$$M - N(h) = K_1 h + K_2 h^2 + \cdots + K_n h^n$$

حيـث $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ثوابت و $N(h)$ هو تقريـب للقيمة غير المعلومة M. إن خطأ القطع في هذه الصيغة محدود بالقيمة $K_1 h$ عندما تكون h صغيرة، ولذلك فإن هذه الصيغة تعطي تقريبات من نوع $O(h)$. يسـتخدم استكمال ريتشاردسـون تقنية تعديل لتعطي صيغ ذات خطأ قطع من رتب أعلى.

لقد رأينا في الفصل (2.4) كيفية استخدام ذلك للحصول على تقريبات المشتقة.

سنستخدم في هذا الفصل طريقة الاستكمال الخارجي لتقريب التكاملات المحدودة.

للبدء بشرح طريقة تكامل رومبرج، تذكر أن طريقة شبه المنحرف لتقريب تكامل دالّة ما f على الفترة $[a, b]$ باستخدام m فترة جزئية هي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j)\right] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\mu)$$

حيث $a < \mu < b, h = (b-a)/m$ و $x_j = a + jh$ لكل من $j = 0, 1, \ldots, m$.

ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا. وإن أول خطوة في عملية رومبرج هي التوصل إلى تقريبات قاعدة شبه المنحرف بأخذ $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4, \ldots$ و $m_n = 2^{n-1}$.

إن حجـم الخطوة h_k المقابلة لـ m_k هي $h_k = (b-a)/m_k = (b-a)/2^{k-1}$. باسـتخدام هذه الرموز تصبح قاعدة شبه المنحرف

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\left(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k)\right)\right] - \frac{(b-a)}{12} h_k^2 f''(\mu_k) \qquad (31.4)$$

حيث لكل k يكون μ_k عددًا ما في (a, b).

فإذا استخدمنا الرمز $R_{k,1}$ ليعبّر عن جزء الصيغة (31.4) المستخدم للتقريب بقاعدة شبه المنحرف فإن

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)]$$

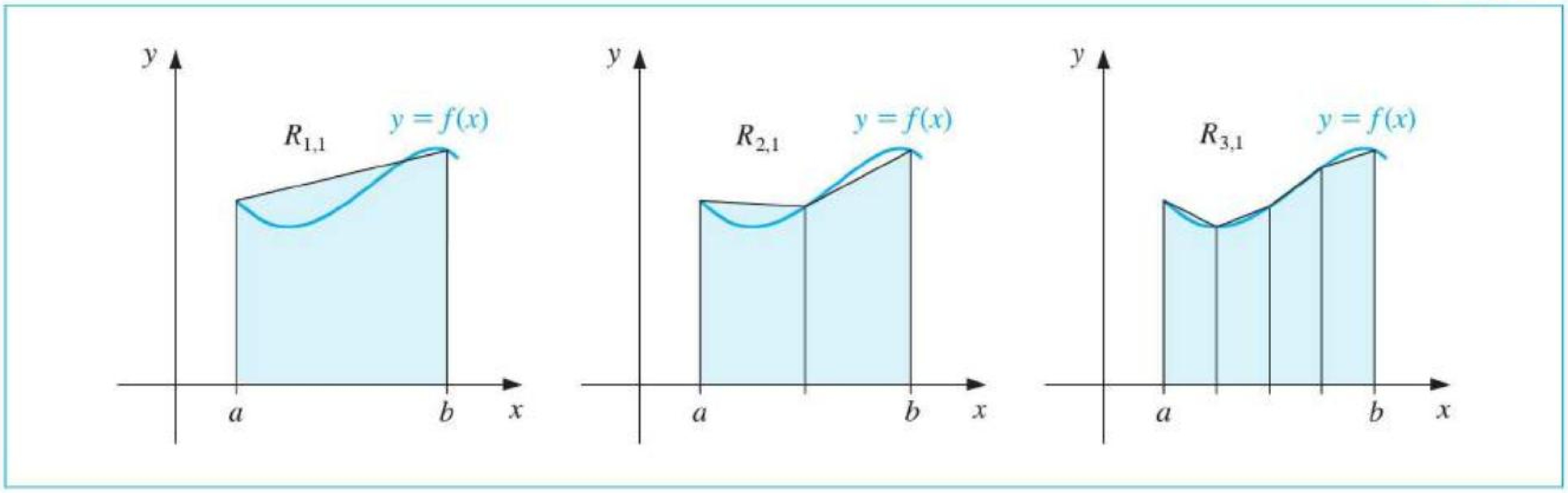
$$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}[f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)]$$

$$= \frac{(b-a)}{4}\left[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{(b-a)}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[R_{1,1} + h_1 f(a + h_2)]$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\{R_{2,1} + h_2[f(a + h_3) + f(a + 3h_3)]\}$$

شكل 10.4



وعمومًا (انظر شكل 10.4) يكون

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\,(a + (2i-1)h_k)\right] \qquad (32.4)$$

لكل $k = 2, 3, \ldots, n$ (انظر التمرينين 14،15).

مثال 1 إن استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة لتنفيذ الخطوة الأولى من طريقة تكامل رومبرج لتقريب $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ بأخذ $n = 6$ يؤدي إلى:

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}[\sin 0 + \sin \pi] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + \pi \sin \frac{\pi}{2}\right] = 1.57079633$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2}\left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}\right)\right] = 1.89611890$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[R_{3,1} + \frac{\pi}{4}\left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8}\right)\right] = 1.97423160$$

$$R_{5,1} = 1.99357034$$

و $R_{6,1} = 1.99839336$ ■

وبما أن القيمة الصحيحة للتكامل في المثال (1) هي 2، فإن التقارب بطيء. سنستخدم استكمال ريتشاردسون الخارجي لتسريع التقارب.

يمكن برهنة –ولو أن ذلك ليس بسهولة– (انظر [RR, pp. 136–138]) أنه إذا كان $f \in C^{\infty}[a, b]$ فإنه يمكن كتابة قاعدة شبه المنحرف المركبة ذات حد خطأ بديل على الصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx - R_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_k^{2i} = K_1 h_k^2 + \sum_{i=2}^{\infty} K_i h_k^{2i} \qquad (33.4)$$

حيث كل K_i مستقلة عن h_k ومعتمدة على $f^{(2i-1)}(a)$ و $f^{(2i-1)}(b)$.

ومن قاعدة شبه المنحرف على هذه الصيغة، يمكننا حذف الحد المحتوي على h_k^2 بدمج هذه الصيغة مع تلك المقابلة لها، وبوضع $h_{k+1} = h_k/2$ بدلاً من h_k لنحصل على

$$\int_a^b f(x)\,dx - R_{k+1,1} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_{k+1}^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{2^{2i}} = \frac{K_1 h_k^2}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{4^i} \qquad (34.4)$$

وبطرح الصيغة (33.4) من 4 أمثال الصيغة (34.4) وبالتبسيط نحصل على الصيغة بدرجة $O(h_k^4)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx - \left[R_{k+1,1} + \frac{R_{k+1,1} - R_{k,1}}{3}\right] = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3}\left(\frac{h_k^{2i}}{4^{i-1}} - h_k^{2i}\right)$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3}\left(\frac{1 - 4^{i-1}}{4^{i-1}}\right) h_k^{2i}$$

ثم يمكن تطبيق الاستكمال الخارجي على هذه الصيغة للحصول على نتيجة من الرتبة $O(h_k^6)$ وهكذا. ولتبسيط الرموز نعرّف

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}$$

لكل $k = 2, 3, \ldots, n$ ونطبق استكمال ريتشاردسون الخارجي لهذه القيم.
وبالاستمرار في هذه الرموز، ولكل $k = 2, 3, 4, \ldots, n$ و $j = 2, \ldots, k$ نحصل على صيغة تقريب من الرتبة $O(h_k^{2j})$ معرّفة على الصورة

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \qquad (35.4)$$

تظهر النتائج التي نتجت من هذه الصيغ في جدول (9.4).

جدول 9.4

$R_{1,1}$					
$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	$\cdots$	$R_{n,n}$

إن طريقة رومبرج تحظى بميزة إضافية مرغوب فيها ألا وهي إمكانية حساب صف جديد كامل في جدول عن طريق تطبيق قاعدة شبه المنحرف مرة إضافية واحدة فقط، وبعد ذلك تستخدم لإيجاد بقية مدخلات الصف.
إن الطريقة المستخدمة لإنشاء جدول من هذا النوع تحسب المدخلات صفًّا صفًّا أي على الترتيب $R_{1,1}$، $R_{2,1}$، $R_{2,2}$، $R_{3,1}$، $R_{3,2}$، $R_{3,3}$، الخ.

تصف الخوارزمية (2.4) هذه الطريقة.

ALGORITHM
الخوارزمية
2.4

رومبرج Romberg

لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$؛ اختر عددًا صحيحًا $n > 0$.



المدخلات: نقاط النهاية a و b و n عدد صحيح.

المخرجات: مصفوفة R (احسب R وفق الصفوف، يُحفَظ آخر صفين فقط).

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = b - a;$ $R_{1,1} = h/2(f(a) + f(b))$
2	المخرجات $(R_{1,1})$.
3	عند $i = 2, \ldots, n$، طبّق الخطوات 4 – 8.
4	ضع $R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k - 0.5)h)\right]$ (تقريب من طريقة شبه المنحرف).
5	عند $j = 2, \ldots, i$ ضع $R_{2,j} = R_{2,j-1} + \frac{R_{2,j-1} - R_{1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$ (استيفاء خارجي).
6	المخرجات ($R_{2,j}$ عند i ,$j = 1, 2, \ldots$).
7	ضع $h = h/2$.
8	عند $j = 1, 2, \ldots, i$ ضع $R_{1,j} = R_{2,j}$ (تحديث الصف الأول من R).
9	توقف.

مثال 2

في المثال (1)، حسبت القيم $R_{1,1}$ حتى $R_{6,1}$ لإيجاد التقريب للتكامل $\int_0^\pi \sin x\, dx$. نشاهد مع الخوارزمية (2.4) جدول رومبرج في جدول (10.4).

وعلى الرغم من وجود 21 من المدخلات في هذا الجدول، إلا أن الستة في العمود الأول فقط تتطلب إيجاد قيم دالّة؛ لأن هذه القيم فقط هي التي تنتج باستخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة. ونجد المدخلات الأخرى باستخدام طريقة المعدل.

لاحظ أن القيم الناتجة جميعها بالاستكمال الخارجي عدا الأولى (في الصف الأول للعمود الثاني) هي أدق من أحسن تقريب ناتج من قاعدة شبه المنحرف المركبة (في الصف الأخير للعمود الأول).

جدول 10.4

					0
				2.09439511	1.57079633
			1.99857073	2.00455976	1.89611890
		2.00000555	1.99998313	2.00026917	1.97423160
	1.99999999	2.00000001	1.99999975	2.00001659	1.99357034
2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000103	1.99839336

تتطلب الخوارزمية (2.4) عددًا صحيحًا n يُحدّد مسبقًا؛ وذلك لتحديد عدد الصفوف التي يجب توليدها. ويمكننا أيضًا تحديد الخطأ المقبول للتقريب، ومن ثم توليد n ضمن حد أعلى، إلى أن تقع المدخلات القطرية المتتالية $R_{n,n}$ و $R_{n-1,n-1}$ ضمن حد الخطأ المقبول.

إن الصفة cautious "حذِر" المستخدمة في طريقة عددية ما تظهر أن فحصاً يستخدم لتحديد ما إذا كانت فرضيات الاتصال من المحتمل أن تكون صحيحة.

ولكي نضمن عدم تساوي أي قيمتين متتاليتين في صف واحد دون تطابقهما مع قيمة التكامل الجاري تقريبها، فقد جرت العادة بتوليد تقريبات حتى لا يكون $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}|$ فقط ضمن حد الخطأ المقبول، بل ينطبق ذلك أيضًا على $|R_{n-2,n-2} - R_{n-1,n-1}|$.

وعلى الرغم من أن هذا ليس احتياطًا عاليًا، إلا أنه يضمن أن مجموعتين من التقريب تولدتا بطريقتين مختلفتين قد تطابقتا ضمن حد الخطأ المقبول قبل قبول $R_{n,n}$ بوصفها قيمة صحيحة بدرجة كافية. إن تطبيق تكامل رومبرج على f المعرّف على $[a, b]$ يعتمد على افتراض أن لقاعدة شبه المنحرف المركبة حد خطأ يمكن التعبير عنه بصيغة الصيغة (4.33)، بمعنى وجوب توليد $f \in C^{2k+2}[a, b]$ للصف رتبة k. خوارزمية الغرض العام باستخدام تكامل رومبرج تتضمن تدقيقًا عند كل خطوة لضمان تحقق هذا الافتراض. هذه الطرائق معروفة باسم *cautious Romberg algorithms* وهي موضحة في [Joh]. وهذا المصدر يوضح أيضًا طرائق لاستخدام أسلوب رومبرج بصفتها عملية متبناة، مثلما الحال مع قاعدة سمبسون التي سنتناولها في الفصل (6.4).

مجموعة التمارين 5.4 EXERCISE SET

1. استخدم تكامل رومبرج لحساب $R_{3,3}$ للتكاملات الآتية:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$ جـ. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} \, dx$

د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \, dx$ هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} \, dx$

ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$ حـ. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 \, dx$

2. استخدم تكامل رومبرج لحساب $R_{3,3}$ للتكاملات الآتية:

أ. $\int_{-1}^{1} (\cos x)^2 \, dx$ ب. $\int_{-0.75}^{0.75} x \ln(x + 1) \, dx$

جـ. $\int_1^4 \left((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1\right) \, dx$ د. $\int_e^{2e} \frac{1}{x \ln x} \, dx$

3. احسب $R_{4,4}$ للتكاملات في التمرين (1).

4. احسب $R_{4,4}$ للتكاملات في التمرين (2).

5. استخدم تكامل رومبرج لتقريب التكاملات في التمرين (1) ضمن 10^{-6}. احسب جدول رومبرج حتى يصبح $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ أو $n = 10$ قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات.

6. استخدم تكامل رومبرج لتقريب التكاملات في التمرين (2) ضمن 10^{-6}. احسب جدول رومبرج حتى يصبح $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ أو $n = 10$. قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات.

7. استخدم البيانات الآتية لتقريب $\int_1^5 f(x)\,dx$ لأكبر دقة ممكنة:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

8. استخدم تكامل رومبرج لتقريب

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^3} \, dx$$

إذا كان $R_{11} = 0.250$ و $R_{22} = 0.2315$ أوجد R_{21}.

9. استخدم تكامل رومبرج لتقريب $\int_2^3 f(x)\,dx$.
إذا كان $f(2) = 0.51342,\ f(3) = 0.36788,\ R_{31} = 0.43687$ و $R_{33} = 0.43662$ فجد $f(2.5)$.

10. يعطي تكامل رومبرج لتقريب $\int_0^1 f(x)\,dx$ ما يلي: $R_{11} = 4$ و $R_{22} = 5$. أوجد $f(\frac{1}{2})$.

11. يعطي تكامل رومبرج لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ ما يلي $R_{11} = 8,\ R_{22} = \frac{16}{3}$ و $R_{33} = \frac{208}{45}$ أوجد R_{31}.

12. استخدم تكامل رومبرج لحساب التقريبات الآتية لتكامل $\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\,dx$.
[ملحوظة: إن نتائج هذا التمرين مهمة جدًّا إذا ما استخدمت طريقة حساب ما بين سبع وتسع منازل].

أ. احسب $R_{1,1}$، $R_{2,1}$، $R_{3,1}$، $R_{4,1}$ و $R_{5,1}$، واستخدم هذه التقريبات للتنبؤ بقيمة التكامل.

ب. احسب $R_{2,2}$، $R_{3,3}$، $R_{4,4}$ و $R_{5,5}$ وعدّل تنبؤك.

جـ. احسب $R_{6,1}$، $R_{6,2}$، $R_{6,3}$، $R_{6,4}$ و $R_{6,6}$ وعدّل تنبؤك.

د. احسب $R_{7,7}$، $R_{8,8}$، $R_{9,9}$ و $R_{10,10}$ وأعطِ التنبؤ النهائي.

هـ. وضّح لماذا يسبب هذا التكامل صعوبة لدى استخدام تكامل رومبرج، واشرح كيف يمكن إعادة صياغته لتحديد تقريب دقيق بسهولة.

13. برهن أن التقريب الناتج من $R_{k,2}$ هو التقريب نفسه الذي نحصل عليه باستخدام قاعدة سمبسون المركبة التي شرحت في المبرهنة (4.4) بأخذ $h = h_k$.

14. برهن ما يلي لأي k:

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f\left(a + \frac{i}{2}h_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right) + \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + ih_{k-1}).$$

15. استخدم نتيجة تمرين 14 للتحقق من صيغة (32.4)؛ أي برهن ما يلي جميعها k:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right)\right]$$

16. في التمرين 24 من الفصل (1.1)، ظهر تكامل متسلسلة ماكلورين لتقريب $\text{erf}(1)$، حيث $\text{erf}(x)$ دالة الخطأ في التوزيع الطبيعي المعرفة في الصيغة $\text{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.
قرّب $\text{erf}(1)$ ضمن 10^{-7}.

6.4 طرائق التكامل التكيّفية Adaptive Quadrature Methods

إن الصيغ المركبة تتطلب استخدام نقاط تجزيئية متساوية المسافات. وهذا ليس مناسبًا عند تكامل دالة على فترة تحتوي على منطقتين: يكون على إحداهما تغير دالّي كبير، وعلى الأخرى تغير دالي صغير. وفي حالة اشتراط أن يكون خطأ التقريب موزعًا بالتجانس، فإن المسافة بين نقاط التجزئة يجب أن تكون أصغر على مناطق التغير الكبير منها على مناطق التغير الصغير. إن الطريقة الفاعلة لهذا النوع من المسائل يجب أن تنبئ عن كمية التغيير الدالّي وتكيّف حجم الخطوة (المسافة في التجزئة) للمتطلبات المتغيرة.

تسمى هذه الطرائق طرائق التكامل التكيفية.

إن الطرائق العددية التكيفية مرغوب فيها خصوصًا لإدخالها في الحقائب التخصصية الناعمة، وذلك ليس لكونها فاعلة فقط، بل لأنها أيضًا تعطي تقريبات ضمن حد الخطأ المحدّد والمسموح بـه. سنبحث في هذا الفصل طريقة تكامل تكيّفية ونرى كيف يمكن استخدامها، ليس فقط

لتقليـــل خطـــأ التدوير، ولكن للتنبؤ أيضًا بتقدير الخطأ فـــي التقريب الذي لا يعتمد على معرفة المشتقات العليا للدالّة.

إن الطريقـــة التـــي نبحث فيها تعتمد على قاعدة سمبســـون المركبة، ولكن هـــذه الطريقة يمكن تكييفها بسهولة لاستخدامها طرائق مركبة أخرى.

افترض أننا نريد تقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ ضمن خطأ محدد مسموح $\varepsilon > 0$.

الخطوة الأولى في العملية هي تطبيق قاعدة سمبسون بحجم خطوة $h = (b - a)/2$ (انظر شكل 11.4) تنتج الصيغة

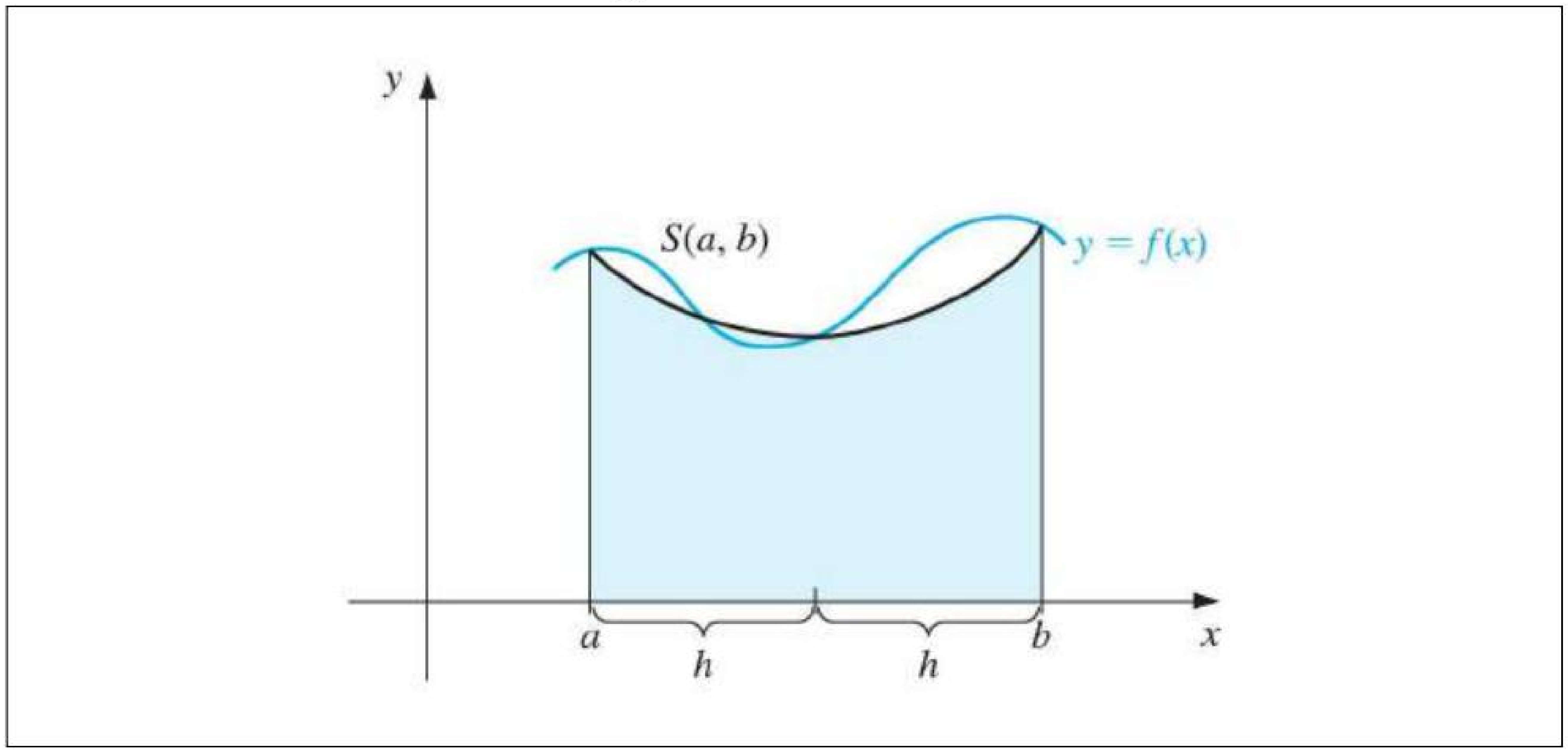
$$\int_a^b f(x)\,dx = S(a, b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \qquad (36.4)$$

للقيمة μ في الفترة (a, b).

وحيث نعبر عن التقريب بقاعدة سمبسون على $[a, b]$ بالرمز

$$S(a, b) = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a + h) + f(b)]$$

شكل 11.4



فإن الخطوة التالية لإيجاد تقريب للدقة لا يتطلب $f^{(4)}(\mu)$. ولعمل هذا، نطبق قاعدة سمبسون المركبة بأخذ $n = 4$، وحجم الخطوة $(b - a)/4 = h/2$، وهذا يعطي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 2f(a + h) + 4f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$- \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{(b - a)}{180} f^{(4)}(\tilde{\mu}) \qquad (37.4)$$

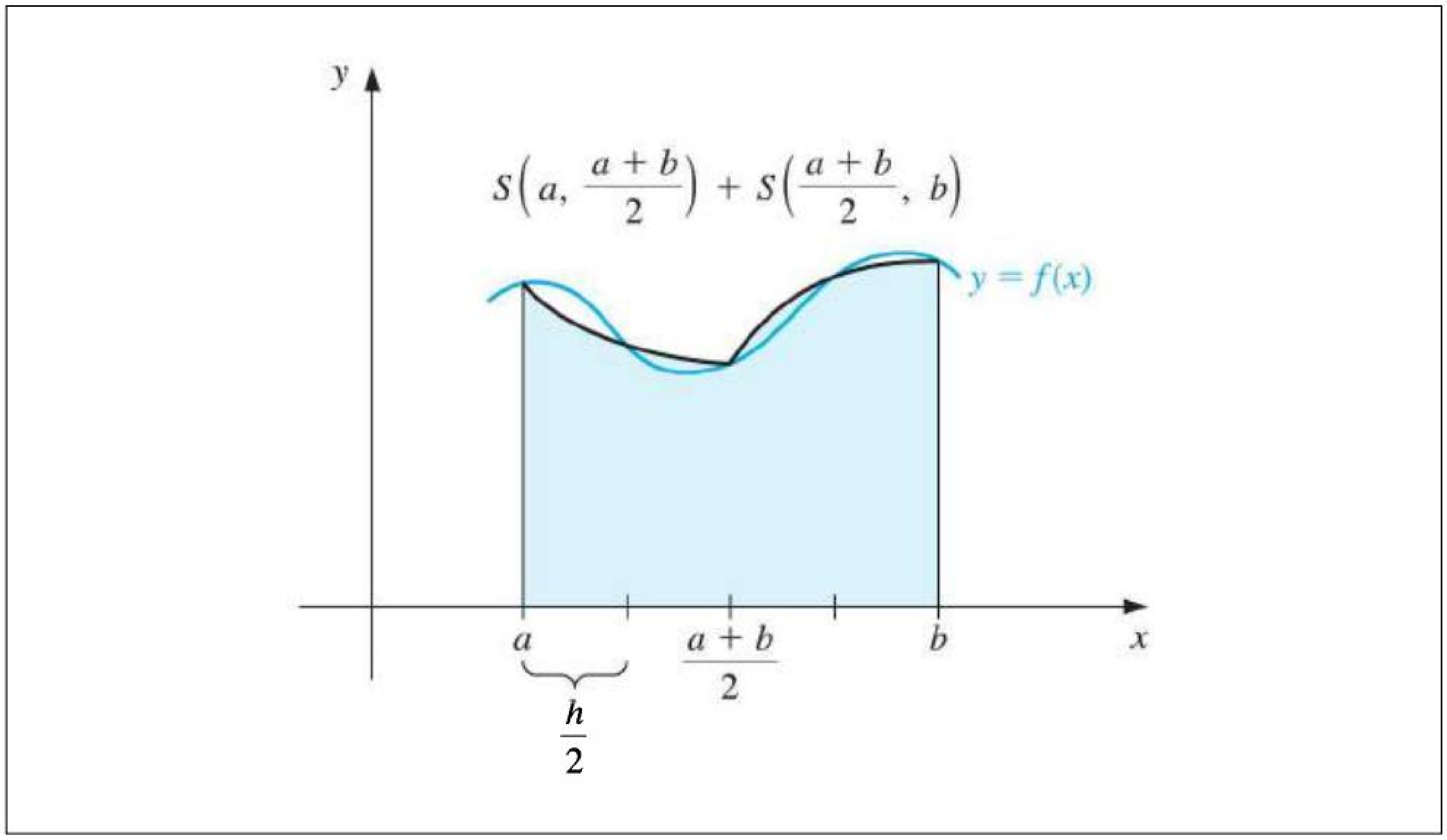
لقيمة ما $\tilde{\mu}$ في الفترة (a, b).

ولتبسيط الرموز، ضع

$$S\left(a, \frac{a + b}{2}\right) = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a + h)\right]$$

و

$$S\left(\frac{a + b}{2}, b\right) = \frac{h}{6}\left[f(a + h) + 4f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f(b)\right]$$



شكل 12.4

عندئذ يمكن كتابة الصيغة (37.4) (انظر شكل 12.4) على الصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\tilde{\mu}) \qquad (38.4)$$

يشتق تقدير الخطأ بافتراض أن $\tilde{\mu} \approx \mu$ أو على نحو أدق بوضع $f^{(4)}(\tilde{\mu}) \approx f^{(4)}(\mu)$. وإن نجاح الطريقة يعتمد على دقة هذا الافتراض، وإذا كان ذلك دقيقاً فإن مساواة التكاملين في (36.4) و(38.4) يعطي

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\tilde{\mu}) \approx S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu)$$

ومن ثم

$$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \approx \frac{16}{15}\left[S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right]$$

إن استخدام هذا التقدير في الصيغة (38.4) ينتج تقدير الخطأ

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right| \approx \frac{1}{15}\left|S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right|$$

وهذه النتيجة تعني أن $S(a,(a+b)/2) + S((a+b)/2, b)$ يعطي تقريباً للتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ أفضل بنحو 15 مرّة، مما يتفق مع القيمة المعلومة $S(a,b)$.

وهكذا إذا كان

$$\left|S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right| < 15\varepsilon \qquad (39.4)$$

فإننا نتوقع الحصول على

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right| < \varepsilon \qquad (40.4)$$

ومن المفترض أن يكون

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

تقريبًا دقيقًا على نحو كافٍ للتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$.

مثال 1 لفحص دقة خطأ التقدير في المعادلتين (39.4) و (40.4) افترض تطبيقه على التكامل $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1$. في هذه الحالة

$$S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi/4}{3}\left[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{12}(2\sqrt{2}+1) = 1.002279878$$

و

$$S\left(0, \frac{\pi}{4}\right) + S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi/8}{3}\left[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right]$$
$$= 1.000134585$$

ومن ثم

$$\left|S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - S\left(0, \frac{\pi}{4}\right) - S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\,1.002279878 - 1.000134585| = 0.002145293$$

إن تقدير الخطأ الحاصل من استخدام

$S(a,(a+b)) + S((a+b), b)$ لتقريب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ يكون بالنتيجة

$$\frac{1}{15}\left|S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - S\left(0, \frac{\pi}{4}\right) - S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\right| = 0.000143020$$

الذي يقرّب الخطأ الفعلي جيدًا

$$\left|\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx - 1.000134585\right| = 0.000134585$$

وعلى الرغم من أن $D_x^4 \sin x = \sin x$ يغير تغيرًا كبيرًا في الفترة $(0, \pi/2)$. ■

فإنه عندما تختلف التقريبات في الصيغة (39.4) بأكثر من 15ε، نطبّق قاعدة سمبسون فرديًّا على الفترات الجزئية $[a,(a+b)/2]$ و $[(a+b)/2, b]$، بعد ذلك نستخدم عملية تقدير الخطأ في تحديد ما إذا كان التقريب للتكامل على كل فترة جزئية ضمن الخطأ المسموح $\varepsilon/2$ أو لا. فإذا كان الأمر كذلك فإننا نجمع التقريبين لنحصل على تقريب للتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ ضمن الخطأ المسموح ε.

إذا لم يكن التقريب على إحدى الفقرتين الجزئيتين ضمن الخطأ المسموح $\varepsilon/2$، فعندئذ نقسم تلك الفترة الجزئية إلى فترتين، ويُعاد تطبيق القاعدة على تلك الفترتين لتحديد ما إذا كان التقريب على كل فترة جزئية ضمن $\varepsilon/4$ أو لا. تستمر عملية التصنيف هذه حتى يكون كل جزء ضمن الخطأ المحدد المسموح به.

استخدم هامش أمان عند استحالة التحقق من افتراضات الدقة.

وعلى الرغم من أنه بالإمكان إنشاء مسائل لا يمكن الحصول فيها على الخطأ المسموح، إلا أن الطريقة عادة ما تكون ناجحة، لأن كل تجزئة تزيد عادة من دقة التقريب بعامل 16، حيث يكون المطلوب زيادة عامل الدقة باثنين فقط.

تعطي الخوارزمية (3.4) تفاصيل عملية التكامل التكيفية لقاعدة سمبسون، على الرغم من ظهور بعض الصعوبات التقنية التي تتطلب تخلف التنفيذ قليلًا عمّا شرح سابقًا. فعلى سبيل المثال في الخطوة الأولى، اختبر الخطأ المسموح ليكون 10ε بدلًا من العدد 15ε في المتراجحة (39.4).

لقد اختير هذا الحد اختيارًا محافظًا للتعويض عن الخطأ في الافتراض $f^{(4)}(\mu) \approx f^{(4)}(\hat{\mu})$.

وفي المسائل التي يكون فيها $f^{(4)}$ ذا تغير واسع، فعليك أن تخفض هذا الحد على نحو أكبر.

إن الطريقة المذكورة في الخوارزمية تقرب أولًا التكامل على الفترة الجزئية في أقصى يسار التجزئة. ويتطلب هذا طريقة فاعلة في حفظ القيم الدالّية المحسوبة على نقاط التجزئة في النصف الأيمن للفترات الجزئية واسترجاع تلك القيم.

تحتوي الخطوات 3، 4 و 5 على عملية تخزين مع مؤشر يسمح بتتبع البيانات المطلوبة لحساب التقريب على الفترة الجزئية المجاورة مباشرة على يمين الفترة الجزئية التي تولد التقريب عليها. إن تنفيذ الطريقة يكون أسهل على حاسوب يستخدم لغة برمجة استرجاعية (recursive).

ALGORITHM
الخوارزمية
3.4

التكامل التكيفي Adaptive Quadrature

عملية التكامل التكيفية لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$ ضمن حد خطأ مسموح به.

المدخلات: نقاط النهاية a و b ،حد الخطأ المسموح TOL، حدّد N بعدد المستويات.

المخرجات: التقريب APP أو تقرير أن N قد تم تخطيها.

الخطوة	المضمون
1	ضع $APP = 0$ $i = 1;$ $TOL_i = 10\,TOL$ $a_i = a;$ $h_i = (b - a)/2$ $FA_i = f(a);$ $FC_i = f(a + h_i)$ $FB_i = f(b);$ $S_i = h_i(FA_i + 4FC_i + FB_i)/3$ (تقريب من طريقة سمبسون لكامل الفترة) $L_i = 1$
2	عند $i > 0$ طبّق الخطوات 3 − 5.
3	ضع $FD = f(a_i + h_i/2)$ $FE = f(a_i + 3h_i/2)$ $S1 = h_i(FA_i + 4FD + FC_i)/6$ (تقريب من طريقة سمبسون لنصف أجزاء الفترة) $S2 = h_i(FC_i + 4FE + FB_i)/6$ $v_1 = a_i$ (خزن المعلومات في هذا المستوى) $v_2 = FA_i$ $v_3 = FC_i$ $v_4 = FB_i$ $v_5 = h_i$ $v_6 = TOL_i$ $v_7 = S_i$ $v_8 = L_i$

4	ضع $i = i - 1$ (احذف المستوى.)
5	إذا كان $\lvert S1 + S2 - v_7 \rvert < v_6$ فضع $APP = APP + (S1 + S2)$ وغير ذلك، إذا كان $(v_8 \geq N)$ فإن المخرجات ('LEVEL EXCEEDED') (العملية فشلت). توقف. غير ذلك (أضف مستوى واحدًا). ضع $i = i + 1$ (البيانات لنصف الفترة اليمنى) $a_i = v_1 + v_5$ $FA_i = v_3$ $FC_i = FE$ $FB_i = v_4$ $h_i = v_5/2$ $TOL_i = v_6/2$ $S_i = S2$ $L_i = v_8 + 1$ ضع $i = i + 1$ (البيانات لنصف الفترة اليسرى) $a_i = v_1$ $FA_i = v_2$ $FC_i = FD$ $FB_i = v_3$ $h_i = h_{i-1}$ $TOL_i = TOL_{i-1}$ $S_i = S1$ $L_i = L_{i-1}$
6	المخرجات (APP) (APP تقرب I بحدود TOL). توقف.

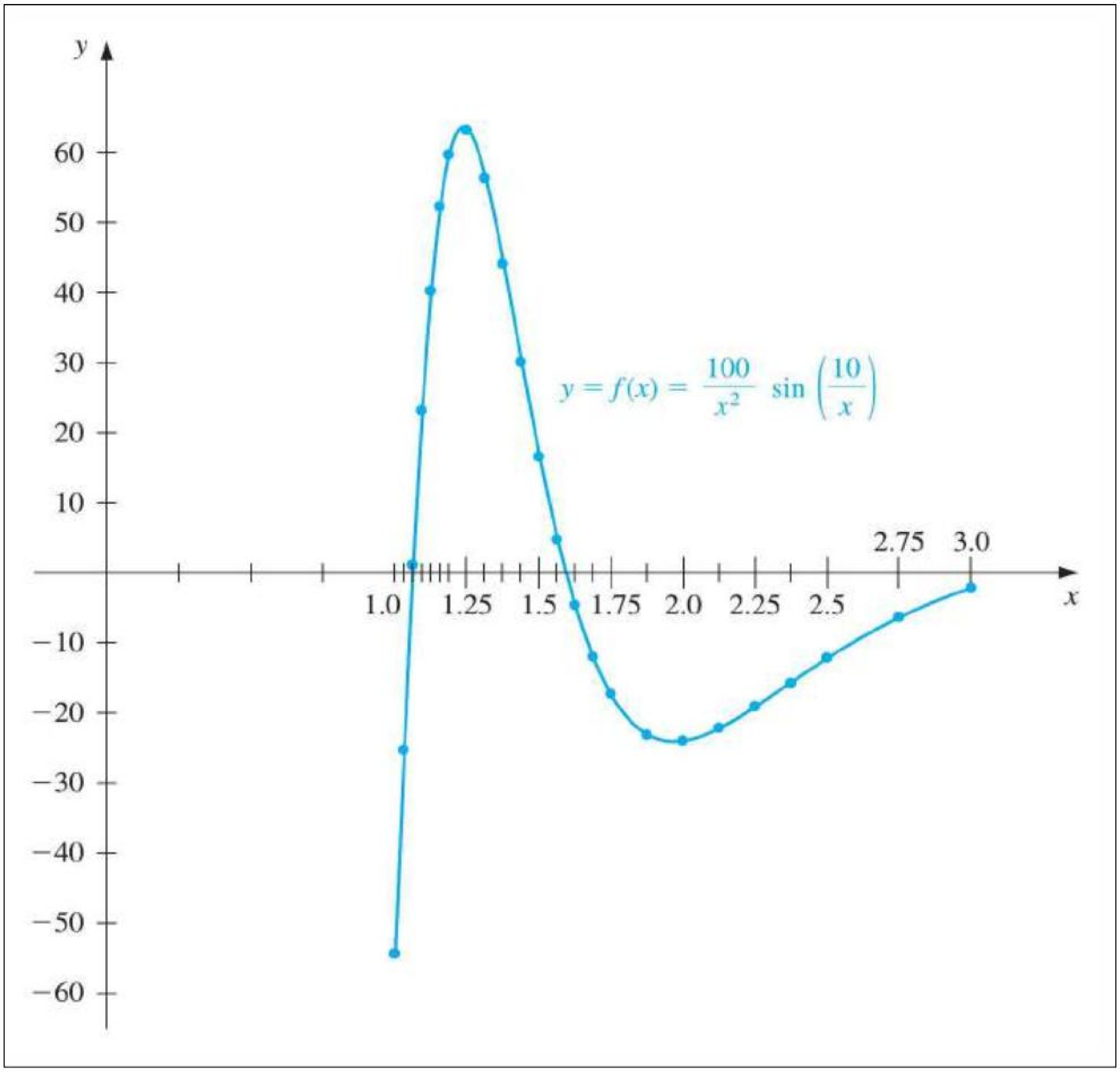
■

مثال 2 شكل (13.4) يعرض رسم منحنى الدّالة $f(x) = (100/x^2)\sin(10/x)$ لقيم x في الفترة $[1, 3]$. باستخدام خوارزمية التكامل التكيفية (3.4) ضمن حد الخطأ المسموح 10^{-4} لإيجاد تقريب للتكامل $\int_1^3 f(x)\,dx$ تعطي -1.426014 ، وهي نتيجة دقيقة بحد 1.1×10^{-5}.

لقد تطلب التقريب استخدام قاعدة سمبسون بأخذ $n = 4$ على 23 فترة جزئية عرضت نقاط النهاية لها على المحور الأفقي في شكل (13.4). إن عدد التقييمات الدالّية المطلوبة لهذا التقريب يساوي 93.

إن أكبر قيمة للعدد h المطلوبة لكي تنتج قاعدة سمبسون المركبة إجابة ضمن دقة 10^{-4} هي $h = \frac{1}{88}$. إن هذا التطبيق يتطلب 177 تقييمًا داليًّا، أي ما يعادل ضعف العدد المطلوب تقريبًا في عملية التكامل التكيفية.

■



شكل 13.4

EXERCISE SET مجموعة التمارين 6.4

1. احسب تقريبات قاعدة سمبسون $S(a, b), S(a, (a+b)/2)$ و $S((a+b)/2, b)$ للتكاملات الآتية، وتحقق من التقدير المعطى في صيغة التقريب:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x\, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$ جـ. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\, dx$ د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\, dx$

هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x\, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\, dx$ ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$ حـ. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2\, dx$

2.استخدم طريقة التكامل التكيفية لإيجاد تقريبات ضمن 10^{-3} للتكاملات في التمرين (1)، ولا تستخدم برنامجًا حاسوبيًّا لتوليد هذه النتائج.

3.استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $\int_1^3 e^{2x} \sin 3x\, dx$ ب. $\int_1^3 e^{3x} \sin 2x\, dx$

ج. $\int_0^5 \left(2x\cos(2x) - (x-2)^2\right) dx$ د. $\int_0^5 \left(4x\cos(2x) - (x-2)^2\right) dx$

4. استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$ ب. $\int_1^{2} (x + \sin 4x)\, dx$

جـ. $\int_{-1}^{1} x \sin 4x\, dx$ د. $\int_0^{\pi/2} (6\cos 4x + 4\sin 6x)e^x\, dx$

5. استخدم سمبسون المركبة باستخدام $n = 4, 6, 8, \ldots$ إلى أن تتفق التقريبات المتتالية للتكاملات الآتية ضمن 10^{-6}، حدّد عدد الرؤوس (نقاط التقسيم) المطلوبة.

استخدم خوارزمية التكامل التكيفية لتقريب التكامل 10^{-6}، واحسب عدد الرؤوس، هل أدت عملية التكامل التكيفية إلى أي تحسين؟

أ. $\int_0^{\pi} x \cos x^2\, dx$ ب. $\int_0^{\pi} x \sin x^2\, dx$

جـ. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$ د. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$

6. ارسم منحنيات $\sin(1/x)$ و $\cos(1/x)$ على $[0.1, 2]$.

استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $\int_{0.1}^{2} \cos \frac{1}{x}\, dx$ ب. $\int_{0.1}^{2} \sin \frac{1}{x}\, dx$

7. تصف الصيغة التفاضلية $mu''(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t$ نظام الزنبرك والكتلة، حيث m الكتلة k ثابت الزنبرك دون تخميد (damping)، ويصف الحد $F_0 \cos \omega t$ قوة خارجية دورية تطبق على النظام.

إن حل هذه الصيغة عندما يبدأ النظام في حالة سكون $(u'(0) = u(0) = 0)$ هو

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad \text{حيث} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega$$

ارسم منحنى u عندما $m = 1, k = 9, F_0 = 1, \omega = 2$ و $t \in [0, 2\pi]$.

أوجد التقريب للتكامل $\int_0^{2\pi} u(t)\, dt$ ضمن 10^{-4}.

8. إذا أضيف الحد $cu'(t)$ إلى الطرف الأيسر من صيغة الحركة في التمرين (7)، فإن الصيغة التفاضلية الناتجة تصف نظام الزنبرك والكتلة الذي خضع لتخميد بثابت تخميد $c \neq 0$.

إن حل هذه الصيغة عندما يبدأ النظام في حالة سكون هو

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{c^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \left(c\omega \sin \omega t + m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \cos \omega t\right)$$

حيث

$$r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m} \quad \text{و} \quad r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m}$$

أ. ليكن $m = 1$، $k = 9$، $F_0 = 1$، $c = 10$ و $\omega = 2$ فأوجد c_1 و c_2 ليكون $u(0) = u'(0) = 0$.

ب. ارسم المنحنى $u(t)$ لكل $t \in [0, 2\pi]$ وقرّب $\int_0^{2\pi} u(t)\, dt$ ضمن 10^{-4}.

9. ليكن $T(a, b)$ و $T(a, (a + b/2)) + T((a + b/2), b)$ التطبيق المنفرد والتطبيق الثنائي لقاعدة شبه المنحرف للتكامل $\int_a^b f(x)\, dx$.

اشتق العلاقة بين

$$\left|T(a,b) - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right|$$

و

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right|$$

10. إن دراسة الحيود الضوئي على فتحة مستطيلة يحتوي على تكاملات فرزنل (Fresnel integrals).

$$s(t) = \int_0^t \sin\frac{\pi}{2}w^2\,dw \quad و \quad c(t) = \int_0^t \cos\frac{\pi}{2}w^2\,dw$$

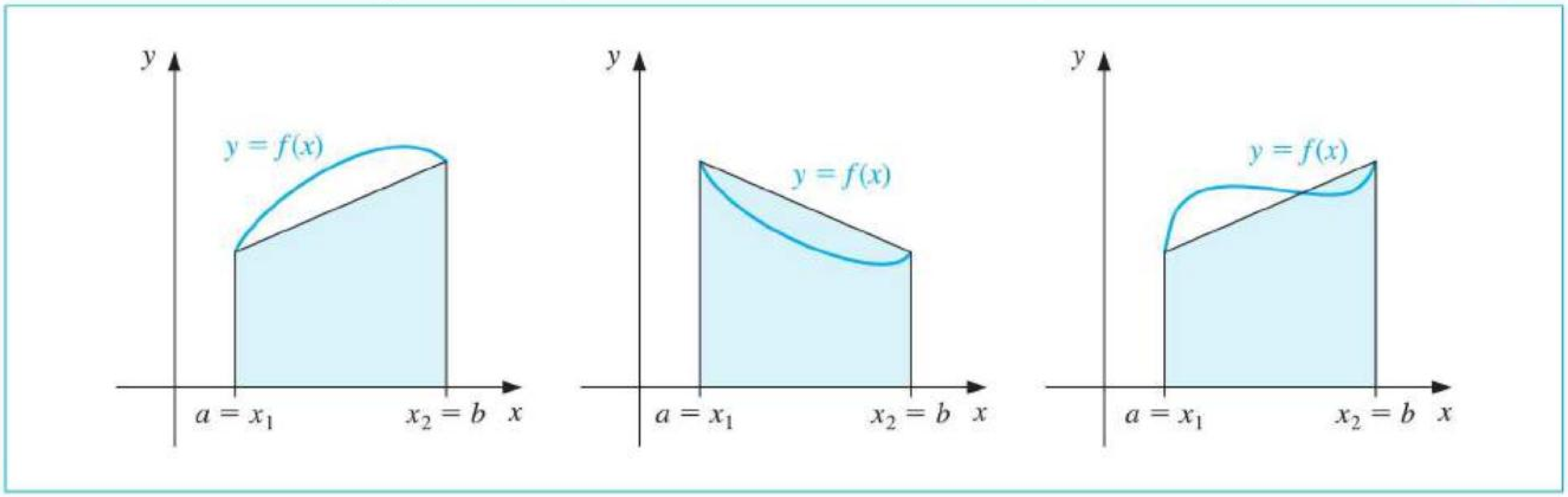
أنشئ جدولاً لقيم $c(t)$ و $s(t)$ التي تكون دقيقة ضمن 10^{-4} للقيم $t = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$.

7.4 طرائق جاوس للتكامل Gaussian Quadrature

لقد اشتُقّت صيغ نيوتن – كوتس في الفصل (3.4) عن طريق تكامل كثيرات حدود الاستكمال الداخلي. وبما أن حد الخطأ في كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي من الرتبة n يحتوي على المشتقة ذات العدد $(n + 1)$ للدالّة الجاري تقريبها، فإن صيغة نيوتن – كوتس لتقريب تكامل أي كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n أو تساويها صحيحة تمامًا.

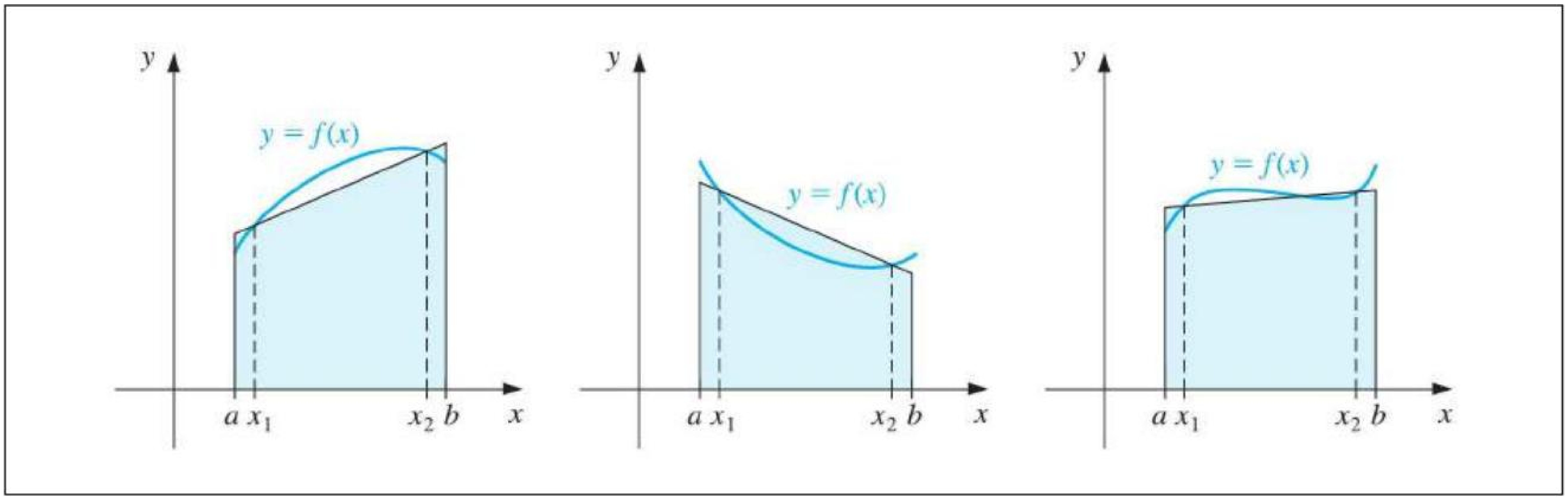
إن صيغ نيوتن – كوتس جميعها تستخدم قيمًا للدالّة على نقاط متساوية البعد. إن هذا التحديد ملائم عندما تُدمَج هذه الصيغ لتكوين القواعد المركبة التي شرحت في الفصل (4.4) ولكن من الممكن أن تقلل من رتبة التقريب على نحو ملحوظ. فعلى سبيل المثال، لاحظ قاعدة شبه المنحرف عند تطبيقها لإيجاد تكاملات الدّوال الموضحة في شكل (14.4).

شكل 14.4



إن قاعدة شبه المنحرف تقرّب تكامل الدّالة عن طريق تكامل الدّالة الخطي الذي يصل نقطتي النهاية لمنحنى الدالّة، وليس بالضرورة أن يكون هذا أفضل خط لتقريب التكامل؛ إذ من المحتمل أن تعطي الخطوط الموضحة في شكل (15.4) تقريبات أفضل بكثير في معظم الأحيان.

شكل 15.4



شرح جاوس Gauss طريقته في التكامل العددي في بحث قدّمه إلى جمعية غوتنغن في عام 1814 (Göttingen Society)، لقد وضع الرؤوس ومعاملات التقييمات الدالّية بوصفها معلمات في معادلة الجمع. ووجد أفضل الأماكن لوضع الرؤوس. ولقد أعطى جولدستاين وصفًا ممتعًا لتطوير الطريقة Goldstine [Golds].pp. 224–232.

إن طريقة جاوس للتكامل تختار نقاط التقييم بطريقة تعظيمية بدلًا من طريقة تساوي الأبعاد. تُختار الرؤوس $x_1, x_2, \ldots, x_n$ في الفترة $[a, b]$ ، والمعاملات $c_1, c_2, \ldots, c_n$ بحيث تجعل الخطأ المتوقع في التقريب أصغر ما يمكن.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

ولقياس هذه الدقة؛ افترض أن أفضل اختيار لهذه القيم يعطي القيمة الصحيحة لأكبر مجموعة من كثيرات الحدود، أي أنه الاختيار الذي يعطي الرتبة الأعلى من الدقة.

إن المعاملات $c_1, c_2, \ldots, c_n$ في صيغة التقريب حرّة (يمكن اختيارها كيفما اتفق)، والرؤوس $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عليها تحديد واحد ألا وهو وجوب وقوعها في الفترة $[a, b]$، وهي فترة التكامل.

إن هذا يعطينا $2n$ من المتغيرات التي يجب اختيارها.

إذا ما افترضت معاملات كثيرة الحدود على أنها معلمات، فإن مجموعة كثيرات الحدود التي أعلى قيمة لرتبتها $2n - 1$ تحتوي على $2n$ من الوسيطات.

إذن فمن المنطق أن تكون هذه أكبر مجموعة من كثيرات الحدود التي صيغتها صحيحة بالضبط. وباختيار القيم والثوابت اختيارًا مناسبًا فإن الضبط على هذه المجموعة يكون ممكنًا.

ولشرح طريقة اختيار المتغيرات المناسبة؛ سنوضح كيف نختار المعاملات والنقاط في حالة $n = 2$ وفترة التكامل $[-1, 1]$، ثم سنناقش الوضع العام لاختيار النقاط والمتغيرات كيفما اتفق، ونبرهن كيفية تطوير الطريقة عند التكامل على أي فترة.

افترض أننا نرغب في تحديد x_1، x_2 و c_1، c_2 بحيث تعطي صيغة التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

القيمة الصحيحة، حيث $f(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $3 = 1 - 2(2)$ أو أقل من 3، أي عندما $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ لمجموعة من الثوابت a_0، a_1، a_2 و a_3.

بما أن

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)\, dx = a_0 \int 1\, dx + a_1 \int x\, dx + a_2 \int x^2\, dx + a_3 \int x^3\, dx$$

فإن هذا يكافئ برهنة أن الصيغة تعطي نتائج صحيحة عندما $f(x)$ يكون $1, x, x^2, x^3$ بحيث

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \quad \text{،} \quad c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

$$c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

باستخدام بعض العمليات الجبرية فإن لنظام الصيغ هذا الحل الوحيد

$$c_1 = 1 \text{ ،} \quad c_2 = 1 \text{ ،} \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

الذي يعطي صيغة التقريب

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad \textbf{(41.4)}$$

كثيرات الحــدود الوحودية monic يكون فيها المعامل الأول 1.

إن رتبة دقة هذه الصيغة هي 3، أي أنها تعطي النتيجة الصحيحة لكل كثيرة حدود من الرتبة 3 أو أقل.

ويمكن استخدام هذه الطريقة لتحديد النقاط والمعاملات لصيغ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات حدود من رتبة أعلى، ولكن هناك طريقة بديلة تحصل عليها بسهولة أكثر.

سندرس في الفصل (2.8) والفصل (3.8) تجمعات متعددة من كثيرات الحدود المتعامدة، وهي دوال لها الخاصية: أي تكامل محدود لحاصل ضرب أي اثنين منها يساوي 0. إن المجموعة ذات العلاقة بمسألتنا هي مجموعة كثيرات حدود ليجندر Legender Polynomials، وهي المجموعة $\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots, \}$ التي تحقق الخواص الآتية:

1. لكل n تكون $P_n(x)$ كثيرة حدود وحدانية ذات رتبة n.
2. $\int_{-1}^{1} P(x) P_n(x)\, dx = 0$ لأي كثيرة حدود $P(x)$ ذات رتبة أقل من n.

أدريان – ماري ليجندر (1833–1752) عــرّف هــذه المجموعة مــن كثيرات الحدود عام 1785.
وكان له منازعــات مع جاوس خصوصًا أن جاوس في بداية اكتشــافه قد فشل في نشر الكثير من نتائجه الأصلية.

لديك قليل من كثيرات حدود ليجندر وهي:

$$P_0(x) = 1 \text{ ،} \quad P_1(x) = x \text{ ،} \quad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \quad \text{و} \quad P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

إن جذور كثيرات الحدود هذه متميّزة بعضها من بعض، وتقع في الفترة $(-1, 1)$ ومتماثلة بالنسبة إلى المركز، والأهم من ذلك كله هو الاختيار الصحيح لتحديد المتغيرات التي تحل مسألتنا.

النقاط $x_1, x_2, \ldots, x_n$ المطلوبة لإنتاج صيغة تقريب تكامل، التي تعطي نتائج صحيحة لأي كثيرة حدود ذات رتبة أقل من $2n$ هي جذور كثيرة حدود ليجندر من الرتبة n.

يُبرهَن ذلك من خلال النتيجة الآتية

مبرهنة 7.4 لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جذور كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$ من الرتبة n. وأنه لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ نعرّف c_i بالصيغة

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx$$

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود ذات درجة أصغر من $2n$ فإن

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$ ■

البرهان لنأخذ أولًا الحالة التي فيها $P(x)$ كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n. أعد كتابة $P(x)$ على صيغة كثيرة حدود ليجندر من الرتبة $(n-1)$ برؤوس على جذور كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$ من الرتبة n. إن هذا التمثيل لكثيرة حدود $P(x)$ صحيح بالضبط، لأن حد الخطأ يحتوي على مشتقة P من الرتبة n، وأن مشتقة P من الرتبة n تساوي صفرًا. إذن

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} P(x_i)$$

و

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} P(x_i) \right] dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\, dx \right] P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$

تحقق النتيجة لكثيرات الحدود ذات الرتبة الأقل من n.

إذا قسمنا كثيرة الحدود $P(x)$ من الرتبة n على الأقل ولكن أقل من $2n$ على كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$، نحصل على كثيرات حدود ذات رتبة أقل من n.

$$P(x) = Q(x)P_n(x) + R(x)$$

لاحظ أنه بما أن x_i جذر لـ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإننا نحصل على

$$P(x_i) = Q(x_i)P_n(x_i) + R(x_i) = Q(x_i)\cdot 0 + R(x_i) = R(x_i)$$

والآن ندخل القوة الوحيدة لكثيرات حدود ليجندر.

أولًا: رتبة كثيرة الحدود $Q(x)$ أقل من n، ولذلك تكون (خاصية ليجندر الثانية)

$$\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)\,dx = 0$$

وبما أن $R(x)$ كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n، فإن المناقشة الأولى تعطي

$$\int_{-1}^{1} R(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i R(x_i)$$

بوضع هذه الحقائق معًا يتحقق أن الصيغة صحيحة تمامًا لكثيرة الحدود $P(x)$

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} [Q(x)P_n(x) + R(x)]\,dx = \int_{-1}^{1} R(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i R(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$

■ ■ ■

يمكن توليد الثوابت c_i التي نحتاج إليها لقاعدة التكامل من الصيغة في المبرهنة (7.4)، ولكن كلًّا من هذه الثوابت وجذور كثيرات حدود ليجندر قد تم جدولتا على نحو واسع.

يعرض جدول (11.4) هذه القيم لكل من $n = 2, 3, 4, 5$.

القيم الأخرى موجودة في [StS].

جدول 11.4

n	الجذور $r_{n,i}$	المعاملات $c_{n,i}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	−0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	−0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	−0.3399810436	0.6521451549
	−0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	−0.5384693101	0.4786286705
	−0.9061798459	0.2369268850

مثال 1 قرّب $\int_{-1}^{1} e^x \cos x\,dx$ باستخدام صيغة تكامل جاوس بأخذ $n = 3$.

من جدول (11.4) نحصل على

$$\int_{-1}^{1} e^x \cos x\,dx \approx 0.\overline{5}e^{0.774596692}\cos 0.774596692$$
$$+\ 0.\overline{8}\cos 0 + 0.\overline{5}e^{-0.774596692}\cos(-0.774596692)$$
$$= 1.9333904$$

يمكن إيجاد القيمة الحقيقية باستخدام التكامل بالأجزاء لتكون 1.9334214، وبذلك يكون الخطأ المطلق أقل من 3.2×10^{-5}.

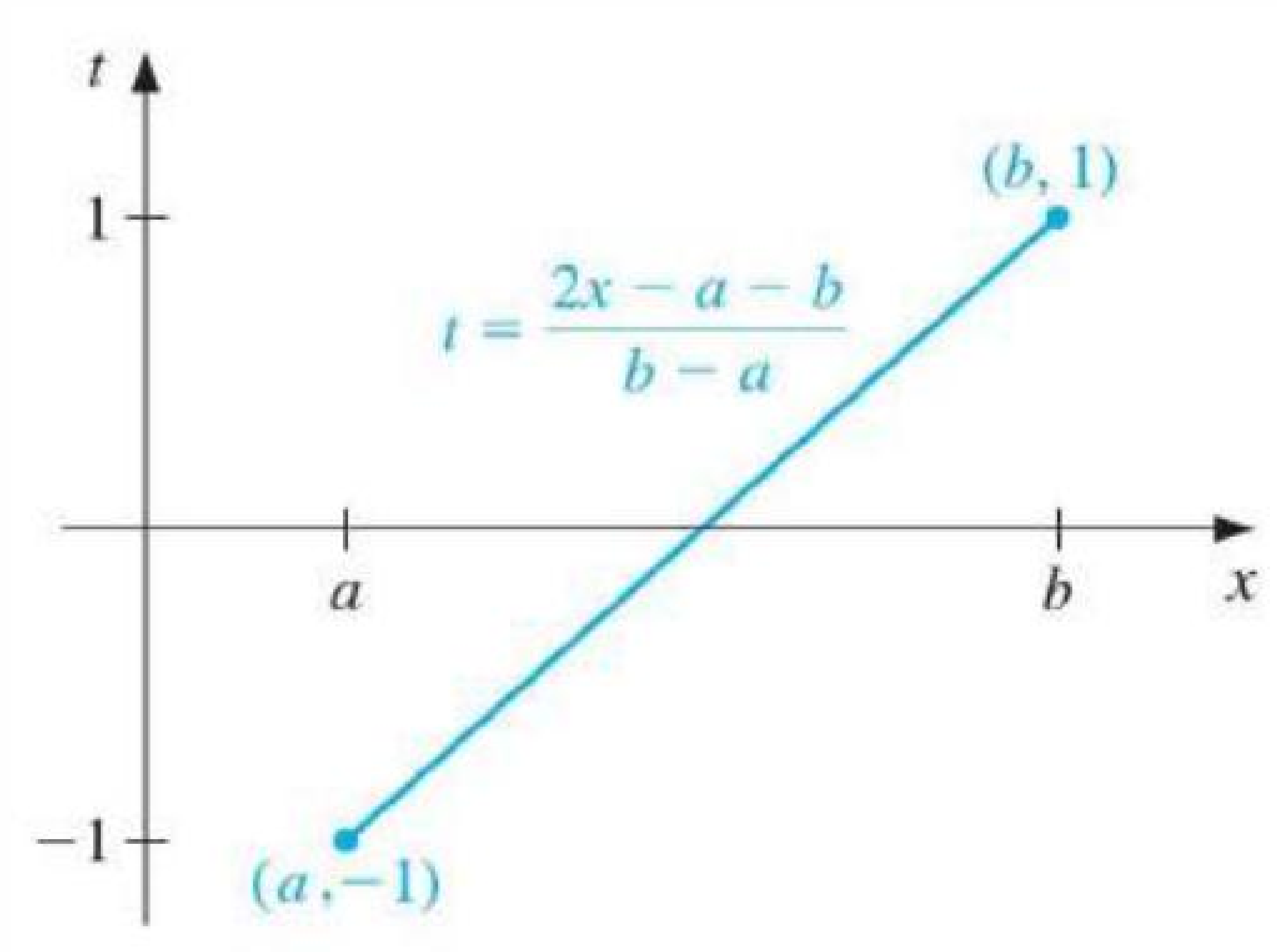
إن التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ على أي فترة $[a, b]$ يمكن تحويله إلى تكامل على الفترة $[-1, 1]$ باستخدام تحويل المتغيرات. (انظر شكل 16.4)

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \iff x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b]$$

يسمح هذا بتطبيق صيغة تكامل جاوس على أي فترة $[a, b]$؛ لأن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b - a)t + (b + a)}{2}\right)\frac{(b - a)}{2}\,dt \qquad (42.4)$$

شكل 16.4



مثال 2 لديك مسألة لإيجاد تقريبات للتكامل $\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx$.

يعطي جدول (12.4) القيم لصيغ نيوتن – كوتس المعطاة في الفصل (3.4). إن القيمة الصحيحة للتكامل إلى أقرب سبع خانات عشرية هي 0.1093643.

جدول 12.4

n	0	1	2	3	4
المعادلات المغلقة		0.1183197	0.1093104	0.1093404	0.1093643
المعادلات المفتوحة	0.1048057	0.1063473	0.1094116	0.1093971	

إن تطبيق عملية جاوس على هذه المسألة يتطلب أولًا تحويل التكامل إلى مسألة فيها فترة التكامل [1 ,1 −].

باستخدام الصيغة (42.4) نجد أن

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{(-(t+5)^2/16)}\,dt$$

إن القيم في جدول (11.4) تعطي تقريبات تكامل جاوس لهذه المسألة

$n = 2$:

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4}[e^{-(5+0.5773502692)^2/16} + e^{-(5-0.5773502692)^2/16}] = 0.1094003$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned}\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx \approx\ & \frac{1}{4}[(0.5555555556)e^{-(5+0.7745966692)^2/16} + (0.8888888889)e^{-(5)^2/16} \\ & + (0.5555555556)e^{-(5-0.7745966692)^2/16}] \\ =\ & 0.1093642\end{aligned}$$

وللمقارنة الإضافية؛ نعرض القيم التي حصلنا عليها باستخدام عملية رومبرج بأخذ $n = 4$ في جدول (13.4). ■

جدول 13.4

0.1183197			
0.1115627	0.1093104		
0.1099114	0.1093610	0.1093643	
0.1095009	0.1093641	0.1093643	0.1093643

مجموعة التمارين 7.4 EXERCISE SET

1. أوجد تقريب التكاملات الآتية باستخدام طريقة جاوس و $n = 2$، ثم قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x\, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$ جـ. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\, dx$ د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\, dx$

هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x\, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\, dx$ ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$ حـ. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2\, dx$

2. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 3$.
3. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 4$.
4. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 5$.
5. حدِّد الثوابت a ، b ، c و d التي تعطي صيغة التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

التي رتبة الدقة فيها 3.

6. حدِّد الثوابت a ، b ، c و d التي تعطي صيغة التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = af(-1) + bf(0) + cf(1) + df'(-1) + ef'(1)$$

التي رتبة الدقة فيها 4.

7. تحقق من القيم في جدول (11.4) المقابلة للقيم $n = 2$،3، بإيجاد الجذور لكثيرات حدود ليجندر المناسبة. استخدم الصيغ المذكورة قبل هذا جدول لإيجاد المعاملات المرتبطة بهذه القيم.
8. برهن أنه لا يمكن في الصيغة $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ أن تكون رتبة دقتها أكثر من $2n - 1$ مهما كان اختيار $c_1, \ldots, c_n$ و $x_1, \ldots, x_n$
[إضاءة: أنشئ كثيرة حدود ذات جذر مضاعف على كل x_i].

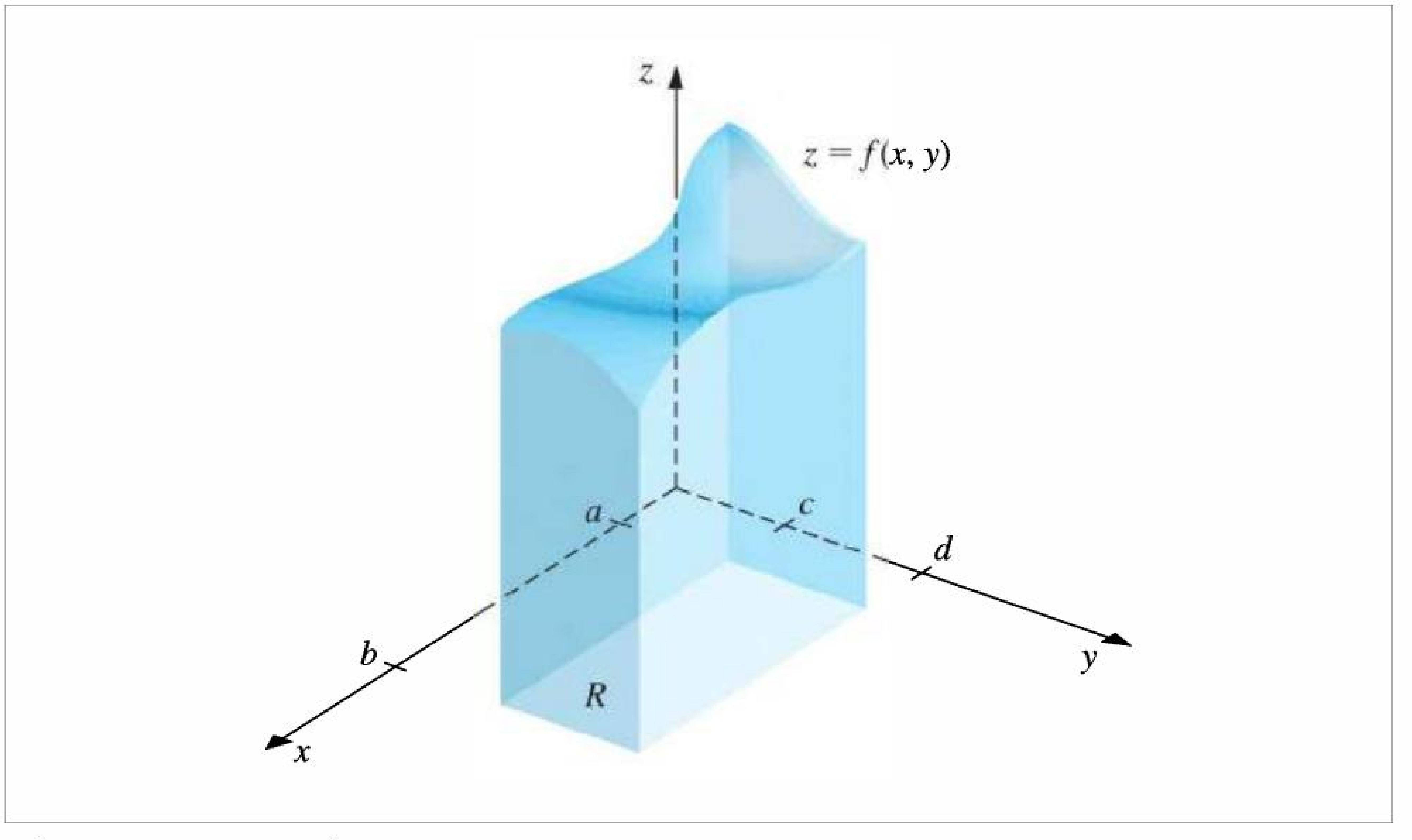
8.4 التكاملات المتعددة Multiple Integrals

يمكن تطوير الطرائق التي قدمت في البنود السابقة مباشرة لاستخدامها في إيجاد تقريب للتكاملات المتعددة. خذ التكامل الثنائي

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

حيث $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$، منطقة مستطيلة في المستوى، وحيث a، b ، c و d ثوابت. (انظر شكل 17.4)

شكل 17.4



سنستخدم قاعدة سمبسون المركبة لشرح طريقة التقريب على الرغم من أنه يمكن استخدام أي صيغة مركبة بدلًا منها.

لتطبيق قاعدة سمبسون المركبة؛ نقسم المنطقة R عن طريق تجزئة $[a, b]$ و $[c, d]$ إلى عدد زوجي من الفترات الجزئية. ولتبسيط الرموز؛ نختار أعدادًا صحيحة زوجية m و n ونجزئ $[a, b]$ و $[c, d]$ باستخدام نقاط الشبكة المتساوية الأبعاد فيما بينها وهي $x_0, x_1, \ldots, x_n$ و $y_0, y_1, \ldots, y_m$ على التوالي. تحدد هذه التقسيمات الجزئية حجمي الخطوتين $k = (d - c)/m$ و $h = (b - a)/n$.

وبكتابة التكامل الثنائي على شكل تكامل متتالٍ

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

نستخدم أولًا قاعدة سمبسون المركبة لتقريب

$$\int_c^d f(x, y)\, dy$$

مفترضين أن x عدد ثابت.

ضع $y_j = c + jk$ لكل $j = 0, 1, \ldots, m$. إذن

$$\int_c^d f(x, y)\, dy = \frac{k}{3}\left[f(x, y_0) + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x, y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m/2} f(x, y_{2j-1}) + f(x, y_m) \right]$$
$$- \frac{(d-c)k^4}{180} \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}$$

لعدد ما μ في (c, d). وبذلك

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \frac{k}{3}\Bigg[\int_a^b f(x, y_0)\, dx + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1} \int_a^b f(x, y_{2j})\, dx + 4\sum_{j=1}^{m/2} \int_a^b f(x, y_{2j-1})\, dx + \int_a^b f(x, y_m)\, dx\Bigg] - \frac{(d-c)k^4}{180} \int_a^b \frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4}\, dx.$$

والآن تطبق قاعدة سمبسون المركبة على التكاملات في هذه الصيغة. افترض $x_i = a + ih$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$.

عندئذ لكل $j = 0, 1, \ldots, m$ نحصل على

$$\int_a^b f(x, y_j)\, dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0, y_j) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_j) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_j) + f(x_n, y_j)\right] - \frac{(b-a)h^4}{180}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_j, y_j),$$

لعدد ما ξ_j في (a,b) التقريب الناتج له الصيغة

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \approx \frac{hk}{9}\Bigg\{\Bigg[f(x_0, y_0) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_0) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_0) + f(x_n, y_0)\Bigg]$$
$$+ 2\Bigg[\sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_0, y_{2j}) + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + \sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_n, y_{2j})\Bigg]$$
$$+ 4\Bigg[\sum_{j=1}^{m/2} f(x_0, y_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_{2j-1}) + 4\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{m/2} f(x_n, y_{2j-1})\Bigg]$$
$$+ \Bigg[f(x_0, y_m) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_m) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_m) + f(x_n, y_m)\Bigg]\Bigg\}$$

ويعطي حد الخطأ E على الصيغة

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[\frac{\partial^4 f(\xi_0, y_0)}{\partial x^4} + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\frac{\partial^4 f(\xi_{2j}, y_{2j})}{\partial x^4} + 4\sum_{j=1}^{m/2}\frac{\partial^4 f(\xi_{2j-1}, y_{2j-1})}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(\xi_m, y_m)}{\partial x^4}\right] - \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4}\,dx$$

إذا كان $\partial^4 f/\partial x^4$ متصلاً، يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية على نحو متكرر لبرهنة أنه يمكن الاستعاضة عن تقييم المشتقات الجزئية بالنسبة إلى x بقيمة مشتركة، وأن

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[3m\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu})\right] - \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4}\,dx$$

لنقطة ما $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ في R.

وأيضًا إذا كان $\partial^4 f/\partial y^4$ متصلاً فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكاملات تعطي

$$\int_a^b \frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4}\,dx = (b-a)\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})$$

لنقطة ما $(\hat{\eta}, \hat{\mu})$ في R.

بما أن $m = (d-c)/k$ فإن حد الخطأ له الصيغة

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[3m\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu})\right] - \frac{(d-c)(b-a)}{180}k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})$$

أو

$$E = -\frac{(d-c)(b-a)}{180}\left[h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu}) + k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})\right]$$

للنقطتين $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ و $(\hat{\eta}, \hat{\mu})$ في R.

مثال 1 إن تطبيق قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكامل

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y)\,dy\,dx$$

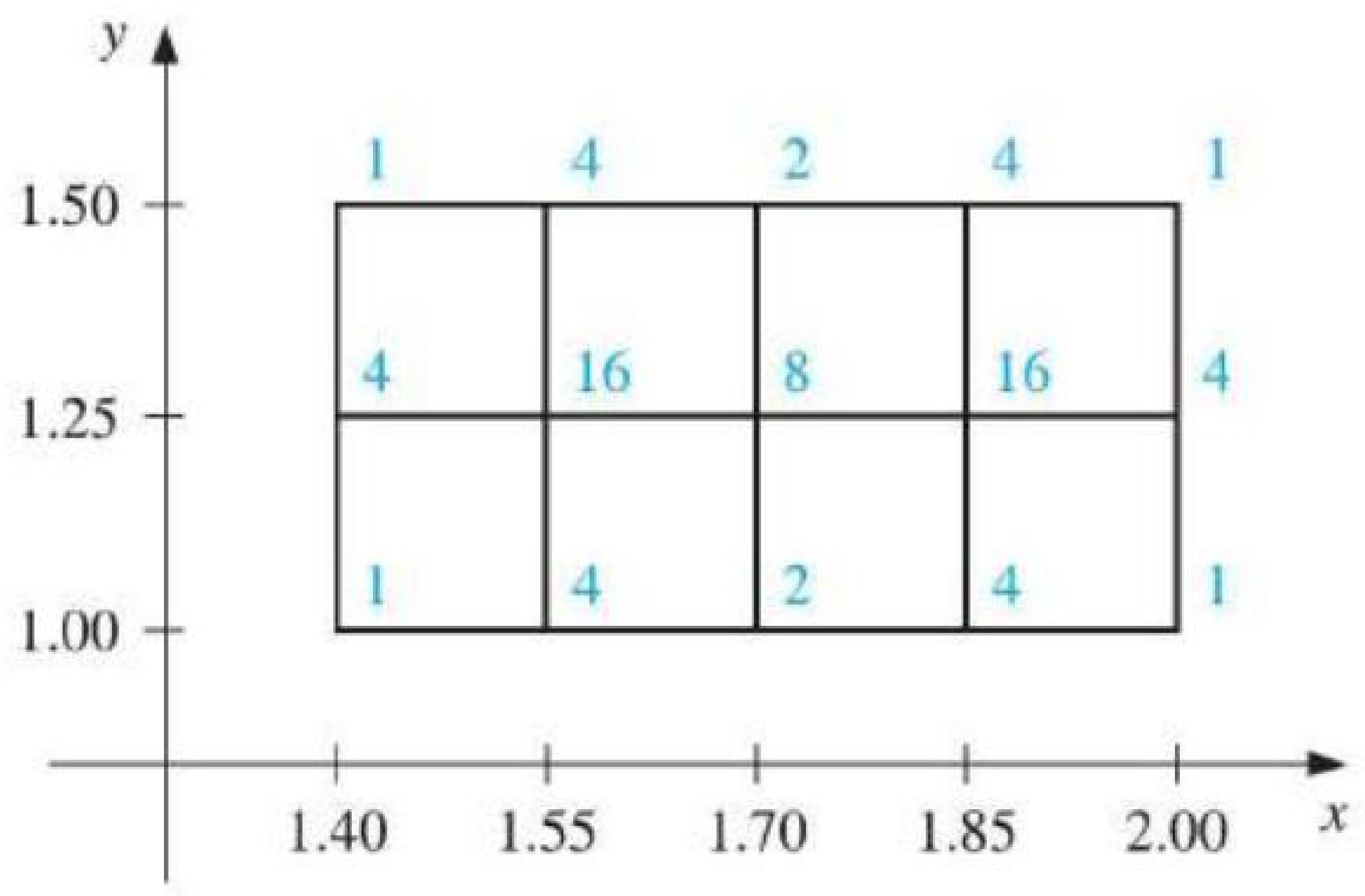
بأخذ $n = 4$ و $m = 2$ يستخدم حجوم الخطوة $k = 0.25$ و $h = 0.15$.
في شكل (18.4) تظهر منطقة التكامل R مع نقاط النقاط (x_i, y_j)، حيث $i = 0, 1, 2, 3, 4$ و $j = 0, 1, 2$. وتظهر أيضًا المعاملات $w_{i,j}$ للدالّة $f(x_i, y_i) = \ln(x_i + 2y_i)$ في حاصل الجمع الذي يعطي تقريب قاعدة سمبسون المركبة للتكامل.

التقريب هو

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y)\,dy\,dx \approx \frac{(0.15)(0.25)}{9}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{2} w_{i,j}\ln(x_i + 2y_j)$$

$$= 0.4295524387$$

شكل 18.4



بما أن

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y) = \frac{-6}{(x+2y)^4} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, y) = \frac{-96}{(x+2y)^4}$$

والقيم العظمى للقيم المطلقة لهذه المشتقات الجزئية تتحقق على R عندما $x = 1.4$ و $y = 1.0$ فإن الخطأ يكون محدودًا بِـ

$$|E| \le \frac{(0.5)(0.6)}{180}\left[(0.15)^4 \max_{(x,y)\text{ in }R} \frac{6}{(x+2y)^4} + (0.25)^4 \max_{(x,y)\text{ in }R} \frac{96}{(x+2y)^4}\right]$$

$$\le 4.72 \times 10^{-6}$$

إن القيمة الفعلية للتكامل إلى أقرب عشر خانات عشرية هي

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y)\, dy\, dx = 0.4295545265$$

ولذلك فإن التقريب دقيق ضمن 2.1×10^{-6}. ■

يمكن استخدام الطرائق نفسها لتقريب التكامل الثلاثي والتكاملات الأعلى للدوال في أكثر من ثلاثة متغيرات. وإن العدد التام للتقييمات الدالّية المطلوبة للتقريب هو حاصل ضرب أعداد التقييمات الدالّية المطلوبة عندما تطبّق الطريقة على كل متغير.

ولتخفيض عدد التقييمات الدالّية؛ يمكن استخدام طرائق أكثر فاعلية من صيغ نيوتن – كوتس، ومن هذه الطرائق: صيغة جاوس للتكامل، تكامل رومبرج، أو صيغ التكامل التكيفية. يبين المثال الآتي استخدام طريقة جاوس للتكامل الذي عايناه في المثال (1).

مثال 2 لديك التكامل الثنائي الذي ذكر في المثال (1).

قبل استخدام طريقة جاوس للتكامل لإيجاد تقريب لهذا التكامل نجري تحويلًا لمنطقة التكامل

$$R = \{(x, y) \mid 1.4 \le x \le 2.0,\ 1.0 \le y \le 1.5\}$$

إلى

$$\hat{R} = \{ (u, \mathrm{v}) \mid -1 \le u \le 1, -1 \le \mathrm{v} \le 1\}$$

والتحويلات الخطية التي تنجز هذا التحويل هي

$$\mathrm{v} = \frac{1}{1.5 - 1.0}(2y - 1.0 - 1.5), \text{ و } u = \frac{1}{2.0 - 1.4}(2x - 1.4 - 2.0)$$

أو على نحو مكافئ $x = 0.3u + 1.7$ و $y = 0.25\mathrm{v} + 1.25$.

يمكن باستخدام هذا التحويل للمتغيرات الذي يعطي تكاملًا أن نطبق عليه قاعدة جاوس

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y)\, dy\, dx = 0.075 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \ln(0.3u + 0.5\mathrm{v} + 4.2)\, d\mathrm{v}\, du$$

إن صيغة جاوس للتكامل باستخدام $n = 3$ في كلٍّ من u و v تتطلب منا استخدام النقاط $u_0 = \mathrm{v}_0 = r_{3,1} = -0.7745966692$ و $u_1 = \mathrm{v}_1 = r_{3,2} = 0$ و $u_2 = \mathrm{v}_2 = r_{3,3} = 0.7745966692$ والأوزان المرتبطة بهذا هي $c_{3,2} = 0.\overline{8}$ و $c_{3,1} = c_{3,3} = 0.\overline{5}$ (هذه القيم موجودة في جدول 11.4) وبذلك

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y)\, dy\, dx \approx 0.075 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{3,i} c_{3,j} \ln(0.3 r_{3,i} + 0.5 r_{3,j} + 4.2)$$
$$= 0.4295545313$$

على الرغم من أن هذه النتيجة تتطلب (9) تقييمات دالية فقط مقارنة بـِ 15 في قاعدة سمبسون المركبة المستخدمة في المثال (1)، إلا أن النتيجة دقيقة ضمن 4.8×10^{-9} مقارنة بالدقة 2.1×10^{-6} في المثال (1). ■

إن طرائق التقريبات للتكاملات الثنائية ليست مقصورة على التكاملات ذات مناطق التكامل المستطيلة. يمكن تطوير الطرائق التي شرِحت سابقًا لتستخدم في تقريب التكاملات الثنائية على الصيغ

$$\int_{a}^{b} \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \qquad \textbf{(43.4)}$$

أو

$$\int_{c}^{d} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad \textbf{(44.4)}$$

في الحقيقة، يمكننا أيضًا تقريب التكاملات على المناطق من غير هذا النوع عن طريق تجزئات مناسبة للمنطقة. (انظر تمرين 10)

لوصف الطريقة المستخدمة في تقريب التكامل من النوع

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

سنستخدم قاعدة سمبسون الرئيسة للتكامل بالنسبة إلى كلا المتغيرين.
حجم الخطوة للمتغير x هو $h = (b - a)/2$، ولكن حجم الخطوة بالنسبة إلى المتغير y يتغير مع تغير x، (انظر شكل 19.4) ويكتب على الصيغة

$$k(x) = \frac{d(x) - c(x)}{2}$$

ومن ثم

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \approx \int_a^b \frac{k(x)}{3}[f(x, c(x)) + 4f(x, c(x) + k(x)) + f(x, d(x))]\, dx$$

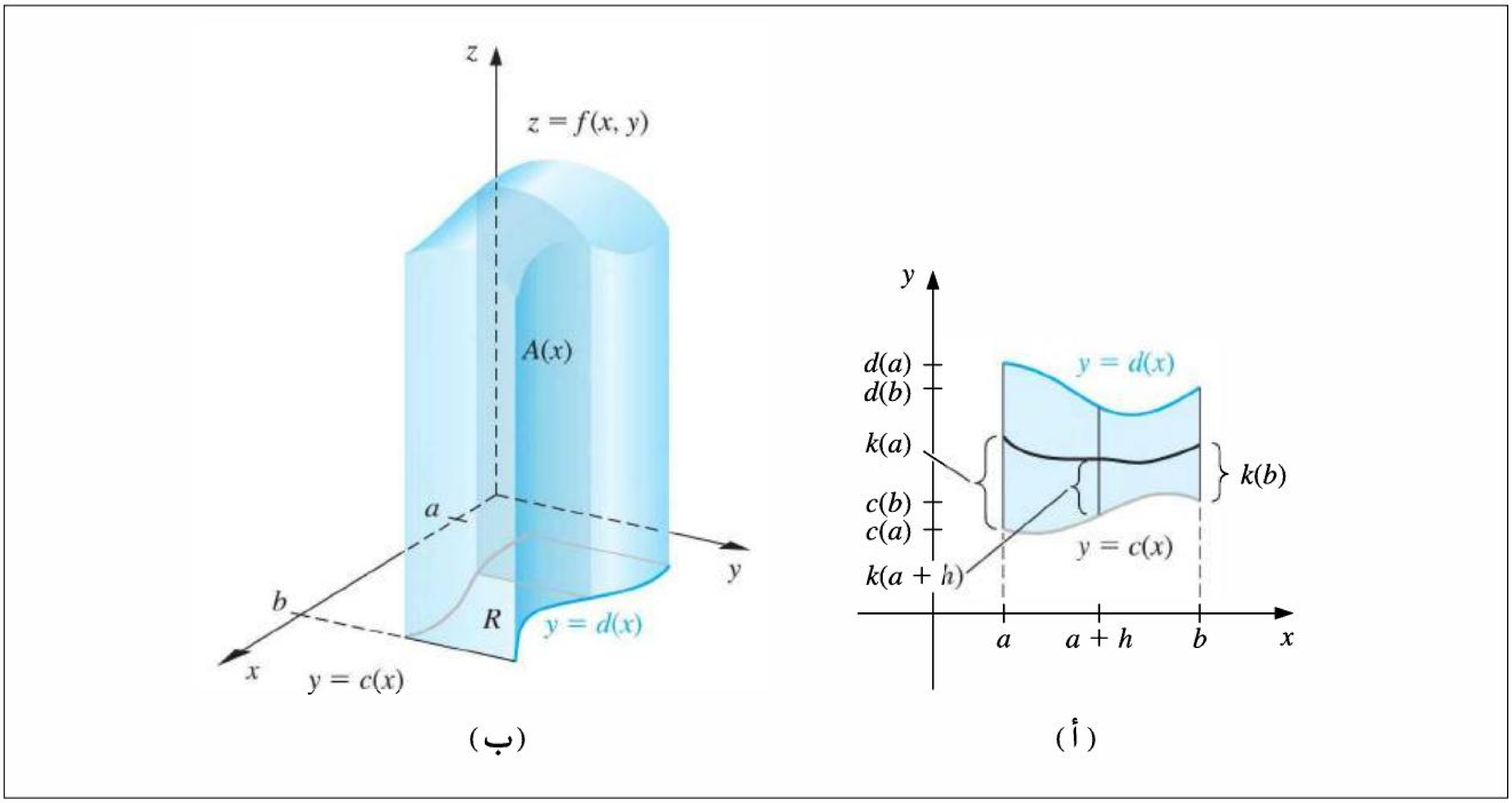
$$\approx \frac{h}{3}\left\{ \frac{k(a)}{3}[f(a, c(a)) + 4f(a, c(a) + k(a)) + f(a, d(a))] \right.$$

$$+ \frac{4k(a + h)}{3}[f(a + h, c(a + h)) + 4f(a + h, c(a + h)$$

$$+ k(a + h)) + f(a + h, d(a + h))]$$

$$\left. + \frac{k(b)}{3}[f(b, c(b)) + 4f(b, c(b) + k(b)) + f(b, d(b))] \right\}$$

شكل 19.4



تطبق الخوارزمية (4.4) قاعدة سمبسون المركبة على تكامل على صيغة الصيغة (43.4). وبالطبع يمكن معالجة التكاملات على صيغة الصيغة (44.4) بطريقة مماثلة.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.4

تكامل سمبسون الثنائي Simpson's Double Integral

لكي نقرّب التكامل

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

المدخلات: نقطتا النهاية a و b: أعداد صحيحة موجبة زوجية m, n.

المخرجات: التقريب J للتكامل I.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/n$ $J_1 = 0$ (حدود النهاية) $J_2 = 0$ (الحدود الزوجية) $J_3 = 0$ (الحدود الفردية)
2	لكل $i = 0, 1, \ldots, n$، طبّق الخطوات 3 – 8.
3	ضع $x = a + ih$ (بطريقة سمبسون المركبة للمتغير x) $HX = (d(x) - c(x))/m$ $K_1 = f(x, c(x)) + f(x, d(x))$ (حدود النهاية). $K_2 = 0$ (الحدود الزوجية) $K_3 = 0$ (الحدود الفردية)
4	لكل $j = 1, 2, \ldots, m-1$، طبّق الخطوتين 5 و 6.
5	ضع $y = c(x) + jHX$ $Q = f(x, y)$
6	إذا كان j موجبًا فضع $K_2 = K_2 + Q$ وإلا فضع $K_3 = K_3 + Q$
7	ضع $L = (K_1 + 2K_2 + 4K_3)HX/3$ $\left(L \approx \int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(x_i, y)\, dy\right.$ بطريقة سمبسون المركبة$\left.\right)$
8	إذا كان $i = 0$ أو $i = n$ فضع $J_1 = J_1 + L$ غير ذلك إذا كان i زوجيًا ضع $J_2 = J_2 + L$ غير ذلك ضع $J_3 = J_3 + L$
9	ضع $J = h(J_1 + 2J_2 + 4J_3)/3$
10	المخرجات (J) توقف.

■

إن تطبيق صيغة تكامل جاوس للتكامل الثنائي

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

ملحوظة: إن تخفيض عدد عمليات الحساب يجعل تطبيق عملية تكامل جاوس ذا جدوى على نحو عام بدلاً مـن تطبيق إحدى طرائق سمبســون عند تقريب التكاملات الثنائية.

يتطلب أولًا، لكل x في الفترة $[a, b]$، تحويل المتغير y في الفترة $[c(x), d(x)]$ إلى المتغير t في الفترة $[-1, 1]$. إن هذا التحويل الخطي يعطي

$$dy = \frac{d(x) - c(x)}{2}\,dt \quad \text{و} \quad f(x, y) = f\left(x, \frac{(d(x) - c(x))\,t + d(x) + c(x)}{2}\right)$$

بعدئذ لكل x في الفترة $[a, b]$، نطبق طريقة جاوس للتكامل على التكامل الناتج

$$\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy = \int_{-1}^{1} f\left(x, \frac{(d(x) - c(x))\,t + d(x) + c(x)}{2}\right) dt$$

لينتج

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy\,dx$$
$$\approx \int_a^b \frac{d(x) - c(x)}{2} \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}\, f\left(x, \frac{(d(x) - c(x))\,r_{n,j} + d(x) + c(x)}{2}\right) dx$$

حيث كما في السابق، تأتي الجذور $r_{n,j}$ والمعاملات $c_{n,j}$ من جدول (11.4).
والآن تحوّلت $[a, b]$ إلى $[-1, 1]$، ويمكن تطبيق طريقة جاوس للتكامل لإيجاد تقريب للتكامل على الجانب الأيمن في الصيغة.

تعطى التفاصيل في الخوارزمية (4.5).



تكامل جاوس الثنائي Gaussian Double Integral

لتقريب التكامل

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy\,dx$$

المدخلات: نقطتا النهاية a, b؛ أعداد صحيحة موجبة m, n.
(الجذور $r_{i,j}$ والمعاملات $c_{i,j}$ بحاجة إلى تعيين للعدد $i = \max\{m, n\}$ ولـ $1 \le j \le i$ جميعًا)

المخرجات: التقريب J للتكامل I.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h_1 = (b - a)/2$ $h_2 = (b + a)/2$ $J = 0$
2	لكل $i = 1, 2, \ldots, m$، طبق الخطوات 3 – 5.
3	ضع $JX = 0$ $x = h_1 r_{m,i} + h_2$ $d_1 = d(x)$ $c_1 = c(x)$ $k_1 = (d_1 - c_1)/2$ $k_2 = (d_1 + c_1)/2$



4	لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ ضع $y = k_1 r_{n,j} + k_2$ $Q = f(x, y)$ $JX = JX + c_{n,j} Q$
5	ضع $J = J + c_{m,i} k_1 JX$.
6	ضع $J = h_1 J$.
7	المخرجات (J). توقف.

■

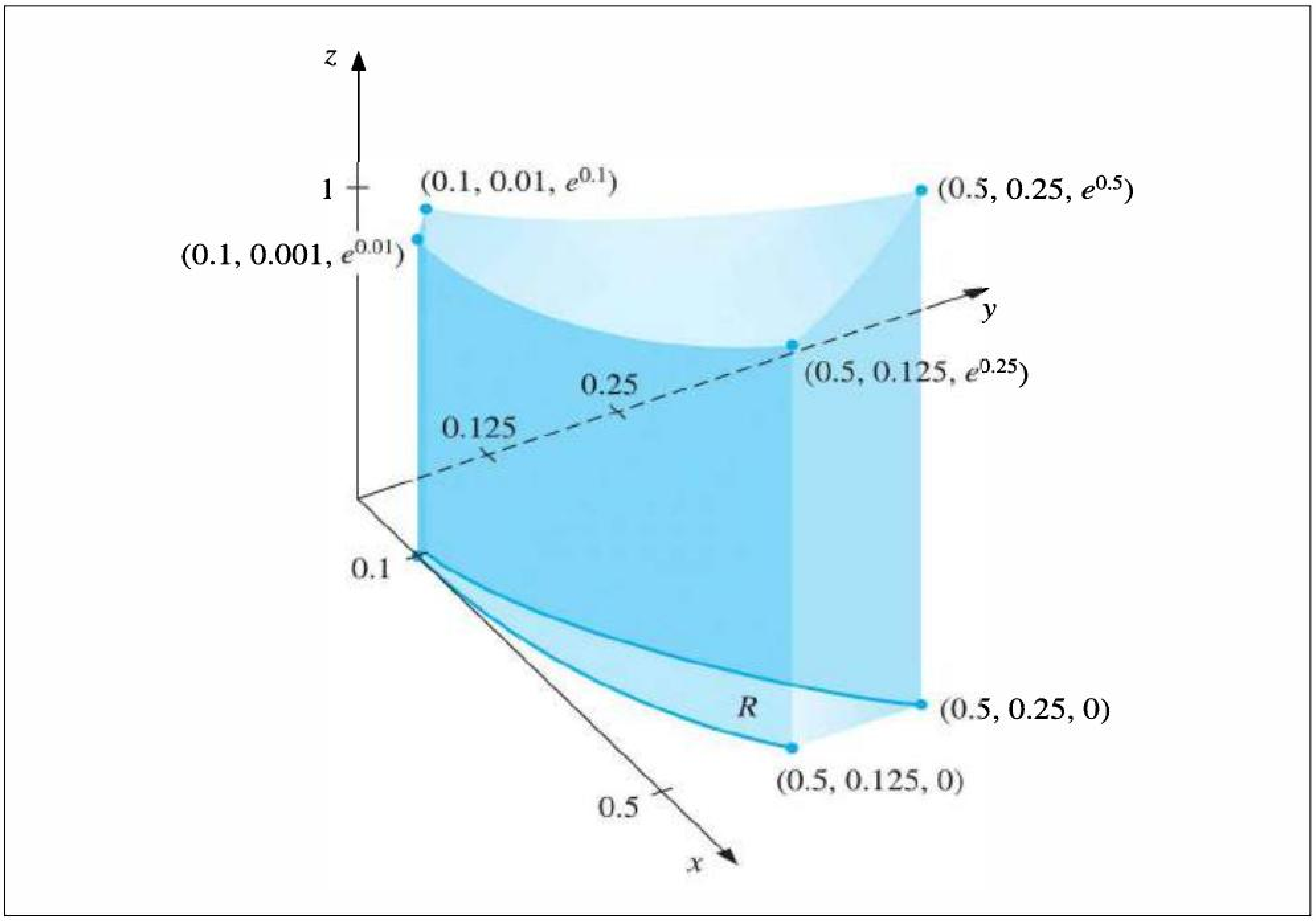
مثال 3

يقرّب حجم الجسم في شكل (20.4) باستخدام خوارزمية تكامل سمبسون الثنائي بأخذ $n = m = 10$ على التكامل

$$\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} e^{y/x}\, dy\, dx$$

إن هذا يتطلب 121 تقييمًا للدالّة $f(x, y) = e^{y/x}$ وينتج 0.0333054 وهو ما يقرّب حجم المجسم في شكل (20.4) إلى 7 خانات عشرية تقريبًا. إن تطبيق خوارزمية جاوس للتكامل باستخدام $n = m = 5$ يتطلب 25 تقييمًا داليًّا فقط ويعطي التقريب 0.03330556611، وهو دقيق لإحدى عشرة منزلة عشرية. ■

شكل 20.4



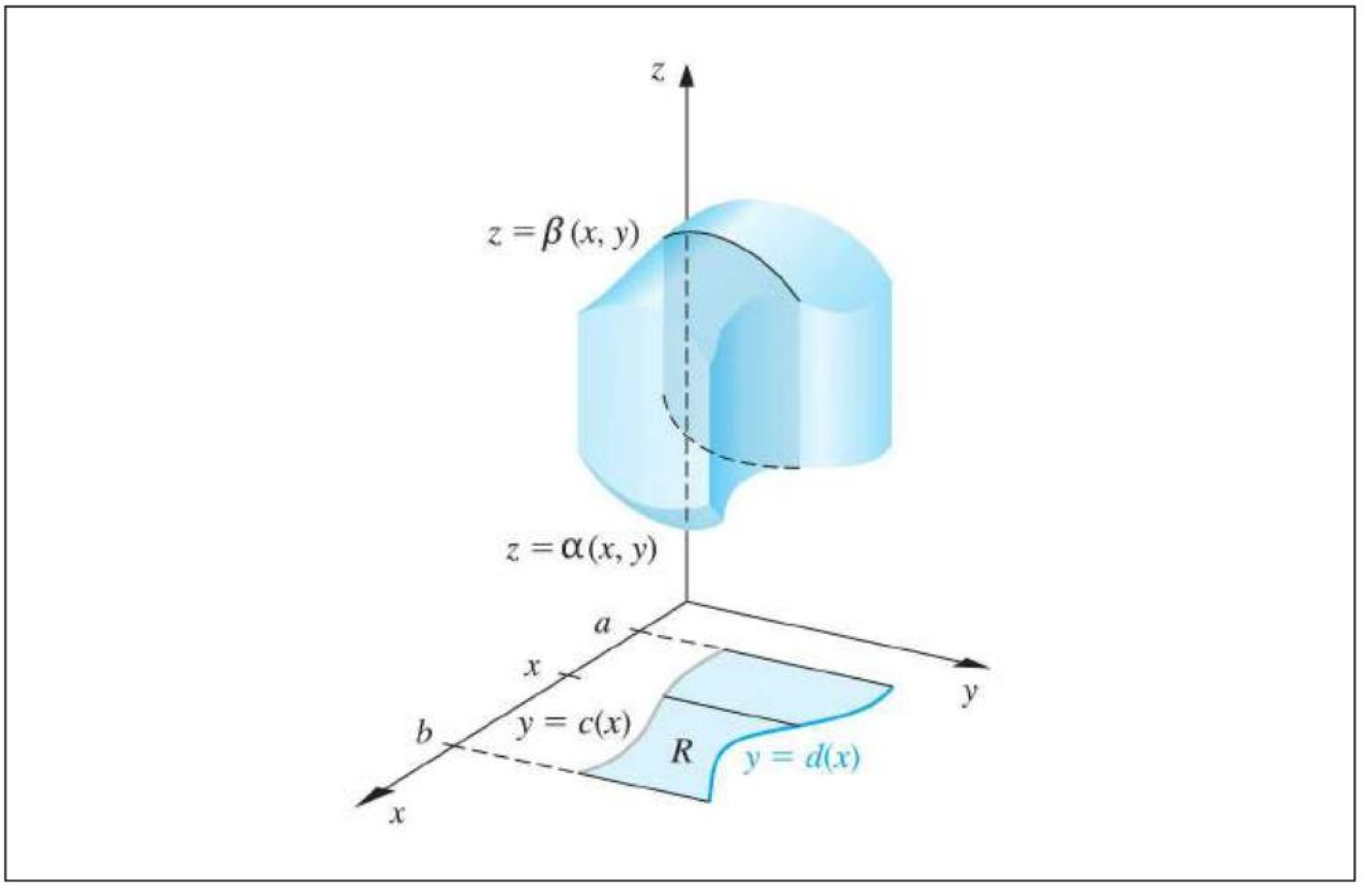
إن تخفيض الحسابات يجعل تطبيق طريقة جاوس للتكامل عمومًا أفضل من استخدام طريقة سمبسون للتكامل عندما نود تقريب التكامل الثنائي.

يمكن تقريب التكاملات الثلاثية على الصيغة

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

بطريقة مماثلة. (انظر شكل 21.4).

شكل 21.4



وبسبب عدد الحسابات المطلوبة فإن الاختيار يقع على طريقة جاوس للتكامل.
تنفذ الخوارزمية (6.4) هذه العملية.

ALGORITHM
الخوارزمية
6.4

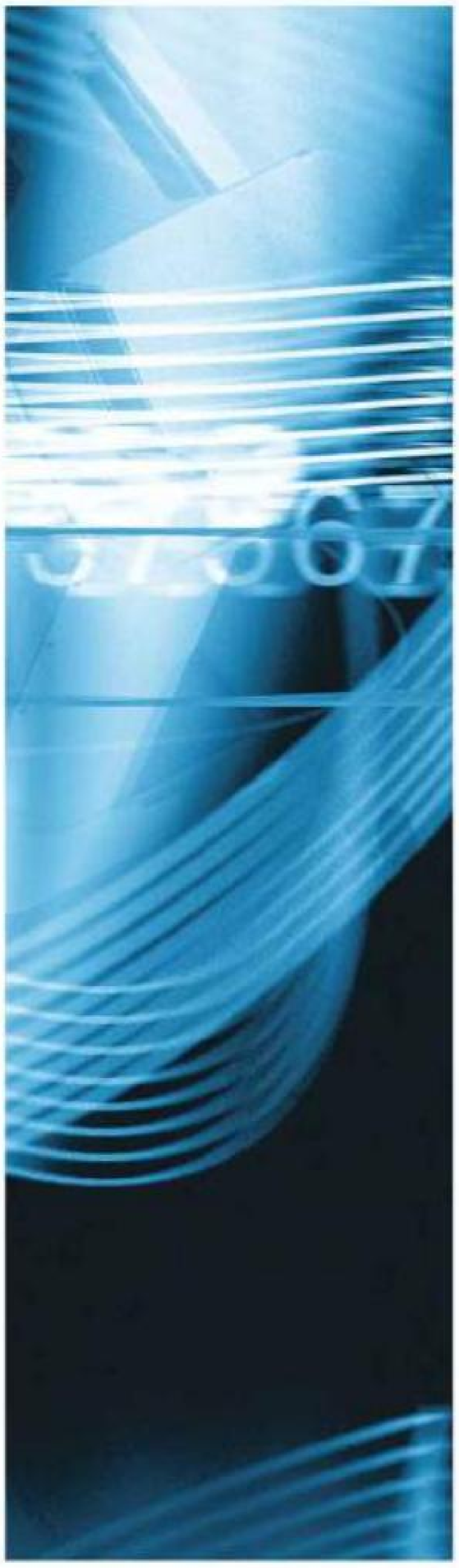
تكامل جاوس الثلاثي Gausian Triple Integral

لإيجاد تقريب للتكامل

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

المدخلات: نقطتا النهاية a و b أعداد صحيحة موجبة m، n، و P.
(الجذور $r_{i,j}$ والمعاملات $c_{i,j}$ يجب أن تكون متاحة للعدد $i = \max\{n, m, p\}$ ولكل i $1 \le j \le i$.
المخرجات: التقريب J للتكامل I.)

الخطوة	المضمون
1	ضع $h_1 = (b - a)/2$ $h_2 = (b + a)/2$ $J = 0$



2	لكل m ،$i = 1, 2, \ldots, m$ طبق الخطوات 3 - 8.
3	ضع $JX = 0$ $x = h_1 r_{m,i} + h_2$ $d_1 = d(x)$ $c_1 = c(x)$ $k_1 = (d_1 - c_1)/2$ $k_2 = (d_1 + c_1)/2$
4	لكل n ،$j = 1, 2, \ldots, n$ طبق الخطوات 5 -7.
5	ضع $JY = 0$ $y = k_1 r_{n,j} + k_2$ $\beta_1 = \beta(x, y)$ $\alpha_1 = \alpha(x, y)$ $l_1 = (\beta_1 - \alpha_1)/2$ $l_2 = (\beta_1 + \alpha_1)/2$
6	لكل p ،$k = 1, 2, \ldots, p$ ضع $z = l_1 r_{p,k} + l_2$ $Q = f(x, y, z)$ $JY = JY + c_{p,k} Q$
7	ضع $JX = JX + c_{n,j} l_1 JY$
8	ضع $J = J + c_{m,i} k_1 JX$
9	ضع $J = h_1 J$
10	المخرجات (J) توقف.

■

يتطلب المثال الآتي تقييم أربعة تكاملات ثلاثية.

مثال 4 يقع مركز كتلة المجسم D ذي دالة كثافة σ على النقطة

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right)$$

حيث

$$M_{yz} = \iiint_D x\sigma(x, y, z)\, dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y\sigma(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_D z\sigma(x, y, z)\, dV$$

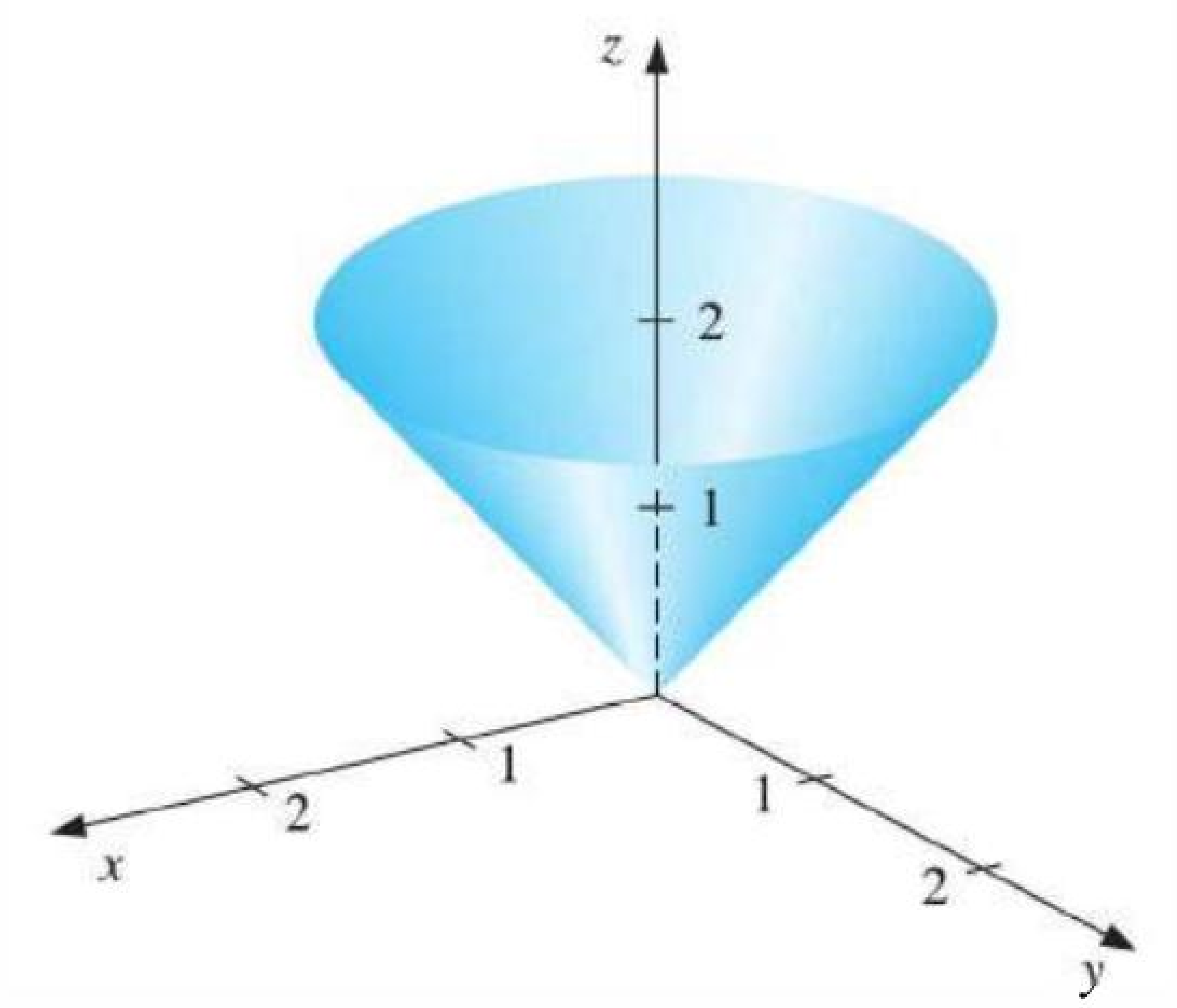
هي العزوم حول المستويات الإحداثية، والكتلة هي

$$M = \iiint_D \sigma(x, y, z)\, dV$$

في شكل (22.4) يظهر مجسم محدود بالسطح العلوي للمخروط $z^2 = x^2 + y^2$ والمستوى $z = 2$

افترض أن كثافة المجسم ممثَّلة بالدّالة $\sigma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

شكل 22.4



إن تطبيق خوارزمية تكامل جاوس الثلاثي (6.4) باستخدام $n = m = p = 5$ يتطلب 125 تقييمًا داليًّا لكل تكامل ويعطي التقريبات الآتية

$$M = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$$

$$= 4 \int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx \approx 8.37504476$$

$$M_{yz} = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} x\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx \approx -5.55111512 \times 10^{-17}$$

$$M_{xz} = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} y\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx \approx -8.01513675 \times 10^{-17}$$

$$M_{xy} = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx \approx 13.40038156$$

إن هذا يعني أن الموقع التقريبي لموقع الكتلة هو

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (0, 0, 1.60003701)$$

يمكن إيجاد قيم هذه التكاملات مباشرة وبسهولة. وإذا ما أجريت ذلك تجد أن مركز الكتلة يقع بالضبط على $(0, 0, 1.6)$. ■

مجموعة التمارين 8.4 EXERCISE SET

1. استخدم الخوارزمية (4.4) بأخذ $n = m = 4$ لتقريب التكاملات الثنائية الآتية، وقارن النتائج بالإجابات الصحيحة:

أ. $\int_{2.1}^{2.5}\int_{1.2}^{1.4} xy^2\, dy\, dx$ ب. $\int_{0}^{0.5}\int_{0}^{0.5} e^{y-x}\, dy\, dx$

جـ. $\int_{2}^{2.2}\int_{x}^{2x} (x^2 + y^3)\, dy\, dx$ د. $\int_{1}^{1.5}\int_{0}^{x} (x^2 + \sqrt{y})\, dy\, dx$

2. أوجد أصغر قيمة للأعداد $n = m$ بحيث يمكن استخدام الخوارزمية (4.4) لإيجاد تقريب للتكاملات في تمرين (1) ضمن 10^{-6} من القيمة الفعلية.

3. استخدم الخوارزمية (4.4) مستخدمًا $(i)\ n = 4, m = 8,\ (ii)\ n = 8, m = 4,\ (iii)\ n = m = 6$ لإيجاد تقريب للتكاملات الثنائية الآتية، وقارن الإجابات بالإجابات الصحيحة:

أ. $\int_{0}^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x} (2y\sin x + \cos^2 x)\, dy\, dx$ ب. $\int_{1}^{e}\int_{1}^{x} \ln xy\, dy\, dx$

جـ. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{2x} (x^2 + y^3)\, dy\, dx$ د. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{2x} (y^2 + x^3)\, dy\, dx$

هـ. $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{x} \cos x\, dy\, dx$ و. $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{x} \cos y\, dy\, dx$

ز. $\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy\, dx$ ح. $\int_{-\pi}^{3\pi/2}\int_{0}^{2\pi} (y\sin x + x\cos y)\, dy\, dx$

4. أوجد أصغر قيمة للأعداد $n = m$ بحيث يمكن استخدام الخوارزمية (4.4) لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (3) ضمن 10^{-6} من القيمة الفعلية.

5. استخدم الخوارزمية (5.4) بأخذ $n = m = 2$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (1)، وقارن نتائجك بتلك التي حصلت عليها في التمرين (1).

6. أوجد أصغر قيمة للأعداد $n = m$ بحيث يمكن استخدام الخوارزمية (5.4) لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (1) ضمن 10^{-6}. لا تستمر في أكثر من $n = m = 5$. قارن عدد التقييمات الدالّية اللازمة بالعدد في التمرين (2).

7. استخدم الخوارزمية (5.4) مستخدمًا

$(i)\ n = m = 3,\ (ii)\ n = 3, m = 4,\ (iii)\ n = 4, m = 3,\ (iv)\ n = m = 4$

لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين 3.

8. استخدم الخوارزمية (5.4) بأخذ $n = m = 5$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (3). قارن عدد التقييمات الافتراضية اللازمة بالعدد اللازم في التمرين (4).

9. استخدم الخوارزمية (4.4) بأخذ $n = m = 14$ والخوارزمية (5.4) بأخذ $n = m = 4$ لتقريب التكامل

$$\iint_R e^{-(x+y)}\, dA$$

للمنطقة R في المستوى والمحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$.

10. استخدم الخوارزمية (4.4) لإيجاد تقريب للتكامل

$$\iint_R \sqrt{xy + y^2}\, dA$$

حيث R هي المنطقة في المستوى المحدد بالخطوط $3y - x = 2$,$x + y = 6$ و $3x - y = 2$.
أولًا، اقسم R إلى منطقتين R_1 و R_2 بحيث يمكن تطبيق الخوارزمية (4.4) على كل منهما.
استخدم $n = m = 6$ على كلتا المنطقتين R_1 و R_2.

11. lamina اللامنة المستوية هي صفيحة رقيقة كتلتها موزَّعة على نحو متصل. إذا كان σ الدّالة التي تصف كثافة لامنة مع شكل منطقة R من المستوى xy، فإن مركز الكتلة لتلك اللامنة هو $(\overline{x}, \overline{y})$ حيث

$$\overline{x} = \frac{\iint_R x\sigma(x, y)\, dA}{\iint_R \sigma(x, y)\, dA}, \quad \overline{y} = \frac{\iint_R y\sigma(x, y)\, dA}{\iint_R \sigma(x, y)\, dA}$$

استخدم الخوارزمية (4.4) بأخذ $n = m = 14$ لإيجاد مركز الكتلة للامنة المصرّفة بالمنطقة $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$ ذات دالة كثافة $\sigma(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ قارن التقريب بالنتيجة الصحيحة.

12. كرر التمرين (11) باستخدام الخوارزمية (5.4) و $n = m = 5$.

13. مساحة السطح المعرّف بالدّالة $z = f(x, y)$ لكل (x, y) في R هي

$$\iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA$$

استخدم الخوارزمية (4.4) و $n = m = 8$ لإيجاد تقريب لمساحة السطح لنصف الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \ge 0$ التي تقع فوق المنطقة في المستوى المعرف من خلال

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

14. كرّر تمرين (13) باستخدام الخوارزمية (5.4) و $n = m = 4$.

15. استخدم الخوارزمية (6.4) بأخذ $n = m = p = 2$ لتقريب كل من التكاملات الثلاثية الآتية وقارن إجابتك بالإجابات الصحيحة:

أ. $\int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} e^{x+y+z}\, dz\, dy\, dx$

ب. $\int_0^1 \int_x^1 \int_0^y y^2 z\, dz\, dy\, dx$

جـ. $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x-y}^{x+y} y\, dz\, dy\, dx$

د. $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x-y}^{x+y} z\, dz\, dy\, dx$

هـ. $\int_0^{\pi} \int_0^x \int_0^{xy} \frac{1}{y} \sin\frac{z}{y}\, dz\, dy\, dx$

و. $\int_0^1 \int_0^1 \int_{-xy}^{xy} e^{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$

16. كرّر تمرين (15) باستخدام $n = m = p = 3$.

17. كرّر تمرين (15) باستخدام $n = m = p = 4$ و $n = m = p = 5$.

18. استخدم الخوارزمية (6.4) بأخذ $n = m = p = 4$ لتقريب

$$\iiint_S xy \sin(yz)\, dV$$

حيث تمثل S مجسمًا محدودًا بالمستويات الإحداثية والمستويات $x = \pi, y = \pi/2, z = \pi/3$.
قارن هذا التقريب بالإجابة الصحيحة.

19. استخدم الخوارزمية (6.4) بأخذ $n = m = p = 5$ لتقريب

$$\iiint_S \sqrt{xyz}\, dV$$

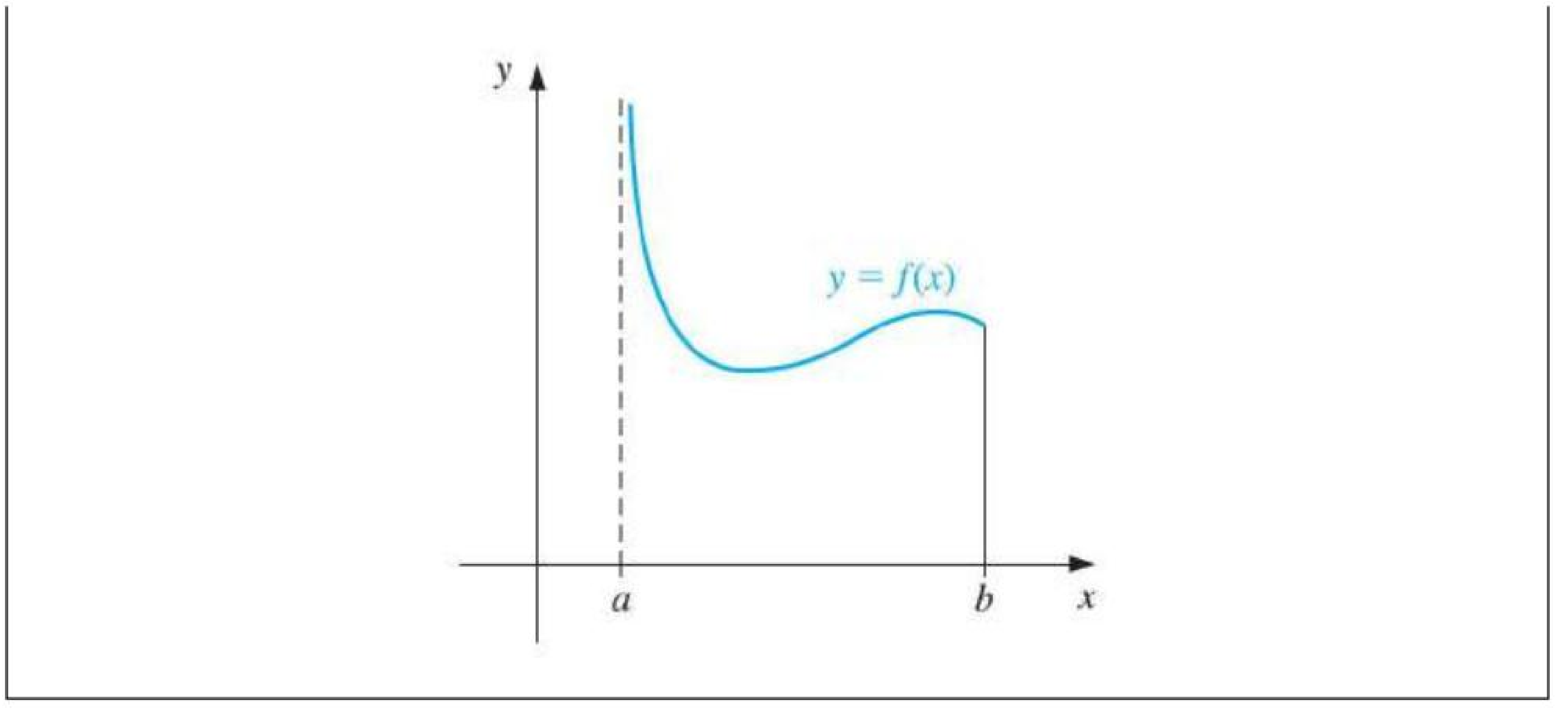
حيث S هي المنطقة في الثمن الأول المحدود بالأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$، والكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ والمستوى $x + y + z = 8$. كم تقنية دالية لازمة لهذا التقريب؟

9.4 التكاملات المعتلة Improper Integrals

تظهر التكاملات المعتلة عندما نعمم مفهوم التكامل: إما إلى فترة تكامل تكون عليها الدّالة غير محدودة، وإما إلى فترة يكون أحد طرفيها أو كلاهما لانهائيًّا. وفي أي من هاتين الحالتين فإنه يجب تعديل طرائق تقريب التكامل العادية.

سنقوم أولًا بمعاينة الحالة التي تكون فيها الدّالة المتكاملة غير محدودة على نقطة النهاية الصغرى لفترة التكامل، (كما يظهر في شكل 23.4).

شكل 23.4



في هذه الحالة نقول: إن f له نقطة شذوذ Singularity point على نقطة النهاية a. سنبرهن أن التكاملات المعتلة الأخرى يمكن تحويلها إلى مسائل من هذا النوع.

يبين حساب التفاضل والتكامل أن التكامل المعتل بنقطة شاذة على نقطة النهاية اليسرى

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$$

يتقارب إذا وفقط إذا كان $0 < p < 1$، وفي هذه الحالة نعرّف

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx = \left.\frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\right|_a^b = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$$

إذا كانت f دالة يمكن كتابتها على الصيغة

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^p}$$

حيث $0 < p < 1$ و g متصل على $[a, b]$، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود.

سنقرّب هذا التكامل باستخدام قاعدة سمبسون المركبة، شريطة أن $g \in C^5[a, b]$.

نستطيع في تلك الحالة إنشاء كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$ إلى g حول a

$$P_4(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{g^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4$$

ونكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx + \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx \tag{45.4}$$

وبما أن $P(x)$ كثيرة حدود، فإنه يمكننا أن نحدد بالضبط قيمة

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx = \sum_{k=0}^{4}\int_a^b \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-p}\,dx = \sum_{k=0}^{4}\frac{g^{(k)}(a)}{k!(k+1-p)}(b-a)^{k+1-p} \tag{46.4}$$

إن هذا هو الجزء المسيطر في التقريب، وخصوصًا عندما تتفق كثيرة حدود تايلور$P_4(x)$ مع $g(x)$ على نحو كبير على كل الفترة $[a, b]$.

ولتقريب تكامل f، يجب أن نضيف هذه القيمة لتقريب التكامل

$$\int_a^b \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx$$

ولتحديد هذا، نعرّف أولا

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p} & \text{إذا كان } a < x \le b \\ 0 & \text{إذا كان } x = a \end{cases}$$

بما أن $0 < p < 1$ و $P_4^{(k)}(a)$ يتفق مع $g^{(k)}(a)$ لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4$، نحصل على $G \in C^4[a, b]$ هذا يعني إمكانية تطبيق قاعدة سمبسون المركبة لتقريب تكامل G علي $[a, b]$. إن جمع هذا التقريب إلى القيمة في الصيغة (46.4) يعطي التقريب للتكامل المعتل للدالّة f على $[a, b]$، ضمن دقة التقريب بقاعدة سمبسون المركبة.

مثال 1 سنستخدم قاعدة سمبسون المركبة بأخذ $h = 0.25$ لتقريب قيمة التكامل المعتل

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$$

بما أن كثيرة حدود تايلور الرابعة للدالّة e^x حول $x = 0$ هو

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

فإن جزءًا من التقريب للتكامل $\int_0^1 (e^x/\sqrt{x})\,dx$ يكون

$$\int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \left(x^{-1/2} + x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{6}x^{5/2} + \frac{1}{24}x^{7/2}\right)dx$$

$$= \lim_{M\to 0^+}\left[2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{5}x^{5/2} + \frac{1}{21}x^{7/2} + \frac{1}{108}x^{9/2}\right]_M^1$$

$$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{108} \approx 2.9235450$$

ولإيجاد الجزء الآخر لتقريب التكامل $\int_0^1 (e^x/\sqrt{x})\,dx$ نحتاج إلى تقريب $\int_0^1 G(x)\,dx$، حيث

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}(e^x - P_4(x)) & \text{إذا كان } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0 \end{cases}$$

جدول 14.4

x	$G(x)$
0.00	0
0.25	0.0000170
0.50	0.0004013
0.75	0.0026026
1.00	0.0099485

ويعرض جدول (14.4) القيم اللازمة لتطبيق قاعدة سمبسون المركبة لهذا التقريب.

إن استخدام هذه البيانات وقاعدة سمبسون المركبة يعطي

$$\int_0^1 G(x)\,dx \approx \frac{0.25}{3}[0 + 4(0.0000170) + 2(0.0004013) + 4(0.0026026) + 0.0099485]$$
$$= 0.0017691$$

ولذلك ينتج

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx \approx 2.9235450 + 0.0017691 = 2.9253141$$

إن هذه النتيجة دقيقة ضمن دقة قاعدة سمبسون المركبة في التقريب للدالّة G.

بما أن $|G^{(4)}(x)| < 1$ على $[0, 1]$، فإن الخطأ يكون محدودًا بالعدد

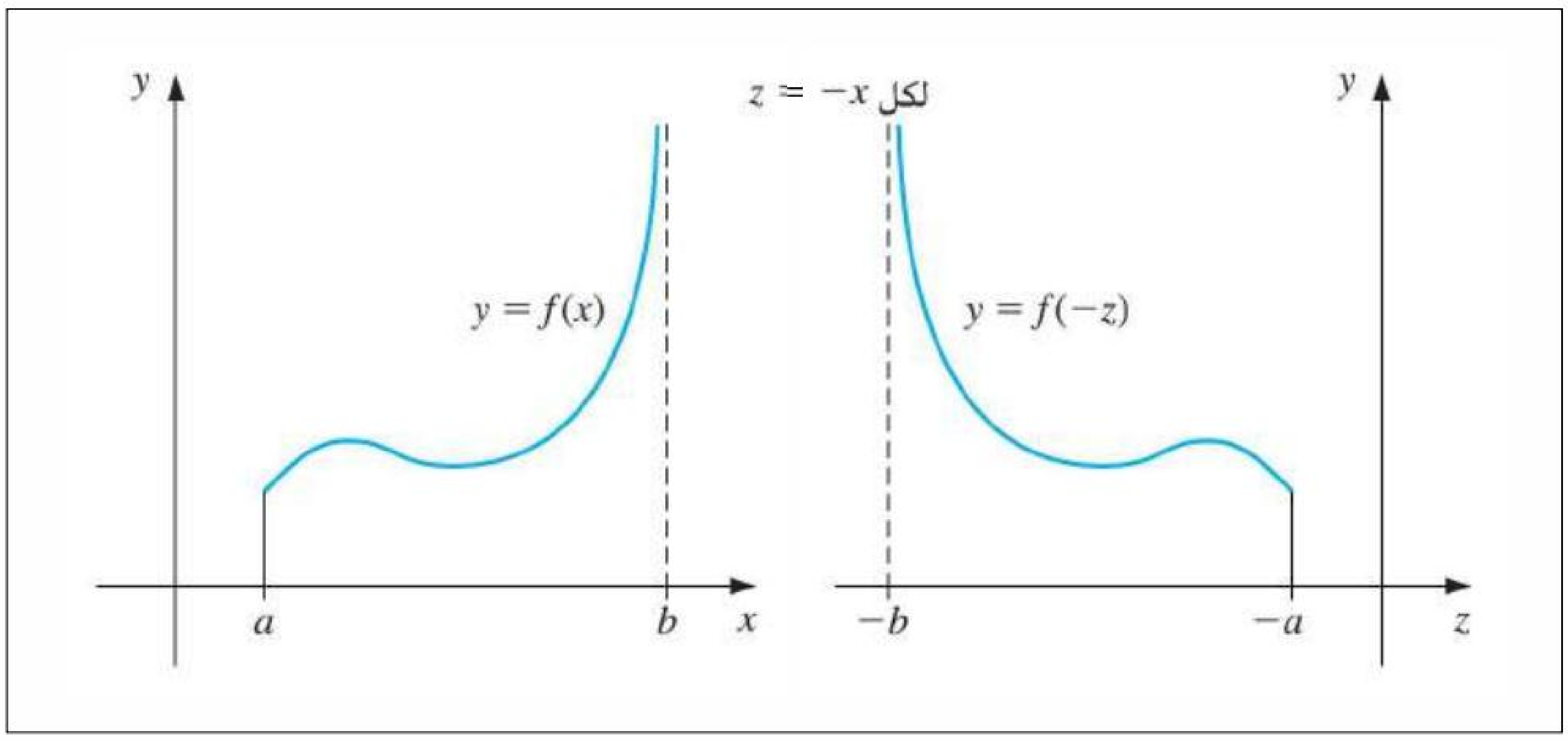
$$\frac{1-0}{180}(0.25)^4 = 0.0000217 \qquad \blacksquare$$

لتقريب التكامل المعتل بنقطة شاذة على نقطة النهاية اليمنى؛ نطبق الطريقة التي استخدمناها سابقًا، ولكن نتوسع بدلالة نقطة النهاية اليمنى b بدلًا من نقطة النهاية اليسرى a. وبدلًا من ذلك نستخدم التعويض $z = -x,\ dz = -\,dx$ لتغيير التكامل المعتل على الصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-z)\,dz \qquad (47.4)$$

الذي له نقطة شاذة على نقطة النهاية اليسرى. (انظر شكل 24.4)

شكل 24.4



يعامل شكل المعتل الذي له نقطة شاذة على C بحيث تُعدّ $a < c < b$ مجموعة لتكاملين معتلين ذات نقاط شاذة على نقاط النهاية ؛ لأن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ويحتوي النوع الآخر من التكاملات المعتلة على نهايات تكامل لانهائية. يكون التكامل الأساس من هذا النوع على الصيغة

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

للعدد $p > 1$. ويمكن تحويل هذا إلى تكامل بنقطة شاذة يسرى على 0 باستخدام التعويض التكاملي

$$t = x^{-1}, \quad dt = -\,x^{-2}\,dx$$

لذلك

$$dx = -\,x^2\,dt = -\,t^{-2}\,dt$$

ومن ثم

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_{1/a}^0 -\frac{t^p}{t^2}\,dt = \int_0^{1/a} \frac{1}{t^{2-p}}\,dt$$

وبطريقة مماثلة، فإن تحويل المتغير $t = x^{-1}$ يغير التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)\,dx$ إلى تكامل ذي نقطة شاذة على النهاية اليسرى هي الصفر

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^{1/a} t^{-2} f\left(\frac{1}{t}\right)\,dt \tag{48.4}$$

والآن يمكن تقريب هذا التكامل باستخدام صيغة تكامل من النوع الذي نوقِش سابقًا.

مثال 2 لتقريب قيمة التكامل المعتل

$$I = \int_1^\infty x^{-3/2} \sin\frac{1}{x}\,dx$$

نستخدم تحويل المتغير $t = x^{-1}$.

بما أن $dt = -\,x^{-2}\,dx$ فسنحصل على $dx = -\,x^2\,dt = -\,\frac{1}{t^2}\,dt$

و

$$I = \int_{x=1}^{x=\infty} x^{-3/2} \sin\frac{1}{x}\,dx = \int_{t=1}^{t=0} \left(\frac{1}{t}\right)^{-3/2} \sin t \left(-\frac{1}{t^2}\,dt\right) = \int_0^1 t^{-1/2} \sin t\,dt$$

إن كثيرة حدود تايلور الرابعة $P_4(t)$ للدالّة $\sin t$ حول 0 هو $P_4(t) = t - \frac{1}{6}t^3$ ، ولذلك

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}} & 0 < t \le 1 \text{ إذا كان } \\ 0 & t = 0 \text{ إذا كان } \end{cases}$$

يكون في $C^4[0, 1]$

$$I = \int_0^1 t^{1/2} - \frac{1}{6}t^{5/2}\,dt + \int_0^1 \frac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}}\,dt$$
$$= \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{1}{21}t^{7/2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}}\,dt$$
$$= 0.61904761 + \int_0^1 \frac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}}\,dt$$

باستخدام قاعدة سمبسون المركبة و $n = 16$ للتكامل الباقي تكون النتيجة 0.0014890097.

إن هذا يعطي التقريب النهائي للتكامل وهو

$$I = 0.0014890097 + 0.61904761 = 0.62053661$$

وهو دقيق ضمن 4.0×10^{-8}. ■

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 9.4

1. استخدم قاعدة سمبسون المركبة وقيم n المعطاة لتجد تقريب التكاملات المعتلة الآتية:

أ. $\int_0^1 x^{-1/4}\sin x\,dx, \quad n = 4$ ب. $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx, \quad n = 6$

جـ. $\int_1^2 \frac{\ln x}{(x-1)^{1/5}}\,dx, \quad n = 8$ د. $\int_0^1 \frac{\cos 2x}{x^{1/3}}\,dx, \quad n = 6$

2. استخدم قاعدة سمبسون المركبة وقيم n المعطاة لتجد تقريب التكاملات المعتلة الآتية:

أ. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx, \quad n = 6$ ب. $\int_0^2 \frac{xe^x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx, \quad n = 8$

3. استخدم التحويل $t = x^{-1}$، ثم قاعدة سمبسون المركبة وقيم n المعطاة، لتقرب التكاملات المعتلة الآتية:

أ. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+9}\,dx, \quad n = 4$ ب. $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx, \quad n = 4$

جـ. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^3}\,dx, \quad n = 6$ د. $\int_1^\infty x^{-4}\sin x\,dx, \quad n = 6$

4. التكامل المعتل $\int_0^\infty f(x)\,dx$ لا يمكن تحويله إلى تكامل بنهايات محدودة عن طريق التعويض $t = 1/x$؛ لأن النهاية «صفر» تصبح لانهائية. يمكن حل الإشكال بأن نكتب أولًا $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx$ طبّق هذه الطريقة لتقرب التكاملات المعتلة الآتية ضمن 10^{-6}:

أ. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$ ب. $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$

5. افترض أن جسمًا كتلته m يتحرك إلى أعلى عموديًا ومبتدئًا من على سطح الأرض. فإذا ما أهملت أي مقاومة عدا الجاذبية فإن سرعة الهروب v تعطى بالصيغة

$$v^2 = 2gR\int_1^\infty z^{-2}\,dz \quad \text{حيث} \quad z = \frac{x}{R}$$

R نصف قطر الأرض ويساوي 3960 ميلًا، و $g = 0.00609\ \text{mi/s}^2$ هي قوة الجاذبية على سطح الأرض. قرّب سرعة الهروب v.

6. كثيرات حدود لاغور Laguerre Polynomials $\{L_0(x), L_1(x)\dots\}$ تكوّن مجموعة متعامدة على $[0, \infty)$ وتحقق

$$\int_0^\infty e^{-x} L_i(x) L_j(x)\, dx = 0$$

لكل $i \neq j$ (انظر فصل 2.8). كثيرة الحدود $L_n(x)$ لها n صفر $x_1, x_2, \dots, x_n$ في $[0, \infty)$. ليكن

$$c_{n,i} = \int_0^\infty e^{-x} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx$$

برهن أن صيغة التكامل

$$\int_0^\infty f(x) e^{-x}\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} f(x_i)$$

ذات رتبة دقة $2n - 1$. (إضاءة: اتبع الخطوات في برهان المبرهنة 7.4).

7. كثيرات حدود لاغور $L_0(x) = 1,\ L_1(x) = 1 - x,\ L_2(x) = x^2 - 4x + 2$ و $L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$.

اشتُقّت في تمرين (11) من الفصل (2.8).

وكما بُرهِن في التمرين (6)، فإن كثيرات الحدود هذه مفيدة في تقريب تكاملات على الصيغة

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx = 0$$

أ. اشتق صيغة التكامل باستخدام $n = 2$ وأصفار $L_2(x)$.

ب. اشتق صيغة التكامل باستخدام $n = 3$ وأصفار $L_3(x)$.

8. استخدم صيغ التكامل التي اشتقت في التمرين (7) لإيجاد تقريب للتكامل

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x}\, dx$$

9. استخدم صيغ التكامل التي اشتقت في تمرين (7) لإيجاد تقريب للتكامل

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

10.4 مسح الطرائق والبرامج Survey of Methods and Software

علينا أن نجتهد لاشتقاق طريقة لحل نوع واحد من التكاملات المعتلة، ولكن بمجرد توصلنا إلى حل فإن الطرائق الأخرى ستتبع بكل يسر.

لقد بحثنا في هذا الباب تقريب تكاملات الدّوال في متغير واحد أو متغيرين أو ثلاثة وتقريب مشتقات دالّة في متغير واحد حقيقي. ولقد دُرست قاعدة النقطة الوسيطية، قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون لتقديم الطرائق وتحليل الخطأ في طرائق التكامل.

قاعدة سمبسون المركبة سهلة الاستخدام وتعطي تقريبًا دقيقًا، إلا إذا كانت الدالة تردد في فترة جزئية لفترة التكامل. إن طريقة التكامل التكيفية ممكنة الاستخدام إذا كان هناك شك في السلوك الترددي للدالّة. ولجعل عدد الرؤوس أصغر ما يمكن مع المحافظة على الدقة؛ جربنا صيغة جاوس للتكامل. وقد قُدِّم تكامل رومبرج للاستفادة من مزية سهولة تطبيق قاعدة شبه المنحرف والاستكمال الخارجي.

معظم البرامج (Software) لتكامل دالة في متغير حقيقي واحد مبنية على الطريقة التكيفية أو على صيغ جاوس عالية الدقة. إن تكامل رومبرج الحذر يعد طريقة تكيّفية تحتوي على فحص؛ للتأكد من أن الدّالة المتكاملة ذات سلوك ناعم على الفترات الجزئية لفترة التكامل. فقد استخدمت هذه الطريقة بنجاح في مكتبات البرامج. وعمومًا تقرّب التكاملات المتعددة بتعميم طرائق تكيّفية جيدة إلى أبعاد أعلى. ويوصى باستخدام صيغ تكامل جاوسية لتخفيض عدد التقييمات الدالية. إن أهم الروتين (البرامج النمطية) في مكتبات IMSL و NAG مبني على QUADPACK وهو A Subroutine Package for Automatic برمجية للتكامل التلقائي Integration كتبه R.Piessens و E. de Doncker-Kapenga, C.W.Uberhuber و D.K.Kahaner ونشرته Springer-Verlag عام 1983 [PDUK] والبرامج متاحة للعامة على الموقع http://www.netlib.org.

إن مكتبة IMSL تحتوي الدّالة QDAG وهي عملية تكامل تكيّفية مبنية على قاعدة (21-Point Ganssian-Kronorde) باستخدام قاعدة (10-Point Ganssian rule) لتقدير الخطأ. إن قاعدة جاوس تستخدم العشر نقاط $x_1, \ldots, x_{10}$ والأوزان $w_1, \ldots, w_{10}$ لتعطي الصيغة تكامل $\sum_{i=1}^{10} w_i f(x_i)$ لتقريب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$. ثم تستخدم النقاط الإضافية $x_{11}, \ldots, x_{21}$. والأوزان الجديدة $v_1, \ldots, v_{21}$ في صيغة كرونرد (Kronrod) $\sum_{i=1}^{21} v_i f(x_i)$ تقارن نتائج المعادلتين لإزالة الخطأ.

إن ميزة استخدام $x_1, \ldots, x_{10}$ في كل صيغة هي الحاجة إلى تقييم f على 21 نقطة فقط. لو تستخدم قواعد جاوس ذات العشر نقاط و21 نقطة مستقلة لظهرت الحاجة إلى استخدام 31 تقييمًا داليًّا. تسمح هذه العملية بوجود نقاط شاذة على نقاط النهاية للدالّة الكاملة.

أما برامج IMSL الأخرى فهي QDAGS التي تسمح بوجود نقاط شاذة على نقاط النهاية، QDAGPC التي تسمح بوجود نقاط شاذة محددة من المستخدم، QDAGI التي تسمح بدورها بوجود فترات تكامل لانهائية و QDNG وهي عملية غير تكيّفية للدوال الممهّدة. البرنامج TWODQ يستخدم قواعد جاوس-كرونرد لتكامل دالة في متغيرين. ويوجد أيضًا برنامج QAND لاستخدام صيغة جاوس للتكامل في تكامل الدّوال ذات n من المتغيرات على n من الفترات على الصيغة $[a_i, b_i]$.

إن NAG Library تحوي البرنامج D01AJF لحساب تكامل f على الفترة $[a, b]$ باستخدام طريقة تكيّفية مبنية على طريقة جاوس للتكامل باستخدام قواعد Gauss 10-Point و KrOnrod 21-Points. أما البرنامج D01AHF فيستخدم لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ باستخدام عائلة من نوع صيغ جاوس مبنية على رؤوس عددها 1، 3، 5، 7، 15، 31، 63، 127، 255. إن هذه القواعد المتداخلة وذات الدقة العالية من إنشاء بترسون [Pat] تستخدم بطريقة تكيّفية. إن البرنامج D01DGF خاص للتكاملات المتعددة، ويقرّب التكامل إذا أعطيت بيانات نقطيّة (قيمًا) بدلًا من صيغة الدالّة. إن NAG يحتوي على كثير من البرامج الأخرى لتقريب التكاملات.

إن الأمر الداليّ في مابل Maple

```
>int(f,x=a..b);
```

يحسب التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$.

إن الطريقة العددية تســتخدم برامج لمعاملة النقاط الشــاذة، ثم تستخدم صيغة كينشو–كيرتس للتكامل Clenshaw–Curtis والموصوفة في [CC]. وإذا فشــل هذا بســبب وجود نقاط شــاذة في الفترة أو بالقرب منها، تطبق صيغة تكيّفية أسيّة مضاعفة double–exponential quadrature .

يمكن استخدام صيغة نيوتن– كوتس التكيفية عن طريق تحديد الخيار NCrule في الأمر الدالّي في Maple.

```
>int(f,x=a..b,digits,_NCrule);
```

تحاول الطريقة التوصل إلى خطأ نسـبي مســموح مقداره $0.5\times 10^{(1-\text{Digits})}$، حيث Digits هو متغير في Maple في الحســاب العددي. إن قيمة Digits المخزونة في البرنامج هي 10، ولكن يمكن تغييرها إلى أي عدد صحيح موجب n عن طريق الأمر ;Digits:=n.

إن الأمر QUAD في MATLAB يقرّب التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$ باســتخدام قاعدة سمبسون التكيفية.

والأمر QUAD8 يقرّب التكامل المحدود باســتخدام قاعدة نيوتن– كوتس التكيفية ذات الثماني واجهات (eight-panel Newton-Cotes rule).

وعلى الرغم من أن الاشــتقاق العددي غير مســتقر، إلا أن هناك حاجة إلى تقريب المشــتقة لتستخدم في الصيغ التفاضلية.

إن مكتبة NAG تحتوي على برامج فرعية D04AAF للاشــتقاق العددي لدالّة بمتغير واحد، مع إمكانية الاشتقاق للمشتقة 14.

إن الدّالــة DERIN في IMSL تســتخدم تغييرًا تكيّفيًا في حجــم الخطوة في الفروق المحدودة لتقريب المشتقة الأولى والثانية والثالثة للدالّة f عند النقطة x ضمن حد خطأ مسموح به.

تحتوي IMSL أيضًا برمجية فرعية QDDER لحســاب المشــتقات لدالّة معرّفة على مجموعة من النقاط باستخدام الاستيفاء الداخلي التربيعي.

كلتا البرمجيتين تسمحان باشتقاق الشريحة Spline الاستكمالي التكعيبية المبنية بالبرامج الفرعية المذكورة في (4.3)، كما تسمح بتكامله.

للمزيــد عــن التكامل العددي، ننصح بالكتب للمؤلفــين Engles [E] و Davis and Rabinowitz [DR].

ولمعلومات إضافية عن طريقة جاوس؛ انظر Stroud and Secrest [StS]

يوجد كتب عن التكامل المتعدد، منها كتاب Stroud [Stro]

والكتاب الحديث لمؤلفيه Sloan and Joe [SJ].

الباب 5

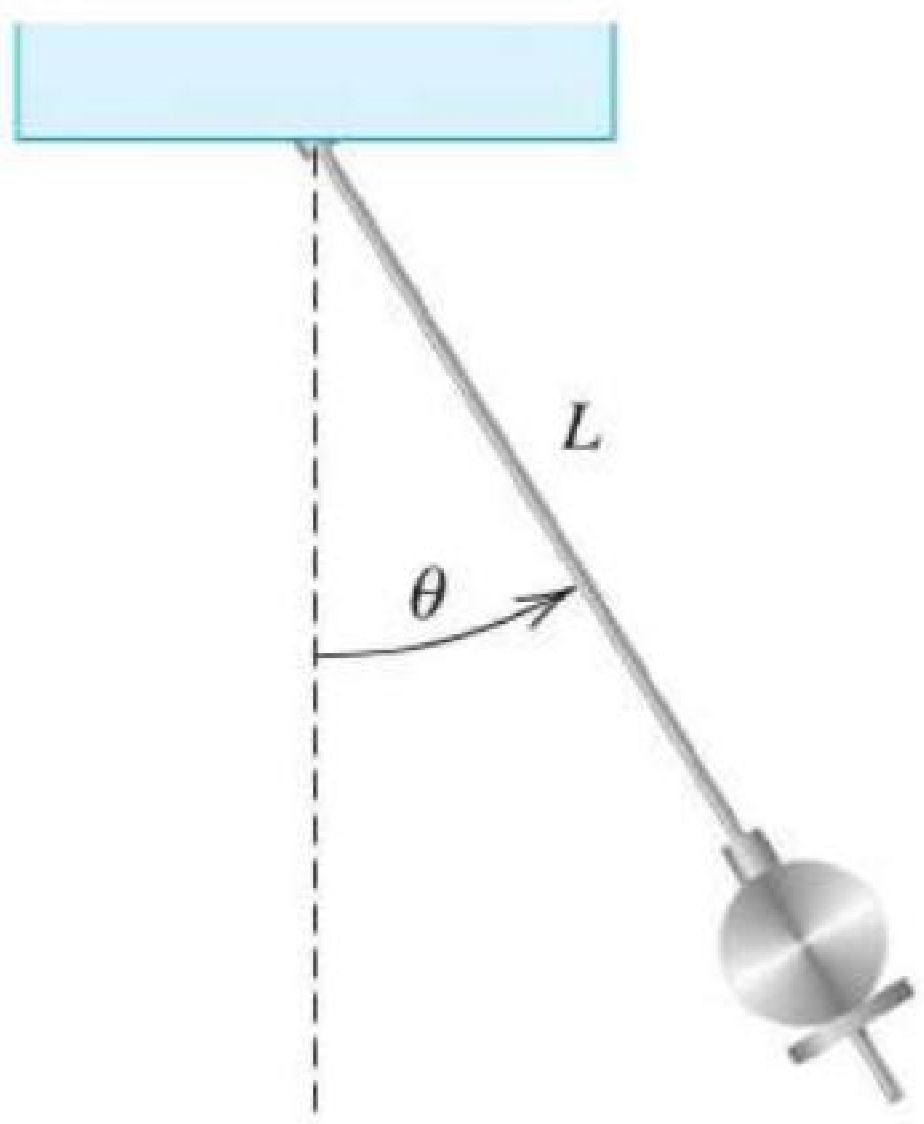
مسائل القيمة الابتدائية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية

Initial-Value Problems For Ordinary Differential Equations

مقدمة

يمكن توضيح فكرة الرقاص المتأرجح وفق شروط تبسيط معينة من خلال المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$



حيث L طول الرقاص، $g \approx 32.17\ \text{ft/s}^2$ ثابت الجاذبية الأرضية، θ هي الزاوية التي يصنعها الرقاص مع الخط العمودي. أيضًا إذا حددْنا موقع الرقاص حين بدء الحركة $\theta(t_0) = \theta_0$، وسرعته عند تلك النقطة $\theta'(t_0) = \theta'_0$، يكون لدينا ما نسميه "مسألة القيمة الابتدائية *initial-value problem*".

وعند القيم الصغيرة لـ θ، يمكن استخدام التقريب $\theta \approx \sin\theta$ لتبسيط هذه المسألة وتحويلها إلى مسألة القيمة الابتدائية الخطية

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta'_0$$

هذه المسألة يمكن حلها باستخدام أسلوب المعادلة التفاضلية الاعتيادي. ومع قيم أكبر لـ θ، يجب استخدام طرائق التقريب. قد تناولنا مسألة من هذا النوع في التمرين (8) من الفصل (9.5). إن أي كتاب في المعادلات التفاضلية يعطي تفصيلًا لطرائق خاصة بإيجاد حلول لمسائل القيمة

الابتدائية من الرتبة الأولى. في المجال التطبيقي على أي حال، قليل من المسائل المستمدة من دراسة الظواهر الفيزيائية يمكن حلها بدقة.

ويتناول الجزء الأول من هذا الفصل تقريب الحل $y(t)$ للمسألة ذات الصيغة

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{لكل} \quad a \le t \le b$$

على أن الشرط الابتدائي

$$y(a) = \alpha$$

وسنتعامل فيما بعد ضمن هذه الوحدة مع توسيع هذه الطرائق لتشمل نظامًا للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى على الصورة

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

لـ $a \le t \le b$، على أن الشروط الابتدائية

$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y_n(a) = \alpha_n$$

كذلك نختبر علاقة نظام من هذا النوع مع مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة n وفق الصيغة

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

لـ $a \le t \le b$، على أن الشروط الابتدائية

$$y(a) = \alpha_1, \quad y'(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y^{n-1}(a) = \alpha_n$$

1.5 المبرهنة الابتدائية لمسائل القيمة الابتدائية Elementary Theory of Initial-Value Problem

تُستخدم المعادلات التفاضلية لنمذجة مسائل في العلوم والهندسة تتضمن استبدال متغير ما بالنسبة إلى الآخر. وتتطلب معظم هذه المسائل حلًا لمسألة القيمة الابتدائية، أي حلًا لمعادلة تفاضلية تحقق شرطًا ابتدائيًا محددًا.

في أغلب الأمور الحياتية الحقيقية، يكون من الصعب إيجاد حل دقيق للمعادلة التفاضلية التي تنمذج المسألة، ولهذا نلجأ إلى أحد النهجين لتقريب الحل؛ النهج الأول هو تبسيط المعادلة التفاضلية لواحدة يمكن حلها بدقة، ومن ثم استخدام حل المعادلة المبسطة لتقريب حل المعادلة الأصلية. أما النهج الآخر الذي سنختبره في هذه الوحدة فيستخدم طرائق لتقريب حل المسألة الأصلية. وهذا النهج هو الذي غالبًا ما يؤخذ؛ لأن طرائق التقريب تعطي نتائج أدق

ومعلومات عن الخطأ أكثر واقعية.

الطرائق التي نتناولها ضمن هذه الوحدة لا تعطي تقريبات مستمرة لحل مسألة القيمة الابتدائية. وبدلًا من ذلك، فإن التقريبات توجد عند نقاط معينة محددة، وغالبًا ما تكون متساوية التباعد. تستخدم بعض طرائق الاستكمال الداخلي كطريقة هرمايت إذا كان هناك حاجة إلى قيم وسطية.

نحتاج إلى بعض التعريفات والنتائج من مبرهنة المعادلات التفاضلية الاعتيادية قبل تناول طرائق لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية. إن مسائل القيمة الابتدائية تظهر من خلال رصد ظاهرة فيزيائية مقاربة لحالة حقيقية عمومًا، لذلك نحتاج إلى معرفة تغييرات صغيرة في مضمون المسألة، مما يؤثر قليلًا في الحل. هذا مهم أيضًا بسبب المدخل للخطأ المقرب عندما تُستخدم الطرائق العددية.

تعريف 1.5 يقال للدالة $f(t, y)$ إنها تحقق شرط لبشتز **Lipschitz condition** في المتغير y على مجموعة أنها تحقق $D \subset \mathbb{R}^2$ إذا وجد ثابت $L > 0$ يحقق

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2,)| \le L|y_1 - y_2|$$

ما دام $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. يسمى الثابت L شرط لبشتز **Lipschitz condition** للدالة f. ■

مثال 1 إذا كان $D = \{(t, y) \mid 1 \le t \le 2, -3 \le y \le 4\}$ و $f(t, y) = t|y|$ فإن لكل زوج من النقاط (t, y_1) و (t, y_2) في D

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t|y_1| - t|y_2|| = |t|\,||y_1| - |y_2|| \le 2|y_1 - y_2|$$

وبذلك تحقق f شرط لبشتز على D في المتغير y مع ثابت لبشتز 2. إن أصغر قيمة محتملة لثابت لبشتز في هذه المسألة هو $L = 2$؛ لأنه على سبيل المثال

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0|$$ ■

تعريف 2.5 يقال للمجموعة $D \subset \mathbb{R}^2$ بأنها محدبة **convex** متى انتمت كل من (t_1, y_1) و (t_2, y_2) إلى D، وأن λ في $[0,1]$ تكون النقطة $((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ منتمية أيضًا إلى D. ■

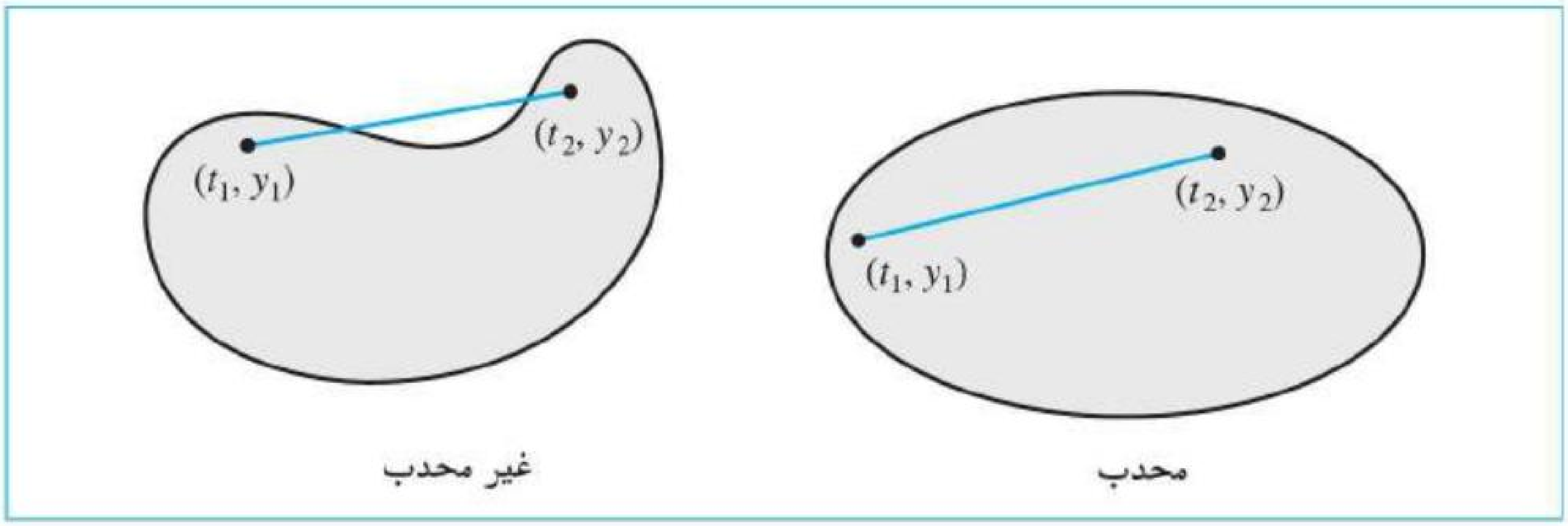
في المصطلحات الهندسية ينص التعريف (2.5) على أن المجموعة محدبة على أنه متى كانت نقطتان تنتميان إلى المجموعة فإن قطعة الخط المستقيم كاملة ما بين النقطتين وتنتمي أيضًا إلى المجموعة. (انظر شكل 1.5) تكون المجموعات التي نتناولها في هذا الفصل عمومًا بالصيغة $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$ للثابتين a و b. ومن السهل التحقق (انظر التمرين 7) من أن هذه المجموعات محدبة.

مبرهنة 3.5 افترض أن $f(t, y)$ معرف على مجموعة محدبة $D \subset \mathbb{R}^2$. إذا وجد $L > 0$ يحقق

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \le L \quad \text{لكل} \quad (t, y) \in D \qquad (1.5)$$

فإن f يحقق شرط لبشتز على D في المتغير y مع ثابت لبشتز L. ■

شكل 1.5



عمل رودلف لبشير (1903 – 1832) Rudolf Lipschitz في فروع الرياضيات المختلفة، بصفتها مبرهنة الكرّاد، سلسلة فورير، معادلات تفاضلية، الميكانيكا التحليلية، والمبرهنة الكامنة وهو معروف جدًا بتعميمه عمل أوغستن– لويس كوشي (1857–1789) Augustin–Louis Cauchy وجوسب بينو (1932–1858) Giuseppe Peano.

إن برهان مبرهنة (3.5) يناقش في التمرين (6)، وهو مشابه لبرهان التمهيدية المناظرة لها لدوال متغير واحد نوقشت ضمن التمرين (25) من الفصل (1.1).

وحسبما تبين لنا المبرهنة التالية، فغالبًا ما يتركز الاهتمام على تحديد ما إذا كان الدالة المعني في مسألة القيمة الابتدائية يحقق شرط لبشتز في متغيره الثاني، ومن ثم فإن الشرط (1.5) عمومًا أكثر سهولة للتطبيق من التعريف. وعلى أي حال علينا ملاحظة أن المبرهنة (3.5) تعطي فقط شروطًا وافية لتحقق شرط لبشتز. الدالة في مثال (1) مثلًا تحقق شرط لبشتز، لكن المشتقة الجزئية بالنسبة إلى y لا وجود لها عندما يكون $y = 0$.

المبرهنة التالية هي صورة جوهرية لحالة وجود وحدانية المبرهنة للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. وعلى الرغم من أن المبرهنة يمكن برهنتها مع بعض التقليص للفرضية، إلا أن صيغة المبرهنة هذه تفي بأغراضنا.

(يمكن إيجاد برهان المبرهنة بهذه الصيغة تقريبًا في [BiR,pp. 142–155]).

مبرهنة 4.5 افترض أن $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$، وأن $f(t, y)$ متصل على D. إذا كانت f تحقق شرط لبشتز على D في المتغير y، فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

لها حل وحيد $y(t)$ حيث $a \le t \le b$. ■

مثال 2 افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 1 + t\sin(ty), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$$

بالإبقاء على t ثابتًا، وبتطبيق مبرهنة القيمة الوسيطية للدالة

$$f(t, y) = 1 + t\sin(ty)$$

نجد أنه عندما $y_1 < y_2$، فإن العدد ξ ضمن (y_1, y_2) يظهر مع

$$\frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t, \xi) = t^2\cos(\xi t)$$

ومن ثم

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = |y_2 - y_1||t^2\cos(\xi t)| \le 4|y_2 - y_1|$$

وتحقق f شرط لبشتز في المتغير y مع ثابت لبشتز $L = 4$. وبالإضافة إلى ذلك، حيث إن $f(t, y)$ متصل عندما $0 \le t \le 2$ و $-\infty < y < \infty$، فإن المبرهنة (4.5) توحي بوجود حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية هذه. ■

فإذا درست مقررًا في المعادلات التفاضلية، فقد تحاول إيجاد الحل الصحيح لهذه المسألة.
والآن وبعد أن عالجنا –إلى حد ما– التساؤل: "متى يكون لمسائل القيمة الابتدائية حلول وحيدة؟" يمكننا الانتقال إلى تساؤل آخر طرِح مبكرًا في هذا الفصل وهو
" كيف يمكننا تحديد ما إذا كانت لمسألة معينة سمة كون تغييرات صغيرة (أو تشويش) في مضمونها يؤثر قليلًا في الحل؟"
وكالمعتاد، فإننا نحتاج أولًا إلى إعطاء تعريف عملي لترسيخ هذا المفهوم.

تعريف 5.5 يقال لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{2.5}$$

إنها مسألة عرض جيد **well-posed problem** إذا تحقق ما يلي:

- يوجد حل وحيد $y(t)$ للمسألة.
- يوجد ثابتان $\varepsilon_0 > 0$ و $k > 0$ بحيث إن لكل ε و $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ ، ما دامت كانت $\delta(t)$ متصلة و $|\delta(t)| < \varepsilon$ لكل t في $[a, b]$ ، ومتى كانت $|\delta_0| < \varepsilon$ كذلك فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \le t \le b, \quad z(a) = \alpha + \delta_0 \tag{3.5}$$

لها حل وحيد $z(t)$ يحقق

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon \quad \text{لكل } t \text{ في } [a, b]$$ ■

إن المسألة المعطاة بالمعادلة (3.5) تسمى المسألة المضطربة **perturbed problem** المرتبطة بالمسألة الأصلية (2.5). إنها تفترض إمكانية حدوث خطأ $\delta(t)$ المبين ضمن التعبير حول المعادلة التفاضلية، وبالإضافة إلى خطأ δ_0، فقد عرِض ضمن الشرط الابتدائي.
تؤخذ الطرائق العددية دائمًا في الحسبان عند حل المسألة المضطربة؛ لأن أي خطأ تدوير يتم تناوله في التعبير يربك المسألة الأصلية، وما لم تُعرَض المسألة الأصلية جيدًا، فثمة مبرر ضعيف لتوقع كون الحل العددي لمسألة مضطربة يقارب الحل للمسألة الأصلية بدقة.
وتحدد المبرهنة التالية شروطًا لضمان عرض واضح لمسألة القيمة الابتدائية. ويمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في [BiR, pp. 142–147].

مبرهنة 6.5 افترض أن $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$. إذا كانت f متصلة وتحقق شرط لبشتز في المتغير y على المجموعة D فإن مسألة القيمة الابتدائية.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

جيدة العرض. ■

مثال 3 ليكن $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$، وافترض مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5 \qquad (4.5)$$

وبما أن

$$\left|\frac{\partial(y - t^2 + 1)}{\partial y}\right| = |1| = 1$$

فإن المبرهنة (3.5) تؤدي إلى أن $f(t, y) = y - t^2 + 1$ يحقق شرط لبشتز في المتغير y على المجموعة D مع ثابت لبشتز 1. ولأن f متصلة على D فإن المبرهنة (6.5) تؤدي إلى أن مسألة القيمة الابتدائية جيدة العرض.

وللتحقق من ذلك مباشرة؛ افترض المسألة المضطربة

$$\frac{dz}{dt} = z - t^2 + 1 + \delta, \quad 0 \le t \le 2, \quad z(0) = 0.5 + \delta_0 \qquad (5.5)$$

حيث إن δ و δ_0 ثابتان. وحل المعادلة (4.5) والمعادلة (5.5) هو على التوالي

$y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ و $z(t) = (t + 1)^2 + (\delta + \delta_0 - 0.5)e^t - \delta$

افترض أن ε أي عدد موجب. فإذا كان $|\delta| < \varepsilon$ و $|\delta_0| < \varepsilon$ فإن

$$|y(t) - z(t)| = |(\delta + \delta_0)e^t - \delta| \le |\delta + \delta_0|e^2 + |\delta| \le (2e^2 + 1)\varepsilon$$

لكل t. ولذلك فالمسألة (4.5) تكون جيدة العرض مع $k = 2e^2 + 1$ ولكل $\varepsilon > 0$. ■

ويمكن استخدام Maple لحل العديد من مسائل القيمة الابتدائية. افترض المسألة

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

مابل Maple يحتفظ بالحرف D للتعبير عن المشتقة.

ولتعريف المعادلة التفاضلية؛ أدخل

```
>deq:=D(y)(t)=y(t)-t*t+1
```

والشرط الابتدائي

```
>init:=y(0)=0.5
```

وقد اختير المسميان deg و init من قبل المستخدم. والأمر لحل مسائل القيمة الابتدائية هو dsolve ولذلك

```
>deqsol:=dsolve({deq,init},y(t));
```

وتكون الاستجابة

$$\text{deqsol} := y(t) = 1 + t^2 + 2t - \tfrac{1}{2}e^t$$

ولغرض استخدام الحل لإيجاد قيمة محددة مثل $y\,(1.5)$؛ ندخل

```
>q:=rhs(deqsol);  evalf(subs(t=1.5,q))
```

مع التمهيدية 4.009155465.

وتستخدم الدالة **rhs** (الجانب الأيمن) لتخصيص حل مسألة القيمة الابتدائية للدالة q التي سنقيمها عند $t = 1.5$. ويمكن أن تفشل الدالة **dsolve** إذا ما تعذَّر إيجاد حل واضح لمسألة القيمة الابتدائية. على سبيل المثال، في مسألة القيمة الابتدائية المعطاة في مثال (1)، فإن الأمر الابتدائية

```
>deqsol2:=dsolve({D(y)(t)=1+t*sin(t*y(t)),y(0)=0},y(t));
```

لا ينجح لتعذر إيجاد حل واضح. في هذه الحالة يجب استخدام طريقة عددية.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 1.5

1. استخدم المبرهنة (4.5) لإثبات أن أيًّا من مسائل القيمة الابتدائية الآتية لها حل وحيد، أوجد الحل:

أ . $y' = y\cos t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

ب. $y' = \dfrac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$

ج. $y' = -\dfrac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \sqrt{2}e$

د. $y' = \dfrac{4t^3y}{1+t^4}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

2. استخدم المبرهنة (4.5) لإثبات أن أيًّا من مسائل القيمة الابتدائية الآتية لها حل وحيد، أوجد الحل:

أ. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

ب. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty), \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$

ج. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 2$

د. $y' = \dfrac{ty+y}{ty+t}, \quad 2 \le t \le 4, \quad y(2) = 4$

3. لكل اختيار إلى $f(t, y)$ المعطاة للأقسام من (أ) – (د):

(أ) هل يحقق f شرط لبشتز على $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$؟

(ب) هل يمكن استخدام المبرهنة (6.5) لإثبات أن مسألة القيمة الابتدائية

$y' = f(t, y)$ ، $0 \le t \le 1$ ، $y(0) = 1$

جيدة العرض؟

أ . $f(t, y) = t^2y + 1$

ب. $f(t, y) = ty$

ج. $f(t, y) = 1 - y$

د. $f(t, y) = -ty + \dfrac{4t}{y}$

4. لكل اختيار إلى $f(t, y)$ المعطاة للأقسام من (أ) – (د):

أ. هل يحقق f شرط لبشتز على $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$؟

ب. هل يمكن استخدام المبرهنة (6.5) لإثبات أن مسألة القيمة الابتدائية

$y' = f(t, y)$ ، $0 \le t \le 1$ ، $y(0) = 1$

جيدة العرض؟

أ. $f(t, y) = e^{t-y}$ ب. $f(t, y) = \frac{1+y}{1+t}$ ج. $f(t, y) = \cos(yt)$ د. $f(t, y) = \frac{y^2}{1+t}$

5.لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية، أثبت أن المعادلة المعطاة تتضمن حلًّا. قرّب إلى $y(2)$ مستخدمًا طريقة نيوتن.

أ. $y' = -\frac{y^3+y}{(3y^2+1)t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1; \quad y^3t + yt = 2$

ب. $y' = -\frac{y\cos t + 2te^y}{\sin t + t^2e^y + 2}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0; \quad y\sin t + t^2e^y + 2y = 1$

6.برهن المبرهنة (3.5) من خلال تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية لـ $f(t, y)$، مبقيًا t ثابتًا.

7.في الثابتين a و b، أثبت أن المجموعة $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$ محدبة.

8.افترض الاضطراب $\delta(t)$ نسبيًّا إلى t، بمعنى أن $\delta(t) = \delta t$ ثابت ما δ. أثبت مباشرةً أن مسائل القيمة الابتدائية الآتية جيدة العرض:

أ. $y' = 1 - y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$

ب. $y' = t + y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -1$

ج. $y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$

د. $y' = -\frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \sqrt{2}e$

9.طريقة بيكارد لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y) \quad a \le t \le b \quad y(a) = \alpha$$

يكون وفقًا للشرح الآتي: ليكن $y_0(t) = \alpha$ لكل t ضمن $[a, b]$.عرف متتالية الدّوال $\{y_k(t)\}$

$$y_k(t) = \alpha + \int_a^t f(\tau, y_{k-1}(\tau))\, d\tau \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

أ.اعمل التكامل $y' = f(t, y(t))$، واستخدم الشرط الابتدائي لاشتقاق طريقة بيكارد.

ب.اعمل التوليد $y_0(t), y_1(t), y_2(t)$ و $y_3(t)$ لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y + t + 1 \quad 0 \le t \le 1 \quad y(0) = 1$$

ج.قارن التمهيدية في الفقرة (ب) مع سلسلة ماكلورين للحل الحقيقي $y(t) = t + e^{-t}$.

2.5 طريقة أويلر Euler's Method

على الرغم من قلة استخدام طريقة أويلر، إلا أنه لبساطة اشتقاقها يمكن توظيفها في توضيح الأساليب المستخدمة في إنشاء بعض الأساليب الأكثر تعقيدًا، دون اللجوء إلى التعقيدات الجبرية المرافقة لعملية الإنشاء هذه.

وتهدف طريقة أويلر إلى إيجاد تقريب لمسألة القيمة الابتدائية ذات العرض الجيد

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \qquad (6.5)$$

في الحقيقة، إن تقريبًا متصلًا للحل $y(t)$ لن يظهر؛ وبدلًا من ذلك فإن تقريبات إلى y ستتولد عند قيم مختلفة تدعى نقاط ميش (نقاطًا متناغمة) mesh points في الفترة $[a, b]$. وبمجرد إيجاد الحل التقريبي عند النقاط، فإنه يمكن إيجاد الحل التقريبي عند النقاط الأخرى في الفترة من خلال الاستكمال الداخلي.

في البداية نشترط توزع النقاط المتناغمة بالتساوي في الفترة $[a, b]$، وهذا الشرط مضمون من خلال اختيار عدد صحيح موجب N واختيار النقاط المتناغمة mesh points لكلٍّ من

$$t_i = a + ih \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N$$

المسافة الموحدة ما بين النقاط $h = (b - a)/N = t_{i+1} - t_i$ تسمى سعة الخطوة step size.

يُعد ليونارد أويلر (1707 – 1783) Leonhard Euler من أكثر المبدعين الرياضيين. وكان أول من عرض للمجتمع الرياضي استخدام طرق الفرق الابتدائي لتقريب حل المعادلات التفاضلية.

سنستخدم مبرهنة تايلور لاشتقاق طريقة أويلر. افترض أن $y(t)$ الحل الوحيد للمعادلة (6.5) له مشتقتان متصلتان على $[a, b]$، من ثم فإنه لكلٍّ من $i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i)$$

لعددٍ ما ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}). وحيث $h = t_{i+1} - t_i$ يكون لدينا

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

ولأن $y(t)$ يحقق المعادلة التفاضلية (6.5)؛ فإن

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \tag{7.5}$$

طريقة أويلر تبني $w_i \approx y(t_i)$ لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, N$ ومن خلال حذف الجزء المتبقي فإن طريقة أويلر تكون

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{8.5}$$

تسمى المعادلة (8.5) بمعادلة الفرق difference equation وهي مرافقة لطريقة أويلر. كذلك وكما سنرى مؤخرًا في هذا الفصل، فإن المبرهنة وحل معادلات الفرق توازي -بجوانب عدة- المبرهنة وحل المعادلات التفاضلية. تنفذ الخوارزمية (5.1) طريقة أويلر.

ALGORITHM

الخوارزمية 1.5

طريقة أويلر Euler's Method

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N + 1)$ من الكرّاد متساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط نهاية a و b، عدد صحيح N، شرط ابتدائي α.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N + 1)$ من القيم لـ t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$



	$t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w).
2	لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, N$ طبق الخطوتين 3 و4.
3	ضع $w = w + hf(t, w)$ (احسب w_i). $t = a + ih$ (احسب t_i).
4	المخرجات (t, w).
5	توقف.

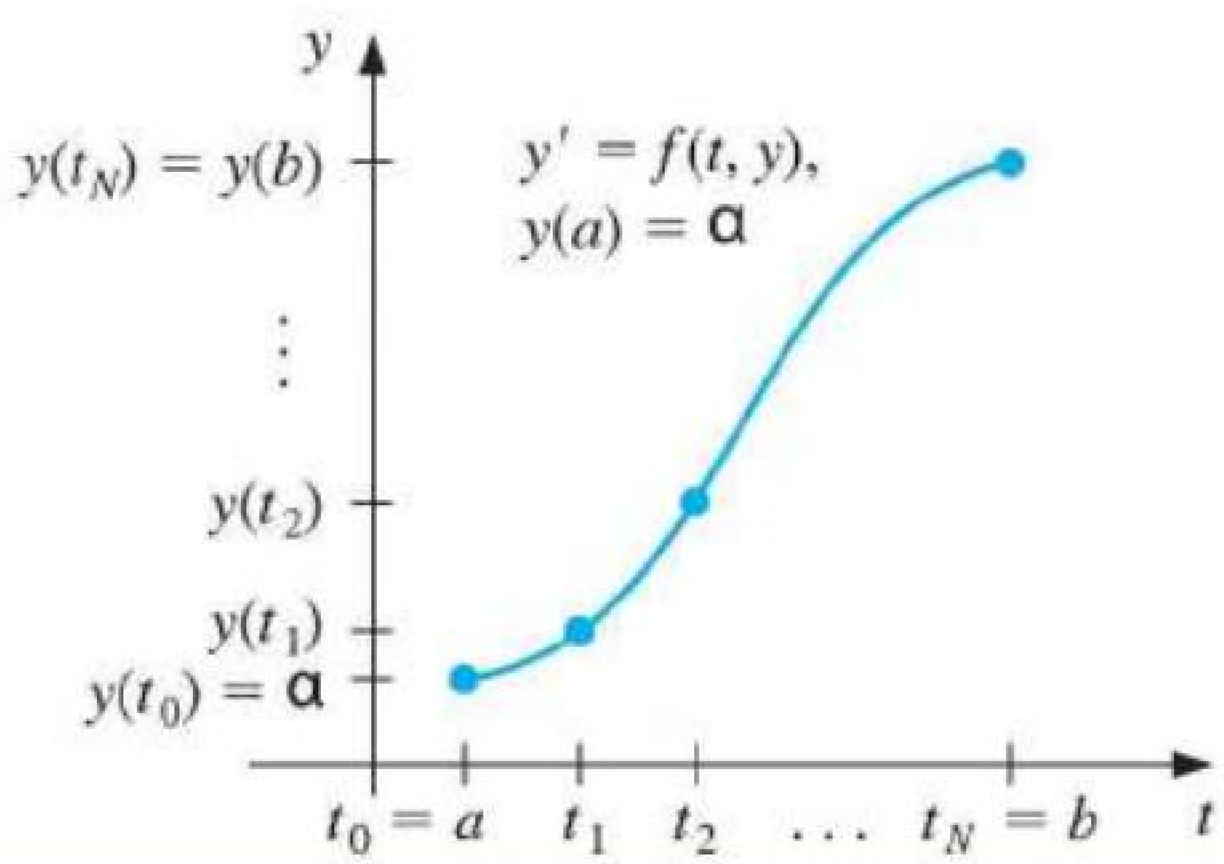
■

ولتفسير طريقة أويلر هندسيًّا؛ انظر أنه عندما يكون التقريب w_i قريبًا من $y(t_i)$، فإن افتُرِض كون المسألة جيدة العرض يؤدي إلى

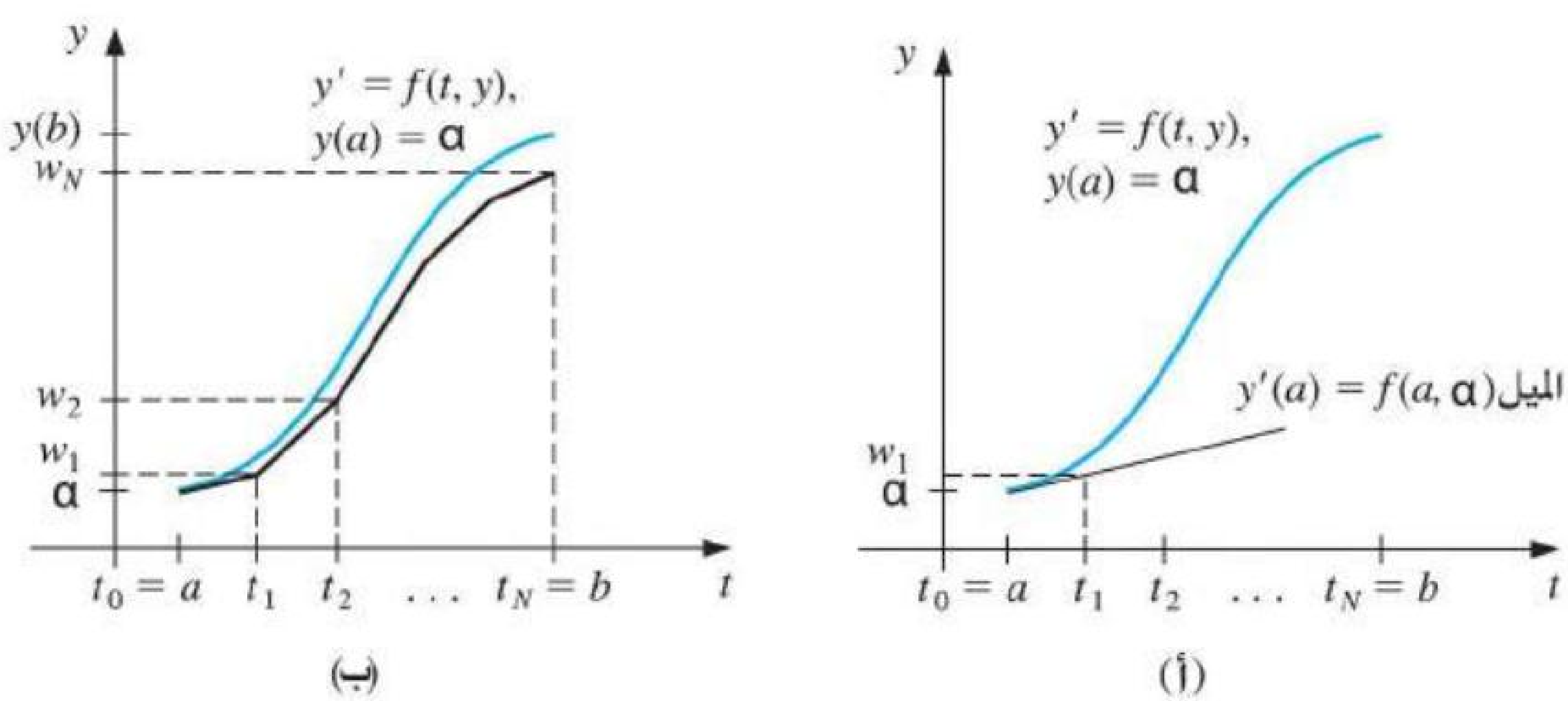
$$f(t_i, w_i) \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

انظر الرسم البياني للدالة $y(t_i)$ الذي يبرز في شكل (2.5). وإحدى خطوات طريقة أويلر تظهر في شكل (أ) (3.5)، وتظهر سلسلة من الخطوات في شكل (ب) (3.5).

شكل 2.5



شكل 3.5



مثال 1 افترض استخدام طريقة أويلر لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1 \quad ,0 \le t \le 2 \quad ,y(0) = 0.5$$

مع $N = 10$. لذا فإن $h = 0.2, t_i = 0.2i, w_0 = 0.5$

و $w_{i+1} = w_i + h(w_i - t_i^2 + 1) = w_i + 0.2[w_i - 0.04i^2 + 1] = 1.2w_i - 0.008i^2 + 0.2$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, 9$. الحل الصحيح هو $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$. يبين جدول (1.5) المقارنة ما بين القيم المقربة t_i والقيم الحقيقية. ■

جدول 1.5

t_i	w_i	$y_i = y(t_i)$	$\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

انظر أن الخطأ يزداد تدريجيًّا كلما ازداد t. وإن نمو هذا الخطأ تحت السيطرة هو تمهيدية ثبات طريقة أويلر، التي تؤدي إلى أنه من المتوقع نمو الخطأ على نحو ليس أسوأ من المنحنى الخطي.

وعلى الرغم من أن طريقة أويلر ليست دقيقة كفاية للتحذير من استخدامها عند التطبيق، إلا أنها مبدئيًّا وافية لتحليل الخطأ الناتج من تطبيقها. وسنتطرق إلى تحليل الخطأ لطرائق أدق في فصول آتية تتبع نفس المنحنى، لكنها أكثر تعقيدًا.

لاشتقاق حد للخطأ لطريقة أويلر؛ نحتاج إلى نتيجتين حسابيتين.

تمهيدية 7.5 لكل $x \ge -1$ ولكل عدد موجب m ، لدينا $0 \le (1+x)^m \le e^{mx}$. ■

البرهان بتطبيق مبرهنة تايلور مع $f(x) = e^x, x_0 = 0$، و $n = 1$ نحصل على

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 e^\xi$$

حيث ξ ما بين x وصفر. لذا

$$0 \le 1 + x \le 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 e^\xi = e^x$$

ولكون $1 + x \ge 0$؛ فإن

$$0 \le (1+x)^m \le (e^x)^m = e^{mx}$$ ■ ■ ■

تمهيدية 8.5 إذا كان s و t عددين حقيقيين، وكانت $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ متتالية تحقق $a_0 \geq -t/s$، وكان

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \tag{9.5}$$

فإن

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

■

البرهان عند عدد صحيح محدد i، تؤدي المتباينة (9.5) إلى

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1+s)a_i + t \\ &\leq (1+s)[(1+s)a_{i-1} + t] + t \\ &\leq (1+s)\{(1+s)[(1+s)a_{i-2} + t] + t\} + t \\ &\vdots \\ &\leq (1+s)^{i+1}a_0 + [1 + (1+s) + (1+s)^2 + \cdots + (1+s)^i]t \end{aligned}$$

ولكن

$$1 + (1+s) + (1+s)^2 + \cdots + (1+s)^i = \sum_{j=0}^{i}(1+s)^j$$

عبارة عن سلسلة هندسية تتناسب مع $(1+s)$ ومجموعها

$$\frac{1-(1+s)^{i+1}}{1-(1+s)} = \frac{1}{s}[(1+s)^{i+1} - 1]$$

لذا يكون

$$a_{i+1} \leq (1+s)^{i+1}a_0 + \frac{(1+s)^{i+1} - 1}{s}t = (1+s)^{i+1}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

وباستخدام التمهيدية (7.5) مع $x = s$ و $m = i + 1$ نحصل على

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

■ ■ ■

مبرهنة 9.5 افترض f متصلة وتحقق شرط لبشتز بثابت L على

$$D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

وافترض وجود ثابت M يحقق

$$|y''(t)| \leq M \quad \text{لكل} \quad t \in [a, b]$$

ولنفترض أن $y(t)$ الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

وأن $w_0, w_1, \ldots, w_N$ عبارة عن تقريبات مولدة بطريقة أويلر لعدد صحيح موجب N. عندئذ، لكل $i = 0, 1, 2, \ldots, N$، لدينا

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right] \qquad (10.5)$$

■

البرهان عندما $i = 0$ فإن النتائج صحيحة تمامًا، لأن $y(t_0) = w_0 = \alpha$.

من المعادلة (7.5)، لدينا لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N - 1$،

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

ومن المعادلات في (8.5)، لدينا

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

وبناءً على ذلك، يكون لدينا باستخدام التعبير $y_i = y(t_i)$ و $y_{i+1} = y(t_{i+1})$

$$y_{i+1} - w_{i+1} = y_i - w_i + h[f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

و

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le |y_i - w_i| + h|f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)| + \frac{h^2}{2} |y''(\xi_i)|$$

وحيث يحقق f شرط لبسشتز في المتغير الثاني مع الثابت L وإن $|y''(t)| \le M$، يكون لدينا

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le (1 + hL)|y_i - w_i| + \frac{h^2 M}{2}$$

وبالرجوع إلى التمهيدية (8.5) وجعل $s = hL, t = h^2M/2$ و $a_j = |y_j - w_j|$، لكلٍّ من $j = 0, 1, \ldots, N$، نرى أن

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le e^{(i+1)hL}\left(|y_0 - w_0| + \frac{h^2M}{2hL}\right) - \frac{h^2M}{2hL}$$

ولأن $|y_0 - w_0| = 0$ و $(i + 1)h = t_{i+1} - t_0 = t_{i+1} - a$، يكون لدينا

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le \frac{hM}{2L}\left(e^{(t_{i+1} - a)L} - 1\right)$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N - 1$. ■ ■ ■

وتكمن نقطة الضعف في المبرهنة (9.5) في المتطلب المتضمن وجوب معرفة الحد للمشتقة الثانية للحل. وعلى الرغم من أن هذا الشرط يمنعنا من إيجاد حد خطأ منطقي، إلا أنه يجب ملاحظة إذا كان كل من $\partial f/\partial t$ و $\partial f/\partial y$ موجودًا، وعندئذ فإن قاعدة السلسلة للتفاضل الجزئي تؤدي إلى

$$y''(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))$$

لذلك فمن المحتمل في بعض الأحيان إيجاد حد خطأ لـِ $y''(t)$ دون معرفة صريحة لـِ $y(t)$.

ورجوعًا إلى مسألة القيمة الابتدائية

مثال 2

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

نرى من مثال (1) أنه ما دام $f(t, y) = y - t^2 + 1$، فلدينا $\partial f(t, y)/\partial y = 1$ لكل قيم y لذا $L = 1$. الحل الصحيح لهذه المسألة هو $y(t) = (t+1)^2 - \frac{1}{2}e^t$ لذلك $y''(t) = 2 - 0.5e^t$ و $|y''(t)| \le 0.5e^2 - 2,$ لكل $t \in [0, 2]$.

واستخدام اللامساواة في حد الخطأ لطريقة أويلر مع $h = 0.2, L = 1$ و $M = 0.5e^2 - 2$ يعطينا

$$|y_i - w_i| \le 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{t_i} - 1)$$

يعطي جدول (2.5) الخطأ الحقيقي المستخرج في مثال (1) معًا مع حد الخطأ هذا. انظر أنه حتى مع استخدام الحد الصحيح للمشتقة الثانية للحل، يتضح أن حد الخطأ أكبر من الخطأ الحقيقي. ■

جدول 2.5

t_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
الخطأ الفعلي	0.02930	0.06209	0.09854	0.13875	0.18268	0.23013	0.28063	0.33336	0.38702	0.43969
حد الخطأ	0.03752	0.08334	0.13931	0.20767	0.29117	0.39315	0.51771	0.66985	0.85568	1.08264

إن أهمية صيغة حد الخطأ المعطاة في المبرهنة (9.5) تكمن في أن الحد يعتمد خطيًّا على سعة الخطوة h، وبناءً على ذلك فإن اضمحلال سعة الخطوة يحتم في المقابل إعطاء دقة أكبر للتقريبات.

أما الذي تم تجاهله في تمهيدية المبرهنة (9.5) فهو الأثر الذي يلعبه خطأ التدوير في اختيار سعة الخطوة. وكلما كانت h أصغر، فإن حسابات أكثر ستغدو ضرورية وخطأ تدوير أكبر سيكون متوقعًا. إذن فإن صيغة معادلة الفرق هي

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لا تستخدم لحساب y_i التقريب للحل t_i عند نقطة الشبكة. وبدلًا من ذلك نستخدم معادلة على الصيغة.

$$u_0 = \alpha + \delta_0$$

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) + \delta_{i+1} \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (11.5)$$

حيث ترمز δ_i إلى خطأ التدوير المترافق مع u_i. وباستخدام طرائق مشابهة لتلك التي في برهان المبرهنة (9.5)، نتمكن من إنتاج حد خطأ لتقريبات إلى y_i محدودة الخانات ومعطاة من خلال طريقة أويلر.

مبرهنة 10.5

ليكن $y(t)$ الحل الوحيد وحيد لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \qquad (12.5)$$

و $u_0, u_1, \ldots, u_N$ التقريبات التي وُجِدت باستخدام المعادلة (11.5). إذا كان $|\delta_i| < \delta$ لكلٍّ من

$i = 0, 1, \ldots, N$ وفرضيات المبرهنة (9.5) متحققة في المعادلة (12.5)، فإن

$$|y(t_i) - u_i| \le \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)[e^{L(t_i-a)} - 1] + |\delta_0|e^{L(t_i-a)} \qquad (13.5)$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N$. ■

إن حد الخطأ (13.5) لم يعد خطيًّا في h، ولأن

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right) = \infty$$

فمن المتوقع أن يكون الخطأ كبيرًا مقابل قيم صغيرة نسبيًّا لـِ h، ويمكن استخدام التفاضل والتكامل لتحديد حد أدنى لسعة الخطوة h. وبجعل $E(h) = (hM/2) + (\delta/h)$، هذا يؤدي إلى $E'(h) = (M/2) - (\delta/h^2)$.

إذا كان $h < \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$ فإن $E'(h) < 0$ و $E(h)$ يكون متناقصًا.

إذا كان $h > \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$ فإن $E'(h) > 0$ و $E(h)$ يكون متزايدًا.

الحد الأدنى لقيمة $E(h)$ تظهر عندما

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}} \qquad (14.5)$$

وتخفيض h عن هذه القيمة يميل نحو زيادة الخطأ التام في التقريب. ومن الطبيعي أن تكون قيمة δ صغيرة نسبيًّا، لرتبة أن حد الخطأ هذا لـ h لا يؤثر في عمل طريقة أويلر.

مجموعة التمارين 2.5 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ عند $h = 0.5$

ب. $y' = 1 + (t-y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$ عند $h = 0.5$

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.25$

2. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.5$

ب. $y' = \frac{1+t}{1+y}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.5$

ج. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 2$ عند $h = 0.25$

د. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty), \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$

3. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (1) معطاة هنا. قارن الخطأ الحقيقي بحد الخطأ عند كل خطوة:

أ. $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ ب. $y(t) = t + (1/1 - t)$

ج. $y(t) = t\ln t + 2t$ د. $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

4. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (2) معطاة هنا. قارن الخطأ الحقيقي بحد الخطأ عند كل خطوة:

أ. $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$ ب. $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$

ج. $y(t) = \left(t - 2 + \sqrt{2}ee^{-\frac{t}{2}}\right)^2$ د. $y(t) = \dfrac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$

5. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ عند $h = 0.2$

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ عند $h = 0.1$

6. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = \dfrac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = \dfrac{y^2}{1 + t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \dfrac{-1}{\ln 2}$ عند $h = 0.1$

ج. $y' = t^{-1}(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -ty + 4ty^{-1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

7. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (5) معطاة هنا. احسب الخطأ الحقيقي في تقريبات التمرين (5)

أ. $y(t) = \dfrac{t}{1 + \ln t}$ ب. $y(t) = t\tan(\ln t)$

ج. $y(t) = -3 + \dfrac{2}{1 + e^{-2t}}$ د. $y(t) = t^2 + \dfrac{1}{3}e^{-5t}$

8. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (6) معطاة هنا. احسب الخطأ الحقيقي في تقريبات التمرين (5):

أ. $y(t) = \dfrac{2t + 1}{t^2 + 1}$ ب. $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t + 1)}$ ج. $y(t) = \dfrac{2t}{1 - 2t}$ د. $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$

9. افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$$

مع حل صحيح $y(t) = t^2(e^t - e)$.

أ. استخدم طريقة أويلر مع $h = 0.1$ لتقريب الحل، وقارنه بالقيمة الحقيقية لـ y.

ب. استخدم الجواب الذي نتج في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم y الآتية، وقارنها بالقيم الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

ج. احسب قيمة h الضرورية لـ $|y(t_i) - w_i| \le 0.1$، مستخدمًا المعادلة (10.5).

10. افترض مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -1$$

مع حل صحيح $y(t) = -1/t$:

أ. استخدم طريقة أويلر مع $h = 0.05$ لتقريب الحل، وقارنه بالقيمة الحقيقية لـ y.

ب. استخدم الجواب الذي نتج في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم y الآتية وقارنها بالقيم الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

ج. احسب قيمة h الضرورية لـ $|y(t_i) - w_i| \le 0.05$، مستخدمًا المعادلة (10.5).

11. افترض مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \le t \le 5, \quad y(0) = 1$$

مع حل صحيح $y(t) = e^{-t} + t$:

أ. اكتب تقريبًا إلى $y(5)$ مستخدمًا طريقة أويلر مع $h = 0.2, h = 0.1$ و $h = 0.05$.

ب. حدِّد قيمة h المثلى لاستخدامها في حساب $y(5)$، مفترضًا $\delta = 10^{-6}$، وأن المعادلة (14.5) متحققة.

12. افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -10y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 1$$

التي لها حل $y(t) = e^{-10t}$. ماذا يحدث عند تطبيق طريقة أويلر لهذه المسألة مع $h = 0.1$؟ هل هذا السلوك يخالف المبرهنة (9.5)؟

13. استخدم نتائج التمرين (5) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$ الآتية، وقارن التقريبات الناتجة بالقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الدّوال المعطاة في التمرين (7):

أ. $y(1.25)$ و $y(1.93)$ ب. $y(2.1)$ و $y(2.75)$

ج. $y(1.4)$ و $y(1.93)$ د. $y(0.54)$ و $y(0.94)$

14. استخدم نتائج التمرين (6) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$ الآتية، وقارن التقريبات الناتجة بالقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الدّوال المعطاة في التمرين (8):

أ. $y(0.25)$ و $y(0.93)$ ب. $y(1.25)$ و $y(1.93)$

ج. $y(2.10)$ و $y(2.75)$ د. $y(0.54)$ و $y(0.94)$

15. ليكن $E(h) = \dfrac{hM}{2} + \dfrac{\delta}{h}$:

أ. لمسألة القيمة الابتدائية $y' = -y + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$

احسب قيمة h لتصغير $E(h)$. افترض $\delta = 5 \times 10^{-(n+1)}$ لو استخدمت حساب **n-digit** في الفقرة (ج).

ب. للقيمة المثلى لـ h والمحسوبة في (أ)، استخدم المعادلة (13.5) لحساب الخطأ الأدنى الذي يمكن إيجاده.

ج. قارن الخطأ الحقيقي الناتج باستخدام $h = 0.1$ و $h = 0.01$ بالخطأ الأدنى في الفقرة (ب). هل بإمكانك تفسير النتائج؟

16. في دائرة كهربائية معرضة لفولتية ξ لها مقاومة R، ومعامل حث L، وسعة كهربائية C في وضع التوازي، فإن التيار i يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{L}\xi$$

افترض $C = 0.3$ farads, $R = 1.4$ ohms, $L = 1.7$ henries، وأن الفولتية معطاة من خلال

$$\xi(t) = e^{-0.06\pi t}\sin(2t - \pi)$$

فإذا كانت $i(0) = 0$ فأوجد التيار i للقيم $t = 0.1j$ حيث $j = 0, 1, \ldots, 100$.

17. يعتمد الكتاب [Ra, pp. 103–110] *Looking at History Through Mathematics*, Rashevsky يعتمد على نموذج لمسألة تتضمن حدوث التوحد في المجتمع. افترض مجتمعًا بتعداد سكاني $x(t)$ عند الزمن t (بالسنوات)، وأن للمتوحِّدين كلهم الذين يتزوجون من متوحدين آخرين إنشاءً متوحدين أيضًا، حيث أن نسبة ثابتة r من جميع الأإنشاء الآخرين جميعهم متوحدون أيضًا. فإذا افترضنا أن معدلي الولادات والوفيات للسكان جميعهم هما الثابتان b و d على التوالي، وإذا تزاوج المتوحدون مع غير المتوحِّدين عشوائيًا، فإن المسألة يمكن التعبير عنها بالمعادلات التفاضلية:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (b-d)x(t) \quad \text{و} \quad \frac{dx_n(t)}{dt} = (b-d)x_n(t) + rb(x(t) - x_n(t))$$

حيث يمثل $x_n(t)$ عدد المتوحدين في المجتمع عند الزمن t.

أ. افترض أن المتغير $p(t) = x_n(t)/x(t)$ يمثِّل نسبة المتوحدين في المجتمع عند الزمن t. أثبت أن هذه المعادلات يمكن دمجها وتبسيطها إلى معادلة تفاضلية واحدة

$$\frac{dp(t)}{dt} = rb(1 - p(t))$$

ب. بفرض $p(0) = 0.01, b = 0.02, d = 0.015$ و $r = 0.1$ اكتب تقريبًا للحل $p(t)$ من $t = 0$ إلى $t = 50$ عندما تكون سعة الخطوة $h = 1$ سنة.

ج. حل المعادلة التفاضلية لـ $p(t)$ بدقة، وقارن نتيجتك في الفقرة (ب) عندما $t = 50$ بالقيمة الصحيحة عند ذلك الزمن.

3.5 طرائق تايلور من الرتبة الكبيرة Higher-Order Taylor Methods

لما كان هدف الأساليب العددية هو إيجاد تقريبات دقيقة بأقل جهد، فإننا نحتاج إلى وسائل لمقارنة كفاءة طرائق التقريب المختلفة. تسمى الأداة الأولى موضع اهتمامنا خطأ القطع المحلي **local truncation error** للطريقة. إن خطأ القطع المحلي عند خطوة معينة يقيس مقدار الحل الصحيح للمعادلة التفاضلية الذي يفشل في تحقيق معادلة الفرق المستخدمة في التقريب.

تعريف 11.5 طريقة الفرق $w_0 = \alpha$

$$w_{i+1} = w_i + h\,ø(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لها خطأ القطع المحلي

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - (y_i + h\,ø(t_i, y_i))}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - ø(t_i, y_i)$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$. ■

وبالنسبة إلى طريقة أويلر، فإن خطأ القطع المحلي عند الخطوة i للمسألة

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

هو

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

حيث تمثِّل عادة $y_i = y(t_i)$ القيمة الصحيحة للحل عند t_i. إن هذا الخطأ هو خطأ محلي؛ لأنه يقيس دقة الطريقة عند خطوة معينة، مفترضين أن الطريقة كانت صحيحة في الخطوة السابقة. وهكذا فإن ذلك يعتمد على المعادلة التفاضلية، وسعة الخطوة، والخطوة بعينها في التقريب.

وبالرجوع إلى المعادلة (7.5) في الفصل السابق، نرى أن طريقة أويلر لها

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2} y''(\xi_i) \quad \text{لبعض} \quad \xi_i \quad \text{في} \quad (t_i, t_{i+1})$$

وعندما تكون $y''(t)$ معروفة لتُحدّد بالثابت M على $[a, b]$، فسيؤدي ذلك إلى

$$|\tau_{i+1}(h)| \le \frac{h}{2} M$$

ولهذا فإن خطأ القطع المحلي في طريقة أويلر يكون $O(h)$.

تكون إحدى السبل لاختيار طرائق المعادلة التفاضلية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية بأسلوب له أخطاء تقلص محلي $O(h^p)$ لأكبر قيمة ممكنة لـ p، حيث نبقي عدد العمليات الحسابية للطرائق وتعقيداتها ضمن حدود معقولة.

ولما اشتقت طريقة أويلر باستخدام مبرهنة تايلور مع $n = 1$ لتقريب حل المعادلة التفاضلية فإن محاولتنا الأولى لإيجاد طرائق لتحسين سمات التقارب لطرائق الفرق تكمن في توسيع أسلوب الاشتقاق هذا لقيم أكبر لـ n.

الطرائق في هذا الفصل تستخدم كثيرة حدود تايلور Taylor. وإن المعلومات عن الاشتقاق عند نقطة هي لقريب قيمة الدالة عند نقطة جديدة.

افترض أن حل $y(t)$ مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

له $(n + 1)$ من المشتقات المتصلة. فإذا وسّعنا الحل $y(t)$، بدلالة كثيرة حدود تايلور من الرتبة n حول t_i، وكان التقييم عند t_{i+1}، فإننا نحصل على

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i) \qquad (15.5)$$

لـ ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}).

إن التفاضل المتتابع للحل $y(t)$ يعطي

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y''(t) = f'(t, y(t)) \quad \text{وعمومًا} \quad y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t))$$

وبتعويض هذه النتائج في المعادلة (15.5) نحصل على

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y(t_i)) + \cdots \qquad (16.5)$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

إننا نحصل على طريقة معادلة الفرق المناظرة للمعادلة (16.5) عن طريق حذف الجزء المتبقي

والمتضمن ξ_i. تسمى هذه الطريقة

طريقة تايلور من الرتبة n Taylor method of order n

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{17.5}$$

حيث

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i)$$

مثال 1 انظر أن طريقة أويلر هي طريقة تايلور من الرتبة واحد.

لنفترض أننا نريد تطبيق طريقة تايلور من الرتبتين 2 و4 لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

التي درِست في الفصول السابقة. علينا إيجاد أول ثلاث مشتقات لـِ $f(t, y(t)) = y(t) - t^2 + 1$ بالنسبة إلى المتغير t

$$f'(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1) = y' - 2t = y - t^2 + 1 - 2t$$

$$f''(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1 - 2t) = y' - 2t - 2$$

$$= y - t^2 + 1 - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

و

$$f'''(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 - 2t - 1) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

عندئذٍ

$$T^{(2)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) = w_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i^2 - 2t_i + 1)$$

$$= \left(1 + \frac{h}{2}\right)(w_i - t_i^2 + 1) - ht_i$$

و

$$T^{(4)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \frac{h^2}{6} f''(t_i, w_i) + \frac{h^3}{24} f'''(t_i, w_i)$$

$$= w_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i^2 - 2t_i + 1) + \frac{h^2}{6}(w_i - t_i^2 - 2t_i - 1)$$

$$+ \frac{h^3}{24}(w_i - t_i^2 - 2t_i - 1)$$

و

$$= \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right)(w_i - t_i^2) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right)(ht_i)$$

$$+ 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}$$

بناءً على ذلك فإن طريقة تايلور من الرتبتين 2 و 4 هي

$$w_0 = 0.5,$$
$$w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 + \frac{h}{2}\right)(w_i - t_i^2 + 1) - ht_i\right]$$

و

$$w_0 = 0.5,$$
$$w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right)(w_i - t_i^2) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right)ht_i + 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}\right],$$

لكل $i = 0, 1, \ldots, N - 1$.

فإذا كانت $h = 0.2$ فإن $N = 10$ و $t_i = 0.2i$ لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, 10$. ولذلك فإن الطريقة بالرتبة الثانية تصبح

$$w_0 = 0.5,$$
$$w_{i+1} = w_i + 0.2\left[\left(1 + \frac{0.2}{2}\right)(w_i - 0.04i^2 + 1) - 0.04i\right]$$
$$= 1.22\mathrm{w}_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.22,$$

وتصبح الطريقة من الرتبة الرابعة

$$w_{i+1} = w_i + 0.2\left[\left(1 + \frac{0.2}{2} + \frac{0.04}{6} + \frac{0.008}{24}\right)(w_i - 0.04i^2) - \left(1 + \frac{0.2}{3} + \frac{0.04}{12}\right)(0.04i) + 1 + \frac{0.2}{2} - \frac{0.04}{6} - \frac{0.008}{24}\right]$$
$$= 1.2214w_i - 0.008856i^2 - 0.00856i + 0.2186,$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, 9$.

يبين جدول (3.5) القيم الحقيقية للحل $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ والنتائج من خلال طرائق تايلور من الرتبتين 2 و 4، والأخطاء الحقيقية المرتبطة بهذه الطرائق. وكما هو متوقع، فإن نتائج الرتبة 4 متميزة.

لنفترض أننا بحاجة إلى تحديد تقريب لنقطة وسطية في جدول، على سبيل مثال عند $t = 1.25$، فإذا استخدمنا استكمالاً داخليًّا في طريقة تايلور من الرتبة أربعة تقريبات عند $t = 1.2$ و $t = 1.4$، فسنحصل على

$$y(1.25) \approx \left(\frac{1.25 - 1.4}{1.2 - 1.4}\right)3.1799640 + \left(\frac{1.25 - 1.2}{1.4 - 1.2}\right)3.7324321 = 3.3180810$$

جدول 3.5

t_i	الصحيحة $y(t_i)$	تايلور بالرتبة 2 w_i	الخطأ $\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	تايلور بالرتبة 4 w_i	الخطأ $\lvert y(t_i) - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8300000	0.0007014	0.8293000	0.0000014
0.4	1.2140877	1.2158000	0.0017123	1.2140910	0.0000034
0.6	1.6489406	1.6520760	0.0031354	1.6489468	0.0000062
0.8	2.1272295	2.1323327	0.0051032	2.1272396	0.0000101
1.0	2.6408591	2.6486459	0.0077868	2.6408744	0.0000153
1.2	3.1799415	3.1913480	0.0114065	3.1799640	0.0000225
1.4	3.7324000	3.7486446	0.0162446	3.7324321	0.0000321
1.6	4.2834838	4.3061464	0.0226626	4.2835285	0.0000447
1.8	4.8151763	4.8462986	0.0311223	4.8152377	0.0000615
2.0	5.3054720	5.3476843	0.0422123	5.3055554	0.0000834

ولما كانت القيمة الصحيحة $y(1.25) = 3.3173285$، فإن في هذا التقريب 0.0007525 خطأ يعادل مقداره 30 مرة معدل أخطاء التقريب عند 1.2 و 1.4.

يتطلب استكمال هرمايت الداخلي كلاً من قيمة الدالة ومشتقته عند كل نقطة. وهذا يجعل منه طريقة لاستكمال داخلي طبيعي لتقريب معادلات تفاضلية ؛ لأن هذه البيانات جميعها متوفرة.

بإمكاننا تحسين التقريب إلى $y(1.25)$ معنويًا باستخدام استكمال داخلي هرمايت التكعيبي. وهذا يتطلب تقريبات إلى $y'(1.2)$ و $y'(1.4)$ إلى جانب التقريبات إلى $y(1.2)$ و $y(1.4)$. لكن تقريبات المشتقات ممكنة من خلال المعادلة التفاضلية؛ لأن $y'(t) = f(t, y(t))$. وفي مثالنا $y'(t) = y(t) - t^2 + 1$، ومن ثم فإن

$$y'(1.2) = y(1.2) - (1.2)^2 + 1 \approx 3.1799640 - 1.44 + 1 = 2.7399640$$

و

$$y'(1.4) = y(1.4) - (1.4)^2 + 1 \approx 3.7324327 - 1.96 + 1 = 2.7724321$$

إن عملية الفرق المنقسم في الفصل (3.3) تعطي المعلومات في جدول (4.5). وإن مصدر القيم المخططة هي البيانات، أما الأخرى فقد صِيغت باستخدام صيغ الفروقات المنقسمة.

جدول 4.5

2.1	<u>3.1799640</u>			
		<u>2.7399640</u>		
2.1	<u>3.1799640</u>		0.1118825	
		2.7623405		−0.3071225
4.1	<u>3.7324321</u>		0.0504580	
		<u>2.7724321</u>		
4.1	<u>3.7324321</u>			

إن كثيرة حدود هرمايت هي

$$y(t) \approx 3.1799640 + (t - 1.2)2.7399640 + (t - 1.2)^2 0.1118825 + (t - 1.2)^2(t - 1.4)(-0.3071225)$$

ومن ثم فإن

$$y(1.25) \approx 3.1799640 + 0.1369982 + 0.0002797 + 0.0001152 = 3.3173571$$

هي تمهيدية دقيقة ضمن 0.0000286. وهذا يعادل معدل الأخطاء عند 2.1 وعند 4.1 تقريبًا، أو يعادل نحو %4 من الخطأ باستخدام استيفاء داخلي خطي. ويبرّر هذا التحسن في الدقة حتمًا الحسابات المضافة المطلوبة لطريقة هرمايت. ■

مبرهنة 12.5 إذا استخدمت طريقة تايلور من الرتبة n لتقريب الحل للمسألة

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha,$$

يعدد h من الخطوات، وأن $y \in C^{n+1}[a, b]$، فإن خطأ القطع المحلي هو $O(h^n)$. ■

البرهان انظر إلى المعادلة (16.5) حيث يمكن كتابتها

$$y_{i+1} - y_i - hf(t_i, y_i) - \frac{h^2}{2} f'(t_i, y_i) - \cdots - \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y_i) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

لبعض قيم ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}). لذا فإن خطأ القطع المحلي يكون

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - T^{(n)}(t_i, y_i) = \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$. ولأن $y \in C^{n+1}[a, b]$، يكون لدينا $y^{(n+1)}(t) = f^{(n)}(t, y(t))$ محددًا على $[a, b]$ وأن $\tau_i = O(h^n)$ لكلٍ من $i = 1, 2, \ldots, N$. ■ ■ ■

مجموعة التمارين 3.5 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:
   أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ عند $h = 0.5$
   ب. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$ عند $h = 0.5$
   ج. $y' = 1 + \frac{y}{t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$
   د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.25$
2. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:
   أ. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.5$
   ب. $y' = \dfrac{1+t}{1+y}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.5$
   ج. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 2$ عند $h = 0.25$
   د. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty), \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$
3. من التمرين (1) مستخدمًا طريقة تايلور من الرتبة 4.
4. من التمرين (2) مستخدمًا طريقة تايلور من الرتبة 4.
5. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:
   أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1$ عند $h = 0.1$
   ب. $y' = \sin t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ عند $h = 0.5$
   ج. $y' = 1/t(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ عند $h = 0.5$
   د. $y' = -ty + 4ty^{-1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.25$

6. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = \frac{y^2}{1+t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -(\ln 2)^{-1}$ عند $h = 0.1$

ج. $y' = (y^2 + y)/t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

7. كرّر التمرين (5) مستخدمًا طريقة تايلور من الرتبة 4.

8. كرّر التمرين (6) مستخدمًا طريقة تايلور من الرتبة 4.

9. لنفترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$$

مع حل صحيح $y(t) = t^2(e^t - e)$:

أ. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل، وقارنه بقيم y الحقيقية.

ب. استخدم الإجابة في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب y عند القيم الآتية، وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

ج. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 4 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل، وقارنه بقيم y الحقيقية.

د. استخدم الإجابة في الفقرة (ج) والاستكمال الداخلي لهرمايت التكعيبي المجزَّأ لتقريب y عند القيم الآتية، وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

10. لنفترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -1$$

مع حل صحيح $y(t) = -1/t$.

أ. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.05$ لتقريب الحل، وقارنه بقيم y الحقيقية.

ب. استخدم الإجابة في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب y عند القيم الآتية، وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

ج. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 4 مع $h = 0.05$ لتقريب الحل، وقارنه بقيم y الحقيقية.

د. استخدم الإجابة في الفقرة (ج) والاستكمال الداخلي لهرمايت التكعيبي المجزَّأ لتقريب y عند القيم الآتية، وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

11. مقذوف كتلته $m = 0.11$ kg أُطلق عموديًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية $v(0) = 8$ m/s تؤثِّر عليه قوة الجاذبية، $F_g = -mg$، وتأثير مقاومة الهواء، $F_r = -kv|v|$، حيث $g = 9.8$ m/s^2 و $k = 0.002$ kg/m. المعادلة التفاضلية للسرعة v معطاة وفقًا للمعادلة $mv' = -mg - kv|v|$.

أ. أوجد السرعة بعد $0.1, 0.2, \ldots, 1.0$ من الثواني.

ب. إلى أقرب عشر من الثانية، حدِّد متى يصل المقذوف إلى أعلى ارتفاع ويبدأ السقوط.

12. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل إلى

$$y' = 1 + t\sin(ty), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$$

4.5 طرائق رونج-كوتا Runge–Kutta Methods

إن طرائق تايلور المقدمة في الفصول السابقة لها سمة إيجابية تكمن في خطأ القطع المحلي، لكن الجانب السلبي فيها يتعلق بعملية الحساب والتقييم المطلوبة لاشتقاقات $f(t, y)$. وهذه عملية معقدة وتستغرق وقتاً طويلاً في غالبية المسائل، ولذلك فإن طرائق تايلور نادرًا ما تستخدم في التطبيق العملي. ولطرائق رونج-كوتا خطأ تقلص محلي من الرتبة العالية لطرائق تايلور، حيث تلغي الحاجة إلى حساب اشتقاقات $f(t, y)$ وتقييمها. وقبل عرض الأفكار المتعلقة باشتقاقها نحتاج إلى طرائق مبرهنة تايلور في متغيرين. وبرهان هذه التمهيدية يمكن إيجاده في أي كتاب متخصص في التفاضل والتكامل المتقدم. (انظر على سبيل مثال [Fu, p. 331]).

في أواخر الـ 1800استخدم كارل رونج (1856 – 1927) Carle Runge طرائق مماثلة لتلك التي في هذا البند لاشتقاق صيغ مختلفة لتقريب حل مسائل القيمة الأولية.

المبرهنة 13.5 افترض أن $f(t, y)$ وكل تفاضلاته الجزئية من الرتبة لا تزيد على $n + 1$ متصلة على $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, c \le y \le d\}$، وليكن $(t_0, y_0) \in D$. ولكل $(t, y) \in D$، يوجد ξ ما بين t و t_0 وكذلك μ ما بين y و y_0 مع

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y)$$

حيث

$$\begin{aligned}P_n(t, y) = {} & f(t_0, y_0) + \left[(t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)\right] \\ & + \left[\frac{(t - t_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + (t - t_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0)\right. \\ & \left. + \frac{(y - y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0)\right] + \cdots \\ & + \left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t - t_0)^{n-j}(y - y_0)^j\frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j}\partial y^j}(t_0, y_0)\right]\end{aligned}$$

و

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n + 1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n + 1}{j}(t - t_0)^{n+1-j}(y - y_0)^j\frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j}\partial y^j}(\xi, \mu)$$

تسمى الدالة $P_n(t, y)$ كثيرة حدود تايلور بمتغيرين من الرتبة **nth Taylor polynomial in two variables** للدالة f حول (t_0, y_0)، و $R_n(t, y)$ عبارة عن الحد المتبقي المرتبط بـ $P_n(t, y)$. ■

في عام 1901، عمل مارتن ولهلم كوتا Martin Wilhelm Kutta (1867 – 1944) تعميمًا للطرائق التي طورّها رونج عام 1895 لتكوين نظم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. هذه التقنيات مماثلة، ولكن ليست نفسها بالضبط، لتلك التي نعرفها حاليًا بطريقة رونج – كوتا Runge – Kutta.

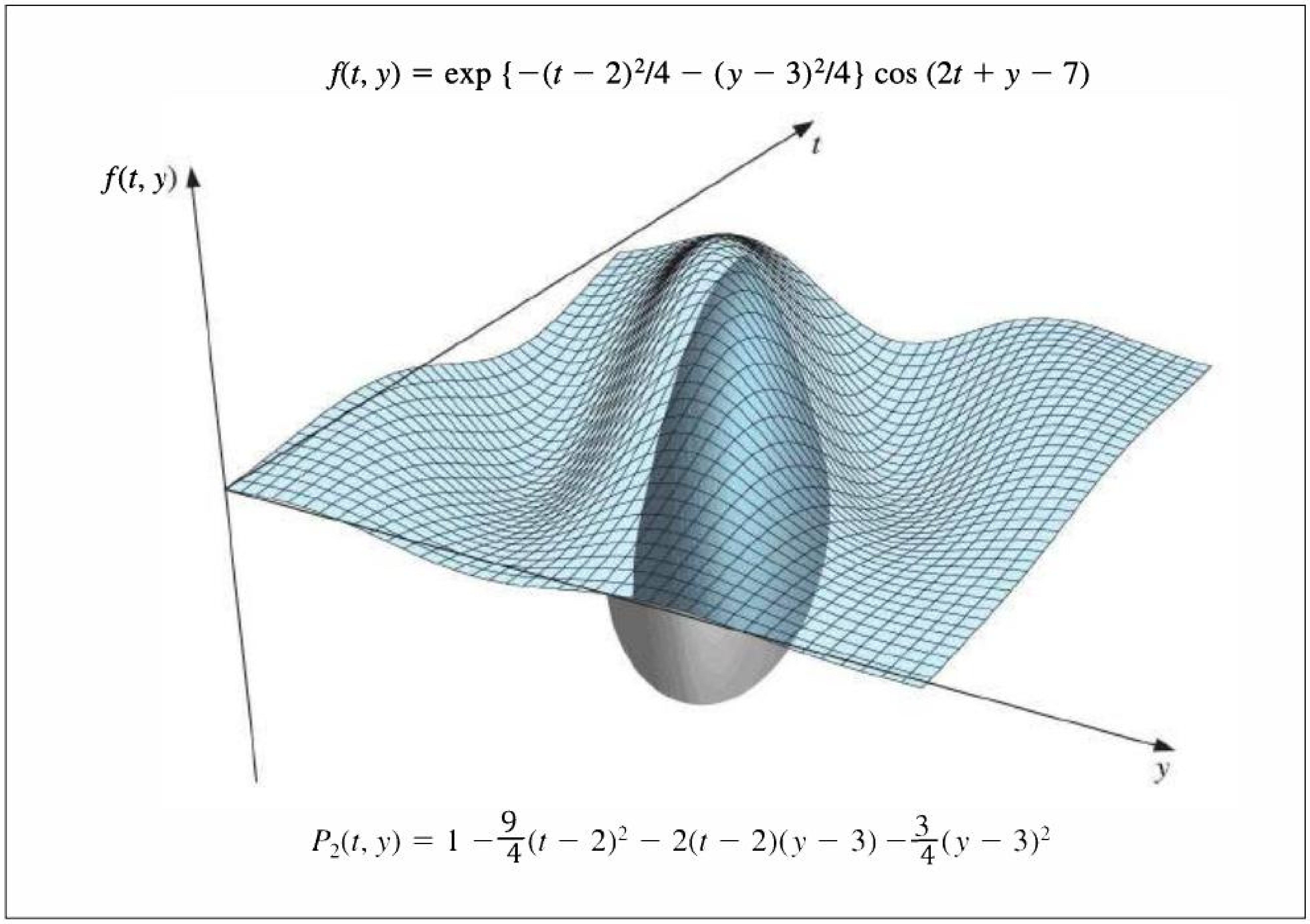
مثال 1 يبيّن شكل (4.5) الرسم البياني للدّالة

$$f(t, y) = \exp\left[-\frac{(t-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4}\right]\cos(2t + y - 7)$$

معًا مع كثيرة حدود تايلور الثانية لِـ f حول (2,3)، أو كثيرة حدود بمتغيرين

$$P_2(t, y) = 1 - \tfrac{9}{4}(t-2)^2 - 2(t-2)(y-3) - \tfrac{3}{4}(y-3)^2$$

شكل 4.5



إن عمل التفاضل هذا الذي يتطلبه تحديد كثيرة حدود، سيكون متعِبًا باليد. ومن حسن الحظ، فإن إحدى عمليات Maple تتيح ذلك. ونحتاج أولًا إلى تأسيس لعملية كثيرة حدود تايلور متعددة المتغيرات، وذلك بإدخال الأمر

```
>readlib(mtaylor)
```

الذي ينتج الاستجابة

```
Proc().....end proc
```

ويكون إيجاد كثيرة حدود تايلور التي نحتاج إليها في هذا مثال من خلال إصدار الأمر

```
>mtaylor(exp(-(t-2)^2/4-(y-3)^2/4)*cos(2*t+y-7),[t=2,y=3],3)
```

تؤدي المتغيرة الأخيرة في هذا الأمر إلى حاجتنا إلى كثيرة حدود تايلور متعددة المتغيرات الثانية بمعنى كثيرة حدود تكعيبية. فإذا كانت هذه المتغيرة 2 فإننا نحصل على كثيرة حدود ثابتة.

وعند حذف هذه المعلمة، تكون 6 تلقائيًّا وتعطي كثيرة حدود تايلور الخامسة.

الاستجابة من أمر Maple هذا هو كثيرة حدود

$$1-\frac{9}{4}(t-2)^2-2(t-2)(y-3)-\tfrac{3}{4}(y-3)^2$$

■

الخطوة الأولى في اشتقاق طريقة Runge-kutta هي تحديد قيم لـ a_1, α_1 و β_1 مع سمة كون $t\, a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ تقرب

$$T^{(2)}(t,y)=f(t,y)+\frac{h}{2}f'(t,y)$$

بخطأ ليس أكثر من $O(h^2)$، وهو خطأ تقلص محلي لطريقة تايلور من الرتبة 2. وحيث إن

$$y'(t)=f(t,y) \text{ و } f'(t,y)=\frac{df}{dt}(t,y)=\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\cdot y'(t)$$

فهذا يعطي

$$T^{(2)}(t,y)=f(t,y)+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\cdot f(t,y). \qquad (18.5)$$

وتوسيع $f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ في كثيرة حدود تايلور من الرتبة 1 حول (t,y) الخاص بها يعطي

$$a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)=a_1 f(t,y)+a_1\alpha_1\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) \qquad (19.5)$$
$$+\,a_1\beta_1\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)+a_1\cdot R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1),$$

حيث إن

$$R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1)=\frac{\alpha_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu)+\alpha_1\beta_1\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(\xi,\mu)+\frac{\beta_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu), \qquad (20.5)$$

لبعض قيم ξ ما بين t و $t+\alpha_1$ وكذلك μ ما بين y و $y+\beta_1$.

وبمطابقة معامل f واشتقاقاتها في المعادلتين (18.5 و 19.5) نحصل على المعادلات الثلاث

$$f(t,y):\quad a_1=1;\qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t,y):\quad a_1\alpha_1=\frac{h}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y):\quad a_1\beta_1=\frac{h}{2}f(t,y)$$

و

والوسيطات a_1, α_1 و β_1 تُحدّد وحدها لتكون

$$\beta_1=\frac{h}{2}f(t,y) \text{ و } a_1=1,\quad \alpha_1=\frac{h}{2}$$

ولذلك

$$T^{(2)}(t,y) = f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) - R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)$$

ومن المعادلة (20.5) نجد أن

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) = \frac{h^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + \frac{h^2}{4}f(t,y)\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(\xi,\mu)$$
$$+ \frac{h^2}{8}(f(t,y))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

وإذا كانت المشتقات الجزئية جميعها من الرتبة الثانية لـ f محددة فإن

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)$$

تكون $O(h^2)$، وهي رتبة خطأ القطع المحلي لطريقة تايلور من الرتبة 2. ووفقًا لذلك، فإن استخدام الأسلوب الجديد بدلًا من طريقة تايلور من الرتبة 2، قد يضيف خطأً دون أن يزيد في رتبة الخطأ.

وطريقة معادلة الفروق الناتجة من استبدال $T^{(2)}(t,y)$ في طريقة تايلور من الرتبة 2 بالمقدار $f(t+(h/2), y+(h/2)f(t,y))$ هي طريقة خاصة **Runge-kutta** تعرف بطريقة النقطة الوسطية **Midpoint method**.

طريقة النقطة الوسطية Midpoint method

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i+\frac{h}{2}, w_i+\frac{h}{2}f(t_i,w_i)\right) \quad \text{لكل من} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

ولما كانت ثلاث معلمات فقط تظهر في $a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ ونحتاج إليها جميعًا في مطابقة $T^{(2)}$، فإننا نحتاج إلى صيغة أكثر تعقيدًا لتحقيق الشروط المطلوبة لأيٍّ من طرائق تايلور من الرتبة العالية.

إن صيغة الأربع معلمات الأكثر مناسبة لتقريب

$$T^{(3)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2}f'(t,y) + \frac{h^2}{6}f''(t,y)$$

هي

$$a_1 f(t,y) + a_2 f(t+\alpha_2, y+\delta_2 f(t,y)) \tag{21.5}$$

وحتى مع هذه، فإن هناك مرونة غير وافية لمطابقة الحد

$$\frac{h^2}{6}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right]^2 f(t,y)$$

الناتج عن توسيع $(h^2/6)f''(t,y)$. وبناءً على ذلك فإن أحسن ما يمكن الحصول عليه من استخدام المعادلة (21.5) هو طرائق مع الخطأ المتقلص المحلي $O(h^2)$. وحقيقة كون المعادلة (21.5) لها أربع معلمات، فإن ذلك يعطي مرونة في اختيارها، ومن ثم فإن بالإمكان اشتقاق عدد $O(h^2)$

من الطرائق. وإحدى أكثر الطرائق أهمية هي طريقة أويلر المعدلة **Modified Euler method** التي تقابل الاختيار $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ و $\alpha_2 = \delta_2 = h$ ولها صيغة معادلة الفرق الآتية.

طريقة أويلر المعدلة **Modified Euler method**

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))],$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

وهناك طريقة مهمة أخرى $O(h^2)$ هي طريقة هانز **Haun's method** التي تقابل $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}$ و $\alpha_2 = \delta_2 = \frac{2}{3}h$، ولها صيغة معادلة الفرق الآتية:

طريقة هانز **Heun's method**

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, w_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}hf(t_i, w_i)\right)\right],$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

وتصنف كل منهما على أنها من طرائق **Runge-kutta** من الرتبة 2، وهي رتبة خطأ القطع المحلي لها.

مثال 2 لنفترض تطبيق طرائق **Runge-kutta** من الرتبة 2 لمثالنا الاعتيادي

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

مع $N = 10, h = 0.2, t_i = 0.2i$ و $w_0 = 0.5$ في كل حالة. معادلات الفرق الناتجة عن صيغ مختلفة هي

طريقة النقطة الوسطية: $w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.218$

طريقة أويلر المعدلة: $w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.216$

طريقة هانز: $w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.217\overline{3}$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, 9$. ويتضمن جدول (5.5) نتائج هذه الحسابات. وبالنسبة إلى هذه المسألة، نجد أن طريقة النقطة الوسطية مناسبة جدًّا ومتبوعة بطريقة هانز. ■

وعلى الرغم من إمكانية تقريب $T^{(3)}(t, y)$ بخطأ $O(h^3)$ وفق الصيغة

$$f(t + \alpha_1, y + \delta_1 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y)))$$

المتضمنة لأربع معلمات، إلا أن العمليات الجبرية الداخلة في تحديد $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2$ و δ_2 تدخل فعلًا ولن تُعرَض. والواقع أن طريقة **Runge-kutta** من الرتبة 3 الناتجة عن هذه الصيغة لا تستخدم عمومًا. وطريقة **Runge-kutta** الأكثر استخدامًا هي من الرتبة 4، وبصيغة معادلة الفرق، فإنها تعطى بالصيغة الآتية.

جدول 5.5

الخطأ	طريقة هيون	الخطأ	طريقة أولير المعدلة	الخطأ	طريقة نصف المنتصف	$y(t_i)$	t_i
0	0.5000000	0	0.5000000	0	0.5000000	0.5000000	0.0
0.0019653	0.8273333	0.0032986	0.8260000	0.0012986	0.8280000	0.8292986	0.2
0.0042077	1.2098800	0.0071677	1.2069200	0.0027277	1.2113600	1.2140877	0.4
0.0067537	1.6421869	0.0116982	1.6372424	0.0042814	1.6446592	1.6489406	0.6
0.0096281	2.1176014	0.0169938	2.1102357	0.0059453	2.1212842	2.1272295	0.8
0.0128521	2.6280070	0.0231715	2.6176876	0.0076923	2.6331668	2.6408591	1.0
0.0164396	3.1635019	0.0303627	3.1495789	0.0094781	3.1704634	3.1799415	1.2
0.0203944	3.7120057	0.0387138	3.6936862	0.0112346	3.7211654	3.7324000	1.4
0.0247035	4.2587802	0.0483866	4.2350972	0.0128620	4.2706218	4.2834838	1.6
0.0293310	4.7858452	0.0595577	4.7556185	0.0142177	4.8009586	4.8151763	1.8
0.0342074	5.2712645	0.0724173	5.2330546	0.0151025	5.2903695	5.3054720	2.0

طريقة رونج-كوتا من الرتبة 4 Runge-kutta (Order Four)

$$w_0 = \alpha,$$
$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$
$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$
$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$
$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3),$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$، لهذه الطريقة خطأ القطع محلي $O(h^4)$، يتحقق بوجود خمسة اشتقاقات متصلة للحل $y(t)$. والسبب في تقديم الرموز k_1, k_2, k_3, k_4 في الطريقة هو استبعاد الحاجة إلى تداخل شبكي متتالٍ في المتغير الثاني لـِ $f(t, y)$. (انظر التمرين 31) تنفذ الخوارزمية (2.5) طريقة Runge–kutta من الرتبة 4.

طريقة رونج-كوتا من الرتبة 4 Runge-kutta (Order Four)

ALGORITHM
الخوارزمية
2.5

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N+1)$ من الكرّراد المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط النهاية a, b، عدد صحيح N ، α شرط ابتدائي.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N+1)$ من قيم t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/N$ $t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w)
2	لكل من $i = 1, 2, \ldots, N$ طبق الخطوات 3 – 5.
3	ضع $K_1 = hf(t, w)$ $K_2 = hf(t + h/2, w + K_1/2)$ $K_3 = hf(t + h/2, w + K_2/2)$ $K_4 = hf(t + h, w + K_3)$
4	ضع $w = w + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ (احسب w_i). $t = a + ih$ (احسب t_i).
5	المخرجات (t, w).
6	توقف.



■

مثال 3

استخدم طريقة Runge-kutta من الرتبة 4 لإيجاد تقريبات لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

مع $h = 0.2$، $N = 10$ و $t_i = 0.2i$ لنحصل على النتائج والأخطاء المبينة في جدول (6.5). ■

جدول 6.5

t_i	الصحيحة $y_i = y(t_i)$	رونج كوتا بالرتبة 4 w_i	الخطأ $\|y_i - w_i\|$
0.0	0.5000000	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8292933	0.0000053
0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
0.8	2.1272295	2.1272027	0.0000269
1.0	2.6408591	2.6408227	0.0000364
1.2	3.1799415	3.1798942	0.0000474
1.4	3.7324000	3.7323401	0.0000599
1.6	4.2834838	4.2834095	0.0000743
1.8	4.8151763	4.8150857	0.0000906
2.0	5.3054720	5.3053630	0.0001089

إن الجهد الحسابي الرئيس في تطبيق طرائق Runge–kutta يكون في تقييم f. وفي الطرائق من الرتبة الثانية، فإن خطأ القطع المحلي هو $O(h^2)$، والثمن المقابل هو تقييم للدالة لكل خطوة. إن طريقة Runge–kutta من الرتبة 4 تتطلب أربعة تقييمات لكل خطوة، وخطأ القطع المحلي هو $O(h^4)$. وقد وجد بوتجر Butcher (انظر [But] للتلخيص) العلاقة بين عدد مرات التقييم لكل خطوة ورتبة خطأ القطع المحلي المبين في جدول (7.5). ويبيِّن هذا الجدول لماذا تُفضَّل الطرائق من الرتبة الأقل من 5 مع حجم عينة أصغر مقابل طرائق من الرتبة أكبر مستخدمين سعة خطوات أكبر.

جدول 7.5

عدد مرات التقييم لكل خطوة	2	3	4	$5 \le n \le 7$	$8 \le n \le 9$	$10 \le n$
أفضل خطأ قطع محلي ممكن	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

يمكن توضيح أحد معايير المقارنة لطرائق Runge–kutta برتبٍ أبطأ كما يلي:

إن طريقة Runge–kutta من الرتبة 4 تتطلب أربعة تقييماتٍ لكل خطوة، ولذلك يجب أن تعطي أجوبة بدقة أكبر من طريقة أويلر وبربع سعة الخطوة إذا ما تطلب الأمر تميزها. ومن ثم فإنه لكي تتميز طريقة Runge–kutta من الرتبة 4 على طريقة Runge–kutta من الرتبة الثانية، يتحتم عليها إعطاء دقة أكبر مع سعة خطوة h مقارنة بطريقة الرتبة الثانية مع سعة خطوة $\frac{1}{2}h$؛ وذلك لأن الطريقة من الرتبة ٤ تتطلب ضعف عدد التقييمات لكل خطوة.

ومثال الآتي يوضح حالة تميز طريقة Runge–kutta من الرتبة الرابعة وفق هذا المقياس.

مثال 4

في المسألة

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

تُقارَن طرائق أويلر Euler بـ $h = 0.025$ والنقطة الوسطيةMidpoint بِـ $h = 0.05$ وRunge–kutta من الرتبة الرابعة بـ $h = 0.1$ عند النقاط الشبكية المشتركة لهذه الطرائق 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 و0.5. وكل واحد من هذه الأساليب يتطلب 20 تقييمًا. وننظر في هذا مثالًا يميز طريقة الرتبة الرابعة. ■

جدول 8.5

t_i	الصحيحة	أولير $h = 0.025$	طريقة أولير المعدلة $h = 0.05$	رونج – كوتا بالرتبة 4 $h = 0.1$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000
0.1	0.6574145	0.6554982	0.6573085	0.6574144
0.2	0.8292986	0.8253385	0.8290778	0.8292983
0.3	1.0150706	1.0089334	1.0147254	1.0150701
0.4	1.2140877	1.2056345	1.2136079	1.2140869
0.5	1.4256394	1.4147264	1.4250141	1.4256384

مجموعة التمارين 4.5 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

القيمة الحقيقية قيمة h مسائل القيمة الابتدائية

أ. $y' = te^{3t} - 2y, 0 \le t \le 1, y(0) = 0$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

ب. $y' = 1 + (t-y)^2, 2 \le t \le 3, y(2) = 1$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = t + (1/1-t)$.

ج. $y' = 1 + \frac{y}{t}, 1 \le t \le 2, y(1) = 2$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = t\ln t + 2t$.

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, 0 \le t \le 1, y(0) = 1$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

القيمة الحقيقية قيمة h مسائل القيمة الابتدائية

أ. $y' = e^{t-y},\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$.

ب. $y' = \dfrac{1+t}{1+y},\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = 2$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = \sqrt{t^2+2t+6} - 1$.

ج. $y' = -y + ty^{1/2},\ 2 \le t \le 3,\ y(2) = 2$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = \left(t - 2 + \sqrt{2}ee^{-t/2}\right)$.

د. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty),\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = 2$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = \dfrac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$.

3. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2,\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = t/(1+\ln t)$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2,\quad 1 \le t \le 3,\quad y(1) = 0$ مع $h = 0.2$ الحل الصحيح $y(t) = t\tan(\ln t)$.

ج. $y' = -(y+1)(y+3),\ 0 \le t \le 2,\ y(0) = -2$ مع $h = 0.2$ الحل الصحيح $y(t) = -3 + 2(1+e^{-2t})^{-1}$.

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t,\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = \frac{1}{3}$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$.

4. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = \dfrac{2-2ty}{t^2+1},\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = \dfrac{2t+1}{t^2+1}$.

ب. $y' = \dfrac{y^2}{1+t},\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = \dfrac{-1}{\ln 2}$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $\ln y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t+1)}$.

ج. $y' = (y^2 + y)/t,\quad 1 \le t \le 3,\quad y(1) = -2$ مع $h = 0.2$ الحل الصحيح $y(t) = \dfrac{2t}{1-2t}$.

د. $y' = -ty + 4t/y,\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$.

5. كرّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة هانز.

6. كرّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة هانز.

7. كرّر تمرين (3) مستخدمًا طريقة هانز.

8. كرّر تمرين (4) مستخدمًا طريقة هانز.

9. كرّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة النقطة الوسطية.

10. كرّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة النقطة الوسطية.

11. كرّر تمرين (3) مستخدمًا طريقة النقطة الوسطية.

12. كرّر تمرين (4) مستخدمًا طريقة النقطة الوسطية.

13. كرّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة **Runge-kutta** من الرتبة الرابعة.

14. كرّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة **Runge-kutta** من الرتبة الرابعة.

15. كرّر تمرين (3) مستخدمًا طريقة **Runge-kutta** من الرتبة الرابعة.

16. كرّر تمرين (4) مستخدمًا طريقة **Runge-kutta** من الرتبة الرابعة.

17. استخدم نتائج تمرين (3) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y(1.25)$ و $y(1.93)$ ب. $y(2.1)$ و $y(2.75)$

ج. $y(1.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

18. استخدم نتائج التمرين (4) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y(0.94)$ و $y(0.54)$ ب. $y(1.93)$ و $y(1.25)$

ج. $y(2.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

19. كرّر تمرين (17) مستخدمًا نتائج التمرين (7).

20. كرّر تمرين (18) مستخدمًا نتائج التمرين (8).

21. كرّر تمرين (17) مستخدمًا نتائج التمرين (11).

22. كرّر تمرين (18) مستخدمًا نتائج التمرين (12).

23. كرّر تمرين (17) مستخدمًا نتائج التمرين (15).

24. كرّر تمرين (18) مستخدمًا نتائج التمرين (16).

25. استخدم نتائج تمرين (15) والاستكمال الداخلي لهرمايت التكعيبي لتقريب قيم $y(t)$، وقارن التقريبات بالقيمة الحقيقية:

أ. $y(1.93)$ و $y(1.25)$ ب. $y(2.75)$ و $y(2.1)$

ج. $y(1.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

26. استخدم نتائج التمرين (16) والاستكمال الداخلي لهرمايت التكعيبي لتقريب قيم $y(t)$، وقارن التقريبات بالقيمة الحقيقية:

أ. $y(0.94)$ و $y(0.54)$ ب. $y(1.93)$ و $y(1.25)$

ج. $y(2.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

27. أثبت أن طرائق النقطة الوسطية **Midpoint**، وأويلر المعدلة **Modified Euler**، وهانز **Heun** تعطي التقريبات نفسها لمسألة النقطة الابتدائية

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$$

ولأي اختيار إلى h. لماذا يكون هذا صحيحًا؟

28. ينساب ماء من خزان على شكل مخروطي مقلوب مع فوهة دائرية بمعدل

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi r^2 \sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{x}}{A(x)}$$

حيث تمثّل r نصف قطر الفوهة، وتمثّل x ارتفاع مستوى السائل عن رأس المخروط، و $A(x)$ تمثّل مساحة مقطع المخروط عند x من الوحدات فوق رأس المخروط. لنفترض $r = 0.1$ ft و $g = 32.1$ ft/s^2. وللخزان مستوى ماء ابتدائي قدره 8 ft، وحجم ابتدائي قدره $512(\pi/3)$ ft^3.

أ. احسب مستوى الماء بعد 10 min مع $h = 20$ s.

ب. حدّد ضمن 1 min، متى سيصبح الخزان فارغًا.

29. التفاعل الكيميائي اللامتراجع **irreversible** الذي يتضمن خلط جزيئين من كلٍّ من كرومات البوتاسيوم الصلب ($K_2Cr_2O_7$) والماء (H_2O) بثلاث ذرات من الكبريت الصلب (S) ليعطي ثلاثة جزيئات من غاز ثاني أكسيد الكبريت (SO_2)، وأربعة جزيئات من هايدروكسايد البوتاسيوم الصلب (KOH)، وجزيئين من أكسيد الكروم الصلب (Cr_2O_3) يمكن وضعه بالصيغة الرمزية

$$2K_2Cr_2O_7 + 2H_2O + 3S \longrightarrow 4KOH + 2Cr_2O_3 + 3SO_2$$

وإذا ما توفر أصلًا n_1 جزيء من $K_2Cr_2O_7$، n_2 جزيء من H_2O، و n_3 جزيء من S، فإن المعادلة التفاضلية الآتية توضح مقدار $x(t)$ من KOH بعد الزمن t:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(n_1 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_2 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_3 - \frac{3x}{4}\right)^3$$

حيث يمثِّل k ثابت سرعة التفاعل. فإذا كان $k = 6.22 \times 10^{-19}, n_1 = n_2 = 2 \times 10^3$، $n_3 = 3 \times 10^3$، فما عدد الوحدات من هايدروكسايد البوتاسيوم التي تكوَّنت بعد 0.2 s ؟

30. أثبت أن طريقة الفرق

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + a_1 f(t_i, w_i) + a_2 f(t_i + \alpha_2, w_1 + \delta_2 f(t_i, w_i))$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$، لا يمكن أن يكون لها خطأ متقلص محلي $O(h^3)$ لأي اختيار للثوابت a_1, a_2, α_2 وδ_2.

31. إن طريقة Runge–kutta من الرتبة 4 يمكن كتابتها بالصيغة

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6} f(t_i, w_i) + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_1 h, w_i + \delta_1 h f(t_i, w_i))$$

$$+ \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_2 h, w_i + \delta_2 h f(t_i + \gamma_2 h, w_i + \gamma_3 h f(t_i, w_i)))$$

$$+ \frac{h}{6} f(t_i + \alpha_3 h, w_i + \delta_3 h f(t_i + \gamma_4 h, w_i + \gamma_5 h f(t_i + \gamma_6 h, w_i + \gamma_7 h f(t_i, w_i)))).$$

أوجد قيم الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6,$ و γ_7 .

5.5 التحكم بالخطأ وطريقة رونج-كوتا-فهلبرك Error control and the Runge-Kutta-Fehlberg Method

لاحظنا في الفصل (6.4) الاستخدام المناسب لخطوة بسعات مختلفة لإنتاج طرائق تقريب تكاملية وافية من الناحية الحسابية. وهذا ليس كافيًا لصالح هذه الطرائق في ضوء زيادة التعقيد عند تطبيق هذه الطرائق. وثمة مزية أخرى لدى هذه الطرائق تجعل منها ذات قيمة، حيث تتضمن العملية المتعلقة بسعة الخطوة تقديرًا لخطأ القطع الذي لا يتطلَّب تقريب الاشتقاقات العالية للدالة. وهذه الطرائق تدعى المتبنية Adaptive؛ بسبب تبنيها لكل من عدد النقاط المستخدمة في التقريب وموقعها؛ لضمان إبقاء خطأ القطع ضمن حد معين.

هناك اتصال وثيق بين مسألة تقريب قيمة تكامل مؤكد ومسألة تقريب الحل لمسألة القيمة الوسطية. وعلينا إذن ألا نستغرب وجود طرائق متبنية لتقريب حلول مسائل القيمة الوسطية وكون هذه الطرائق ليست وافية فقط، بل تتضمن السيطرة على الخطأ أيضًا.

ربما ترغب في مراجعة مادة التربيع المعتمد في الفصل (6.4) قبل تناول مادة هذا الفصل والفصل (7.5).

يمكن وضع أي طريقة بخطوة واحدة لتقريب الحل $y(t)$ لمسألة القيمة الوسطية

$$y' = f(t, y) \text{ لكل } a \le t \le b \text{ عند } y(a) = \alpha$$

بالصيغة

$$w_{i+1} = w_i + h_i \phi(t_i, w_i, h_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لدالة معين ϕ.

ثمة طريقة مثالية لمعادلة الفرق

$$w_{i+1} = w_i + h_i \phi(t_i, w_i, h_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لتقريب الحل $y(t)$ لمسألة القيمة الوسطية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

تتسم بما يلي: عند حد السماح $\varepsilon > 0$، فإن أصغر عدد للنقاط الشبكية التي تستخدم لضمان الخطأ التام $|y(t_i) - w_i|$ لن يتجاوز ε لأي $i = 0, 1, \ldots, N$. وليس غريبًا أن يكون لدينا أصغر عدد من النقاط الشبكية إلى جانب السيطرة على الخطأ التام لطريقة الفرق، الذي لا يتماشى والنقاط المتساوية التباعد في الفترة. سوف نختبر في هذا الفصل أساليب تستخدم في السيطرة على الخطأ لطريقة معادلة الفرق وفق أسلوب فعال من خلال اختيار مناسب للنقاط الشبكية.

وعلى الرغم من أننا لا نستطيع تحديد الخطأ التام لطريقة ما، إلا أننا سنرى في الفصل (10.5) الصلة القريبة ما بين خطأ القطع المحلي والخطأ التام. وباستخدام طرائق الترتيب المختلف يمكننا التنبؤ بخطأ القطع المحلي، وباستخدام هذا التنبؤ، نختار سعة الخطوة التي ستبقيها قيد الفحص مع الخطأ التام.

ولتوضيح الأسلوب؛ نفترض أن لدينا أسلوبين للتقريب: الأول عبارة عن طريقة من الرتبة n وُجِدت من طريقة تايلور من الرتبة n بالصيغة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\phi(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+1})$$

وتعطي تقريبات

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h) \quad \text{لكل} \quad i > 0$$

مع خطأ قطع محلي $\tau_{i+1}(h) = O(h^n)$. وتنشأ الطريقة عمومًا من خلال تطبيق تعديل Runge-kutta لطريقة تايلور مع عدم أهمية الاشتقاق المحدد.

الطريقة الثانية شبيهة بذلك، ولكنها أعلى من الرتبة واحدة، وناتجة عن طريقة تايلور من الرتبة $(n + 1)$ ذات الصيغة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\tilde{\phi}(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+2})$$

وتعطي تقريبات

$$\tilde{w}_0 = \alpha$$

$$\tilde{w}_{i+1} = \tilde{w}_i + h\tilde{\phi}(t_i, \tilde{w}_i, h) \quad \text{لكل} \quad i > 0$$

مع خطأ قطع محلي $\tilde{\tau}_{i+1}(h) = O(h^{n+1})$.

نبدأ أولًا بافتراض أن $w_i = y(t_i) = \tilde{w}_i$، ونختار سعة خطوة ثابتة h لتوليد التقريبات w_{i+1} و $\tilde{w}_{i+1}$ إلى $y(t_{i+1})$. ومن ثم

$$\begin{aligned}
\tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \phi(t_i, y(t_i), h) \\
&= \frac{y(t_{i+1}) - w_i}{h} - \phi(t_i, w_i, h) \\
&= \frac{y(t_{i+1}) - [w_i + h\phi(t_i, w_i, h)]}{h} \\
&= \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - w_{i+1})
\end{aligned}$$

وبالأسلوب نفسه

$$\tilde{\tau}_{i+1}(h) = \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1})$$

وتمهيدية لذلك فإن

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - w_{i+1})$$
$$= \frac{1}{h}[(y(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1}) + (\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})]$$
$$= \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

ولكن $\tau_{i+1}(h)$ هو $O(h^n)$، و $\tilde{\tau}_{i+1}(h)$ هو $O(h^{n+1})$، ولذا فإن الجزء المعنوي من $\tau_{i+1}(h)$ يجب أن يأتي من

$$\frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

هذا يعطينا تقريبًا سهل الحساب لخطأ القطع المحلي لطريقة $O(h^n)$:

$$\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

وليس الهدف تقدير خطأ القطع المحلي، بل تعديل سعة الخطوة وإبقاءها ضمن حد معين.

ولعمل ذلك؛ نفترض الآن أنه ما دام $\tau_{i+1}(h)$ هو $O(h^n)$، فإن العدد K موجود ومستقل عن h مع

$$\tau_{i+1}(h) \approx Kh^n$$

ولذلك فإن خطأ القطع المحلي الناتج عن تطبيق طريقة من الرتبة n مع سعة خطوة جديدة qh يمكن تقديرها باستخدام التقريبات الأصلية w_{i+1} و $\tilde{w}_{i+1}$

$$\tau_{i+1}(qh) \approx K(qh)^n = q^n(Kh^n) \approx q^n \tau_{i+1}(h) \approx \frac{q^n}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

ولتحديد $\tau_{i+1}(qh)$ بالمقدار ε؛ فإننا نختار q بحيث إن

$$\frac{q^n}{h}|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}| \approx |\tau_{i+1}(qh)| \le \varepsilon$$

ومن ثم

$$q \le \left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/n}$$

أحد الأساليب الشائعة التي تستخدم هذه المتباينة للسيطرة على الخطأ هي طريقة Runge-Kutta-Fehlberg (انظر [Fe]). ويستخدم هذا الأسلوب طريقة Runge-Kutta مع خطأ قطع محلي من الرتبة 5

لقد طوّر إرون فاهلبرغ Erwin Fehlberg هذه وغيرها من تقنيات تصحيح الخطأ، بينما كان يعمل مع وكالة الفضاء الأمريكية NASA في هنتسفيل/ألباما في ستينيات القرن الماضي 1960s. وفي عام 1960 نال ميدالية NASA للإنجاز العلمي المتميّز مقابل عمله هذا.

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

لتقدير الخطأ المحلي في طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4 ومن خلال

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

فإن معادلات المعامل هي

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$
$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_1\right),$$
$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right),$$
$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right),$$
$$k_5 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right),$$
$$k_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).$$

ومن إيجابيات هذه الطريقة أنها تتطلب ستة تقييمات فقط لـ f في كل خطوة. وطرائق Runge–Kutta من الرتبتين 4 و 5 التي تُستخدم معًا عشوائية، وتتطلب (انظر جدول 7.5 في الفصل 4.5) أربعة تقييمات على الأقل لـ f بالنسبة إلى الطريقة من الرتبة 4، بالإضافة إلى ستة أخرى للطريقة من الرتبة 5، وبمجموع لا يقل عن عشرة تقييمات دالة.

في مبرهنة السيطرة على الخطأ error-control theory ثمة قيمة ابتدائية لـ h عند الخطوة (i) استخدِمت لإيجاد القيم الابتدائي لـ w_{i+1} و $\tilde{w}_{i+1}$ التي تؤدي إلى تحديد q لتلك الخطوة، ومن ثم تُعاد الحسابات. وهذه العملية تتطلب ضعف عدد التقييمات الدالية لكل خطوة عند عدم السيطرة على الخطأ. وعمليًا تُختار قيمة q المستخدمة على نحو مختلف نوعًا ما لجعل تكلفة تقييم الدالة المتزايدة مجدية. وتستخدم قيمة q المحددة عند الخطوة (i) لغرضين هما:

- عندما $q < 1$، لرفض الاختيار الأول لـ h عند الخطوة (i)، وتكرار الحسابات مستخدمين qh.
- وعندما $q \geq 1$، لقبول القيمة المحسوبة عند الخطوة (i) مستخدمين سعة الخطوة h، ولتغيير سعة خطوة qh بالنسبة إلى الخطوة $(i + 1)$.

وبسبب مخالفة دلالة تقييم الدالة الواجب دفع ثمنها في حالة تكرار الخطوات، فإن q تُختار بتحفظ. وفي الحقيقة، مع طريقة Runge–Kutta–Fehlberg و $n = 4$ يكون الاختيار الاعتيادي

$$q = \left(\frac{\varepsilon h}{2|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/4} = 0.84\left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/4}$$

في الخوارزمية (3.5) لطريقة Runge–Kutta–Fehlberg، أضيفت الخطوة 9 لاستبعاد تعديلات كبيرة في سعة الخطوة، بغرض تجنب هدر الكثير من الوقت مع سعات صغيرة للخطوة ضمن مناطق تتسم بمخالفات في اشتقاقات y، وكذلك تجنب سعات كبيرة للخطوة التي يمكنها أن تؤدي إلى تخطي مناطق حساسة ما بين الخطوات. وفي بعض الأحيان نجد أن عملية زيادة سعة الخطوة تحذف كليًا من الخوارزمية، وأن عملية تقليل سعة الخطوة تعدّل لتصبح ضمن العملية فقط عند الحاجة إليها لجعل الخطأ تحت السيطرة.

ALGORITHM
الخوارزمية
3.5

طريقة رونج-كوتا-فهلبرك Runge-Kutta-Fehlberg Method

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:
المدخلات: نقاط النهاية a و b، شرط ابتدائي α، حد سماح TOL، أكبر سعة خطوة $hmax$ أصغر سعة خطوة $hmin$.
المخرجات: t, w, h حيث إن w تقرِّب $y(t)$، وقد استُخدِمت سعة الخطوة h، أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة قد تم تجاوزها.

الخطوة	المضمون
1	ضع $t = a$ $w = \alpha$ $h = hmax$ $FLAG = 1$ المخرجات (t, w)
2	ما دام $(FLAG = 1)$، فطبق الخطوات 3 - 11.
3	ضع $K_1 = hf(t, w);$ $K_2 = hf\left(t + \frac{1}{4}h, w + \frac{1}{4}K_1\right);$ $K_3 = hf\left(t + \frac{3}{8}h, w + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2\right);$ $K_4 = hf\left(t + \frac{12}{13}h, w + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right);$ $K_5 = hf\left(t + h, w + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4\right);$ $K_6 = hf\left(t + \frac{1}{2}h, w - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5\right).$
4	ضع $R = \frac{1}{h}\left\|\frac{1}{360}K_1 - \frac{128}{4275}K_3 - \frac{2197}{75240}K_4 + \frac{1}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6\right\|$. (ملحوظة: $R = \frac{1}{h}\|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}\|$).
5	إذا كان $R \le TOL$ فطبّق الخطوتين 6 و7.
6	ضع $t = t + h$ (التقريب مقبول). $w = w + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$.
7	المخرجات (t, w, h).
8	ضع $\delta = 0.84(TOL/R)^{1/4}$.
9	إذا كان $\delta \le 0.1$ ضع $h = 0.1h$ وإذا كان $\delta \ge 4$ ضع $h = 4h$ وما عدا ذلك ضع $h = \delta h$. (احسب h جديدة).



10	إذا كان $h > hmax$ فضع $h = hmax$
11	إذا كان $t \geq b$ فضع $FLAG = 0$ وإذا كان $t + h > b$ فضع $h = b - t$ وإذا كان $h < hmin$ فضع $FLAG = 0;$ المخرجات (تم تجاوز أصغر h). (العملية فشلت).
12	العملية تامة. توقف.

■

مثال 1 نستخدم هنا الخوارزمية (3.5) لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية.

$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5$ التي لها حل $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$.

تتضمن المدخلات حدًّا أقصى $TOL = 10^{-5}$، أعلى سعة خطوة $hmax = 0.25$، وأصغر سعة خطوة $hmin = 0.01$. والنتائج مبينة في جدول (9.5). وآخر عمودين في جدول (9.5) يبينان نتائج طريقة الرتبة الخامسة. وعند قيم صغيرة لـ t، يكون الخطأ أقل مما هو عليه في طريقة الرتبة الرابعة، ولكنه يتجاوز ما هو عليه في طريقة الرتبة الرابعة عندما تزداد قيمة t. ■

جدول 9.5

	RKF-5				RKF-4		
$\lvert y_i - \hat{w}_i \rvert$	$\hat{w}_i$	$\lvert y_i - w_i \rvert$	R_i	h_i	w_i	$y_i = y(t_i)$	t_i
		0.5			0.5	0.5	0
2.424×10^{-7}	0.9204870	1.3×10^{-6}	6.2×10^{-6}	0.2500000	0.9204886	0.9204873	0.2500000
1.510×10^{-6}	1.3964900	2.6×10^{-6}	4.5×10^{-6}	0.2365522	1.3964910	1.3964884	0.4865522
3.136×10^{-6}	1.9537477	4.2×10^{-6}	4.3×10^{-6}	0.2427810	1.9537488	1.9537446	0.7293332
5.242×10^{-6}	2.5864251	6.2×10^{-6}	3.8×10^{-6}	0.2500000	2.5864260	2.5864198	0.9793332
7.895×10^{-6}	3.2604599	8.5×10^{-6}	2.4×10^{-6}	0.2500000	3.2604605	3.2604520	1.2293332
1.096×10^{-5}	3.9520954	1.11×10^{-5}	7×10^{-7}	0.2500000	3.9520955	3.9520844	1.4793332
1.446×10^{-5}	4.6308272	1.41×10^{-5}	1.5×10^{-6}	0.2500000	4.6308268	4.6308127	1.7293332
1.839×10^{-5}	5.2574871	1.73×10^{-5}	4.3×10^{-6}	0.2500000	5.2574861	5.2574687	1.9793332
1.768×10^{-5}	5.3054896	1.77×10^{-5}		0.0206668	5.3054896	5.3054720	2.0000000

ثمة تنفيذ لطريقة Runge-Kutta-Fehlberg متوفرة في Maple باستخدام الأمر dsolve مع خيارات عددية. لنأخذ مسألة القيمة الابتدائية للمثال (1). الأمر

```
>g:=dsolve({D(y)(t)=y(t)-t*t+1,y(0)=0.5},y(t),numeric);
```

يعيد العملية

$$g := \text{proc}(rkf45_x)\ldots \text{ end}$$

يمكننا تقييم y كما هو واضح في مثال مستخدمين

```
>g(2.0);
```

الذي يعطي

$$[t = 2.0, \; y(t) = 5.305471958400194]$$

EXERCISE SET مجموعة التمارين 5.5

1. استخدم طريقة Runge-Kutta-Fehlberg مع $TOL = 10^{-4}$ و $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.05$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0;$ القيمة الحقيقية $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

ب. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1;$ القيمة الحقيقية $y(t) = t + 1/(1 - t)$

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2;$ القيمة الحقيقية $y(t) = t \ln t + 2t$

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ القيمة الحقيقية $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

2. استخدم طريقة Runge-Kutta-Fehlberg مع حد سماح $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = (y/t)^2 + y/t, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1$ مع $hmax = 0.05$ و $hmin = 0.02$.

ب. $y' = \sin t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ مع $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.02$.

ج. $y' = 1/t(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ مع $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.02$.

د. $y' = t^2, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$ مع $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.02$.

3. استخدم طريقة Runge-Kutta-Fehlberg مع $TOL = 10^{-6}$ و $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.05$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 4, \quad y(1) = 1$ القيمة الحقيقية $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ القيمة الحقيقية $y(t) = t\tan(\ln t)$

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = -2$ القيمة الحقيقية $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$

د. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ القيمة الحقيقية $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$

4. طريقة Runge–Kutta–Verner method [Ve] تعتمد على الصيغ

$$w_{i+1} = w_i + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6$$

و

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8$$

حيث إن

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{6}, w_i + \frac{1}{6}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{4h}{15}, w_i + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + \frac{5h}{6}, w_i - \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{12}{5}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5\right),$$

$$k_7 = hf\left(t_i + \frac{h}{15}, w_i - \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5\right),$$

$$k_8 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7\right).$$

إن طريقة الرتبة السادسة $\tilde{w}_{i+1}$ تستخدم لتقدير الخطأ في طريقة الرتبة الخامسة w_{i+1}. ابنِ خوارزمية شبيهة بخوارزمية **Runge–Kutta–Fehlberg**، وكرّر التمرين **(3)** مستخدمًا هذه الطريقة الجديدة.

5. في مبرهنة انتشار مرض وبائي (انظر [Ba1] أو [Ba2])، يمكن نسبيًّا استخدام معادلة تفاضلية ابتدائية لتوقُّع عدد الأشخاص المصابين في المجتمع عند أي زمن بعد أن تُفترَض افتراضات تبسيطية مناسبة. ولنفترض – على نحو خاص – أن الأفراد جميعهم في مجتمع ثابت لديهم الاحتمال نفسه في الإصابة متى كانت هناك حالة إصابة في تلك المنطقة، وافترض $x(t)$ تمثّل عدد الأفراد المعرَّضين للإصابة عند الزمن t، وأن $y(t)$ تمثّل عدد المصابين. يبدو منطقيًّا افتراض كون معدل التغير في عدد المصابين يتناسب مع حاصل ضرب $x(t)$ في $y(t)$ لكون المعدل يعتمد على كليهما. فإذا كان المجتمع كبيرًا كفاية فبافتراض أن $x(t)$ و $y(t)$؛ متصلان، فإن المسألة يمكن وضعها على الصيغة

$$y'(t) = kx(t)\,y(t)$$

حيث k ثابت، وتمثل $x(t) + y(t) = m$ المجتمع الكلي. وهذه المعادلة يمكن كتابتها بحيث تتضمن $y(t)$ فقط على النحو الآتي:

$$y'(t) = k(m - y(t))\,y(t)$$

أ. مفترضين أن $m = 100{,}000,\ y(0) = 1000,\ k = 2 \times 10^{-6}$، وأن الزمن مقيس بالأيام، أوجد تقريبًا لعدد المصابين بعد مرور **30** يومًا.

ب. تسمى المعادلة التفاضلية في الفقرة (أ) بمعادلة برنوللي **Bernoulli equation**، ويمكن تحويلها إلى معادلة تفاضلية خطية في $u(t) = (y(t))^{-1}$. استخدم هذا الأسلوب لإيجاد الحل الصحيح للمعادلة تحت الافتراضات نفسها كما في الفقرة (أ)، ثم قارن قيمة $y(t)$ الحقيقية بذلك التقريب. ماذا يكون $\lim_{t\to\infty} y(t)$؟ وهل يتفق هذا وحدسك؟

6. في التمرين السابق، يبقى المصابون جميعهم في المجتمع لنشر المرض. ولعل الأكثر منطقية أن نقدِّم متغيرًا ثالثًا هو $z(t)$ ليمثّل عدد الأشخاص المستبعَدين من المجتمع الموبوء عند زمن معلوم t تمهيدية الحجر، الشفاء تمهيدية المناعة، أو الموت. وهذا يعقد المسألة، ولكن يمكن ملاحظة (انظر [Ba2]) حل تقريبي يُعطى بالصيغة

$$x(t) = x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)} \quad \text{و} \quad y(t) = m - x(t) - z(t)$$

حيث يمثّل k_1 معدل الإصابة، ويمثّل k_2 معدل العزل (الاستبعاد)، وإن $z(t)$ تُحدّد بالمعادلة التفاضلية

$$z'(t) = k_2\left(m - z(t) - x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)}\right)$$

إن المؤلفين غير ملمّين بأي أسلوب لحل هذه المسألة مباشرة، ولذلك فثمة عملية عددية يجب تطبيقها. أوجد تقريبًا إلى $z(30)$، $y(30)$ و $x(30)$ مفترضًا أن $m = 100{,}000$ و $x(0) = 99{,}000$ و $k_1 = 2 \times 10^{-6}$ و $k_2 = 10^{-4}$.

6.5 طرائق متعددة الخطوات Multistep Methods

تُسمى الطرائق التي نُوقِشت حتى الآن طرائق الخطوة الواحدة **one-step method**؛ لأن تقريب النقطة الشبكية t_{i+1} يتضمن معلومات من نقطة شبكية سابقة واحدة فقط هي t_i. وعلى الرغم من أن هذه الطرائق قد تستخدم معلومات تقييم داليّة عند نقاط ما بين t_i و t_{i+1}، فهي لا تحتفظ بتلك المعلومات لاستخدامها مباشرة في تقريبات مستقبلية. والمعلومات المستخدَمة كلها ضمن هذه الطرائق مستخرجة في الفترة الجزئية التي تجعل الحل قيد التقريب.

وحيث إن الحل التقريبي متوفِّر عند كل واحدة من النقاط الشبكية $t_0, t_1, \ldots, t_i$ قبل ظهور التقريب عند t_{i+1}، ولأن الخطأ $|w_j - y(t_j)|$ يتجه نحو الزيادة مع j، فسيبدو من المنطقي تطوير طرائق تستخدم هذه البيانات السابقة وبدقة أكبر عند تقريب الحل عند t_{i+1}.

وتسمى الطرائق التي تستخدم التقريب عند أكثر من نقطة شبكية واحدة لتحديد التقريب عند النقطة اللاحقة طرائقَ متعددة الخطوات **Multistep Methods**. والتعريف الدقيق لها هو كالآتي بالإضافة إلى تعريف لنوعين من الطرائق متعددة الخطوات.

كان جون كوش آدمز John Couch Adams (1892−1819) مهتمًّا على نحو خاص باستخدام قابليته في الحسابات الرياضية الدقيقة لتفحص مدارات الكواكب. وقد تنبأ بوجود نيبتون **Neptune** من خلال تحليل الحالات اللانظامية في الكوكب أورانوس **Uranus**. كما طوّر تقنيات التكامل العددي؛ للمساعدة على تقريب حل المعادلات التفاضلية

تعريف 14.5 طريقة متعددة الخطوات عددها m لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{22.5}$$

لها معادلة فرق لإيجاد التقريب w_{i+1} عند النقطة الشبكية t_{i+1} معطاة بالمعادلة الآتية، حيث m عبارة عن عدد صحيح أكبر من 1

$$\begin{aligned} w_{i+1} = {} & a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} \\ & + h[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, w_i) + \cdots \\ & + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})], \end{aligned} \tag{23.5}$$

لـ $i = m-1, m, \ldots, N-1$، حيث إن $h = (b-a)/N$ و $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ و $b_0, b_1, \ldots, b_m$ عبارة عن ثوابت، وقيم البداية

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$ ■

محددة. وعندما تكون $b_m = 0$ ، فإن الطريقة تسمى "واضحة أو مفتوحة"؛ لأن المعادلة (23.5) تعطي w_{i+1} بوضوح بدلالة القيم التي حُدِّدت سابقًا. وعندما $b_m \neq 0$ فإن الطريقة تسمى "غير واضحة أو مغلقة"؛ لأن w_{i+1} تظهر في كلا طرفي المعادلة (5.23) ويكون تحديدها غير واضح.

مثال 1 المعادلات

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3 \tag{24.5}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55 f(t_i, w_i) - 59 f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37 f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9 f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

لكلٍّ من $i = 3, 4, \ldots, N-1$، هي طريقة واضحة بأربع خطوات تُعرف بأسلوب آدمز–باشفورث من الرتبة الرابعة **fourth-order Adams–Bashforth technique**.

المعادلات

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2 \tag{25.5}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

لكلٍّ من $i = 2, 3, \ldots, N-1$، هي طريقة واضحة بأربع خطوات تُعرف بأسلوب آدمز–مولتون من الرتبة الرابعة **fourth-order Adams-Moulton technique**. ■

إن تقنيات آدمز – باشفورث Adams – Bashforth تعود إلى J. C. Adams والذي طوَّر هذه التقنيات لتقريب حل مسألة تدفق السائل العائدة الى باشفورث.

كان فورست ري مولتون Forest Ray Moulton (1872–1952) فلكيًا، وقد طوَّر طرق المصحح – المقدر المحسَّنة لحلِّ المعادلات البالستية خلال الحرب العالمية الأولى.

يجب تحديد قيم البداية سواءً في المعادلة (24.5) أو المعادلة (25.5) بافتراض $w_0 = \alpha$ وتوليد بقية القيم من خلال طريقة Runge–Kutta أو ثمة أسلوب خطوة واحدة آخر.

ولتطبيق طريقة واضحة مثل المعادلة (25.5) مباشرة؛ يتحتم علينا حل المعادلة الواضحة w_{i+1}. وليس واضحًا أنه يمكن عمل ذلك عمومًا، أو أن حلًّا وحيدًا لـ w_{i+1} يمكن ظهوره دائمًا.

لبدء اشتقاق طريقة متعددة الخطوات، انظر أن حل مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة (22.5)

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

إذا ما تكاملت على الفترة $[t_i, t_{i+1}]$، تتسم بأن

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt$$

والتمهيدية أن

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt \tag{26.5}$$

ولأنه لا يمكننا عمل تكامل $f(t, y(t))$ دون معرفة الحل $y(t)$ للمسألة، فبدلًا من ذلك نعمل تكاملًا لكثيرة حدود استكمال داخلي $P(t)$ لـ $f(t, y(t))$، المحدد من خلال بعض نقاط البيانات المستخرجة سابقًا $(t_0, w_0), (t_1, w_1), \ldots, (t_i, w_i)$. وعندما نفترض بالإضافة إلى ذلك أن $y(t_i) \approx w_i$، فإن المعادلة (26.5) تصبح

$$y(t_{i+1}) \approx w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(t)\,dt \tag{27.5}$$

وعلى الرغم من إمكانية استخدام أي صيغة لكثيرة حدود استكمال داخلي للاشتقاق، إلا أنه من المناسب جدًّا استخدام صيغة نيوتن للفرق المتراجع **Newton backward-difference**.

ولاشتقاق أسلوب **Adams-Bashforth** الواضح ذي m من الخطوات، ننشئ كثيرة حدود الفرق التراجعي $P_{m-1}(t)$ من خلال

$(t_i, f(t_i, y(t_i))), \ (t_{i-1}, f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))), \ldots, (t_{i+1-m}, f(t_{i+1-m}, y(t_{i+1-m})))$.

ولأن $P_{m-1}(t)$ عبارة عن كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة $m-1$، فإن ثمة عدد ξ_i ضمن (t_{i+1-m}, t_i) يكون موجودًا مع

$$f(t, y(t)) = P_{m-1}(t) + \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!}(t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m})$$

وبتقديم متغير الحل $t = t_i + sh$ مع $dt = h\,ds$ ضمن $P_{m-1}(t)$ وحدّ الخطأ، نحصل على

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(t_i, y(t_i))\,dt$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!}(t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m})\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \nabla^k f(t_i, y(t_i)) h(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$$

$$+ \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))\,ds.$$

تُقيّم التكاملات $(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$ لقيم k المختلفة بسهولة، وهي مبيَّنة في جدول (10.5). وعلى سبيل المثال، عندما $k = 3$ فإن

$$(-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds = -\int_0^1 \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} ds$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (s^3 + 3s^2 + 2s)\,ds$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{s^4}{4} + s^3 + s^2\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

ومن ثم فإن

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt = h\left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(t_i, y(t_i)) + \cdots\right]$$

$$+ \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))\,ds \qquad (28.5)$$

جدول 10.5

k	$(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{5}{12}$
3	$\frac{3}{8}$
4	$\frac{251}{720}$
5	$\frac{95}{288}$

ولأن $s(s+1) \cdots (s+m-1)$ لا تغير الإشارة على [0, 1]، فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكاملات يمكن استخدامها لنستنتج أنه لعددٍ ما μ_i حيث $t_{i+1-m} < \mu_i < t_{i+1}$، فإن حد الخطأ في المعادلة (28.5) يصبح

$$\frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))\,ds$$

$$= \frac{h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1)\,ds$$

أو

$$h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \qquad (29.5)$$

ولكون $y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$، فإن المعادلة (26.5) يمكن كتابتها على النحو الآتي

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(t_i, y(t_i)) + \cdots\right]$$
$$+ h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \qquad (30.5)$$

مثال 2 لاشتقاق أسلوب Adams-Bashforth ذي الخطوات الثلاث؛ نفترض المعادلة (30.5) مع $m = 3$

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + h\left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(t_i, y(t_i))\right]$$
$$= y(t_i) + h\Big\{f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2}[f(t_i, y(t_i)) - f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))]$$
$$+ \frac{5}{12}[f(t_i, y(t_i)) - 2f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))]\Big\}$$
$$= y(t_i) + \frac{h}{12}[23f(t_i, y(t_i)) - 16f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 5f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))]$$

وطريقة Adams-Bashforth ذات الخطوات الثلاث تعطي

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1})] + 5f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

لـ $i = 2, 3, \ldots, N - 1$. ■

ويمكن اشتقاق الطرائق المتعددة الخطوات باستخدام سلسلة تايلور أيضًا. وقد تناولنا مثالًا على العملي المعتمدة في التمرين (12). وقد شُرِح الاشتقاق باستخدام كثيرة حدود لاكرنج للاستكمال الداخلي فترى التمرين (11).

إن خطأ القطع المحلي للطرائق المتعددة الخطوات معرف بقياس الطرائق بخطوة واحدة. وفي حالة الطرائق المتعددة الخطوات، فإن خطأ القطع المحلي يعطي مقياسًا لفشل المعادلة التفاضلية في حل معادلة الفرق.

تعريف 15.5 إذا كان $y(t)$ حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

وكان

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m}$$
$$+ h[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, w_i) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})]$$

هو الخطوة $(i+1)$st من طريقة متعددة الخطوات، فإن خطأ القطع المحلي عند هذه الخطوة هو

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \cdots - a_0 y(t_{i+1-m})}{h} - [b_m f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, y(t_{i+1-m}))] \tag{31.5}$$

لكلٍّ من $i = m-1, m, \ldots, N-1$. ■

مثال 3 لتحديد خطأ القطع المحلي لطريقة Adams–Bashforth ذات الخطوات الثلاث التي اشتُقّت في مثال (2)؛ افترض صيغة الخطأ المعطاة في المعادلة (29.5) والقيمة المناسبة من جدول (10.5)

$$h^4 f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds = \frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))$$

وباستخدام حقيقة أن $f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) = y^{(4)}(\mu_i)$ ومعادلة الفرق التي اشتُقّت في مثال (2)، يكون لدينا

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \frac{1}{12}[23f(t_i, y(t_i)) - 16f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 5f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))\right] = \frac{3h^3}{8} y^{(4)}(\mu_i)$$

لبعض $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$. ■

إن بعض الطرائق المتعددة الخطوات الواضحة مع قيمها الابتدائية، وخطأ القطع المحلي المطلوبة هي كما يلي. واشتقاق هذه الأساليب مشابه للعملية في المثالين (2) و (3).

طريقة آدمز – باشفورث الواضحة ذات الخطوتين
Adams-Bashforth Two-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1,$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})], \tag{32.5}$$

حيث $i = 1, 2, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{5}{12}y'''(\mu_i)h^2$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز – باشفورث الواضحة ذات الخطوات الثلاث
Adams-Bashforth Three-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2,$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2})], \tag{33.5}$$

حيث $i = 2, 3, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{3}{8}y^{(4)}(\mu_i)h^3$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز–باشفورث الواضحة ذات الأربع خطوات
Adams-Bashforth Four-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3 \tag{34.5}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

حيث $i = 2, 3, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{251}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز–باشفورث الواضحة ذات الخطوات الخمس
Adams-Bashforth Five-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3, \quad w_4 = \alpha_4$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}[1901f(t_i, w_i) - 2774f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2616f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 1274f(t_{i-3}, w_{i-3}) + 251f(t_{i-4}, w_{i-4})] \tag{35.5}$$

حيث $i = 4, 5, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{95}{288}y^{(6)}(\mu_i)h^5$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-4}, t_{i+1})$.

تُشتَق الطرائق الضمنية Implicit باستخدام $(t_{i+1}, f(t_{i+1}, y(t_{i+1})))$ بوصفها رأس استكمال داخلي إضافية في تقريب التكامل $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$.

إن من الطرائق الضمنية الأكثر شيوعًا ما يأتي:

طريقة آدمز–مولتون الضمنية ذات الخطوتين
Adams-Moulton Two-Step Implicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})], \tag{36.5}$$

حيث $i = 1, 2, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = -\frac{1}{24}y^{(4)}(\mu_i)h^3$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز–مولتون الضمنية ذات الخطوات الثلاث
Adams-Moulton Three-Step Implicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \tag{37.5}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})],$$

حيث $i = 2, 3, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز–مولتون الضمنية ذات الخطوات الأربع
Adams-Moulton Four-Step Implicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}[251f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 646f(t_i, w_i) - 264f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 106f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 19f(t_{i-3}, w_{i-3})], \tag{38.5}$$

حيث $i = 3, 4, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = -\frac{3}{160}y^{(6)}(\mu_i)h^5$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$.

والمثير للاهتمام هو مقارنة طريقة آدمز–باشفورث الواضحة ذات m من الخطوات بطريقة آدمز–مولتون الضمنية ذات $(m-1)$ من الخطوات. وتتضمن كلتا الطريقتين m من التقييمات لـ f في كل خطوة، مع وجود الحد $y^{(m+1)}(\mu_i)h^m$ ضمن خطأ القطع المحلي لهما. وعمومًا فإن معاملات الحدود التي تتضمن f في خطأ القطع المحلي تكون أصغر في الطرائق الضمنية مقارنة بالطرائق الواضحة. وهذا يؤدي إلى استقرار أكبر مع أخطاء مدورة أصغر بالنسبة إلى الطرائق الضمنية.

مثال 4 لنأخذ مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1 \qquad 0 \le t \le 2 \qquad y(0) = 0.5$$

والتقريبات من خلال طريقة Adams–Bashforth الواضحة ذات الخطوات الأربع، وطريقة Adams–Moulton الضمنية ذات الخطوات الثلاث، وإن كلتا الطريقتين تستخدم $h = 0.2$.

المعادلة التفاضلية لطريقة Adams–Bashforth هي

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

لـ $i = 3, 4, \ldots, 9$. وعند التبسيط واستخدام $f(t, y) = y - t^2 + 1, h = 0.2$ و $t_i = 0.2i$ تصبح

$$w_{i+1} = \frac{1}{24}[35w_i - 11.8w_{i-1} + 7.4w_{i-2} - 1.8w_{i-3} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

والمعادلة التفاضلية لطريقة Adams-Moulton هي

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

لـ $i = 2, 3, \ldots, 9$. وهذه تختصر لتصبح

$$w_{i+1} = \frac{1}{24}[1.8w_{i+1} + 27.8w_i - w_{i-1} + 0.2w_{i-2} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

ولأجل استخدام هذه الطريقة بوضوح؛ فإن حل w_{i+1} يعطي

$$w_{i+1} = \frac{1}{22.2}[27.8w_i - w_{i-1} + 0.2w_{i-2} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

لـ $i = 2, 3, \ldots, 9$.

وقد استخرجت النتائج في جدول (11.5) باستخدام القيم الصحيحة من $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$ لـ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ و α_3 في حالة طريقة Adams-Bashforth الواضحة، ولـ α, α_1 و α_2 في حالة طريقة Adams-Moulton الضمنية. ■

في مثال (4) أعطت طريقة Adams-Moulton الضمنية نتائج أفضل مما أعطته طريقة Adams-Bashforth الواضحة من نفس الرتبة. وعلى الرغم من عمومية الحالة هذه، إلا أن الطرائق الضمنية تتسم بالضعف؛ لأنها تكمن أولًا في وجوب تحويل طريقة التمثيل الجبري الواضح إلى w_{i+1}. هذه العملية غير ممكنة دائمًا، وكما يمكن رؤيته من خلال افتراض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = e^y \qquad 0 \le t \le 0.25 \qquad y(0) = 1$$

جدول 11.5

t_i	الصحيحة	آدمز – باشفورث w_i	الخطأ	آدمز–مواتون w_i	الخطأ
0.0	0.5000000				
0.2	0.8292986				
0.4	1.2140877				
0.6	1.6489406			1.6489341	0.0000065
0.8	2.1272295	2.1273124	0.0000828	2.1272136	0.0000160
1.0	2.6408591	2.6410810	0.0002219	2.6408298	0.0000293
1.2	3.1799415	3.1803480	0.0004065	3.1798937	0.0000478
1.4	3.7324000	3.7330601	0.0006601	3.7323270	0.0000731
1.6	4.2834838	4.2844931	0.0010093	4.2833767	0.0001071
1.8	4.8151763	4.8166575	0.0014812	4.8150236	0.0001527
2.0	5.3054720	5.3075838	0.0021119	5.3052587	0.0002132

ولأن $f(t, y) = e^y$، فإن لطريقة **Adams–Moulton** ذات الخطوات الثلاث معادلة الفرق

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9e^{w_{i+1}} + 19e^{w_i} - 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{i-2}}]$$

وهذه المعادلة لا يمكن حلها بوضوح لـ w_{i+1}.

ويمكننا استخدام طريقة نيوتن أو طريقة القاطع لتقريب w_{i+1}، ولكن هذا من شأنه تعقيد العملية إلى حد كبير. وعمليًّا لا تستخدم الطرائق الواضحة المتعددة الخطوات وفق ما شُرِح، بل إنها بالأحرى تُستخدم لتحسين التقريبات التي ظهرت من خلال الطرائق الواضحة. ويسمى الدمج ما بين الأسلوبين الواضح والضمني "طريقة المتنبئ – المصحح **predictor-corrector method**". تتنبأ الطريقة الواضحة بالتقريب، والطريقة الضمنية تصحح هذا التنبؤ.

لنأخذ الطريقة من الرتبة الرابعة التالية. نحسب في الخطوة الأولى نقاط البداية w_0, w_1, w_2, w_3 لطريقة **Adams–Bashforth** الواضحة ذات الخطوات الأربع، ولعمل ذلك؛ نستخدم طريقة بخطوة واحدة ورتبة 4، وهي طريقة Runge–Kutta من الرتبة 4. بعد ذلك نحسب التقريب $w_4^{(0)}$ إلى $y(t_4)$ مستخدمين طريقة **Adams–Bashforth** الواضحة بمنزلة المتنبئ:

$$w_4^{(0)} = w_3 + \frac{h}{24}[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)]$$

يتحسن هذا التقريب بإدخال $w_4^{(0)}$ ضمن الطرف الأيمن لطريقة **Adams–Moulton** الضمنية بثلاث خطوات، واستخدام تلك الطريقة بمنزلة المصحح. هذا يعطي

$$w_4^{(1)} = w_3 + \frac{h}{24}[9f(t_4, w_4^{(0)}) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)]$$

التقييم الوحيد للدالة الجديد الذي تتطلّبه هذه العملية وهو $f(t_4, w_4^{(0)})$ ضمن معادلة المصحح، والقيم الأخرى جميعها لـ f قد حُسِبت في التقريبات السابقة.

تستخدم القيمة $w_4^{(1)}$ بعد ذلك بمنزلة تقريب إلى $y(t_4)$، ويُعاد أسلوب استخدام طريقة **Adams–Bashforth** بمنزلة المتنبئ وطريقة **Adams–Moulton** بمنزلة المصحح؛ لإيجاد التقريب الابتدائي $w_5^{(0)}$ والتقريب النهائي $w_5^{(1)}$ إلى $y(t_5)$. تستمر هذه العملية إلى حين إيجاد تقريب إلى $y(t_N) = y(b)$.

ويمكن إيجاد تقريبات محسَّنة إلى $y(t_{i+1})$ من خلال تكرار صيغة **Adams-Moulton**

$$w_{i+1}^{(k+1)} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}^{(k)}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

وعلى أي حال تتقارب $\{w_{i+1}^{(k+1)}\}$ نحو التقريب المعطى من خلال الصيغة الواضحة بدلًا من الحل $y(t_{i+1})$، وعادةً ما يكون استخدام تقليص في سعة الخطوة أكثر كفاءةً إذا ما دعت الحاجة إلى دقة أكبر.

وتستند الخوارزمية (4.5) إلى طريقة **Adams-Bashforth** بمنزلة المتنبئ وتكرار واحد لطريقة **Adams-Moulton** بمنزلة المصحح، مع قيم بداية تستخرج من طريقة Runge–Kutta من الرتبة 4.

ALGORITHM

الخوارزمية 4.5

متنبئ- مصحح آدم من الرتبة 4
Adams Fourth-Order Predictor-Corrector

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N+1)$ من الكرّاد المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط النهاية a و b، عدد صحيح N، شرط ابتدائي α.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N+1)$ من قيم t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/N$ $t_0 = a$ $w_0 = \alpha$ المخرجات (t_0, w_0).
2	عند $i = 1, 2, 3$، طبق الخطوات 3 – 5. (احسب القيمة البدائية مستخدمًا طريقة *Runge–Kutta*).
3	ضع $K_1 = hf(t_{i-1}, w_{i-1})$ $K_2 = hf(t_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_1/2)$ $K_3 = hf(t_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_2/2)$ $K_4 = hf(t_{i-1} + h, w_{i-1} + K_3)$
4	ضع $w_i = w_{i-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ $t_i = a + ih$
5	المخرجات (t_i, w_i).
6	عند $i = 4, \ldots, N$، طبق الخطوات 7 – 10.
7	ضع $t = a + ih$ $w = w_3 + h[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)]/24$ (التنبؤ w_i) $w = w_3 + h[9f(t, w) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)]/24$ (صحح w_i)
8	المخرجات (t, w).



9	عند $j = 0, 1, 2$ ضع $t_j = t_{j+1}$ (حضّر الإعادة التالية) $w_j = w_{j+1}$
10	ضع $t_3 = t$ $w_3 = w$
11	توقف.

■

مثال 5

يتضمن جدول (12.5) النتائج المستخرجة باستخدام الخوارزمية (4.5) لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \le t \le 2 \quad y(0) = 0.5$$

مع $N = 10$. النتائج هنا أدق مما هي في مثال (4) التي استخدمت المصحح فقط (أي طريقة Adams–Moulton الضمنية)، ولكن هذا ليس دائمًا.

جدول 12.5

t_i	$y_i = y(t_i)$	w_i	الخطأ $\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8292933	0.0000053
0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
0.8	2.1272295	2.1272056	0.0000239
1.0	2.6408591	2.6408286	0.0000305
1.2	3.1799415	3.1799026	0.0000389
1.4	3.7324000	3.7323505	0.0000495
1.6	4.2834838	4.2834208	0.0000630
1.8	4.8151763	4.8150964	0.0000799
2.0	5.3054720	5.3053707	0.0001013

إدوارد آرثر ملني
(1896–1950)
Edward Arthur Milne
عمل في البحث الباستي خلال الحرب العالمية الأولى. وبعد ذلك في مرصد الفيزياء للطاقة الشمسية في جامعة كامبردج. وفي عام 1929 تم ترشيحه لكرسي روز بول Rouse Ball W. W في جامعة أوكسفورد.

وهناك طرائق أخرى متعددة الخطوات يمكن اشتقاقها باستخدام تكامل كثيرات حدود استكمال داخلي على الفترات بصيغة $[t_j, t_{i+1}]$ لـ $j \le i - 1$، لإيجاد تقريب إلى $y(t_{i+1})$. وعند تكامل كثيرة حدود استكمال داخلي على الفترة $[t_{i-3}, t_{i+1}]$، فإن التمهيدية هي "طريقة ملن Milne's method"

$$w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

التي فيها القطع $\frac{14}{45}h^4 y^{(5)}(\xi_i)$، من أجل قيمة ما $\xi_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$ تستخدم هذه الطريقة أحيانًا كمتنبئ لطريقة سمبسون الضمنية **Simpson's method**.

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i-1}, w_{i-1})]$$

التي لها خطأ قطع محلي $-(h^4/90)y^{(5)}(\xi_i)$ لبعض قيم $\xi_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$، والمستخرجة من خلال تكامل كثيرة حدود استكمال داخلي على الفترة $[t_{i-1}, t_{i+1}]$.

خطأ القطع المحلي المرتبط بطريقة متنبئ – مصحح من نوع Milne Simpson أقل عمومًا من طريقة Adams–Bashforth– Moulto.

إن اسم سمبسون Simpson مرتبط بهذه التقنية؛ لأنها تستند إلى قاعدة سمبسون للتكامل.

لكن لهذا الأسلوب استخدامات محددة؛ بسبب مشاكل تدوير الخطأ التي لا تظهر مع عملية Adams. سنتناول تفاصيل هذه الصعوبة في الفصل (10.5).

EXERCISE SET مجموعة التمارين 6.5

1. استخدم طرائق Adams–Bashforth لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وفي كل حالة استخدم قيم بداية صحيحة، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

ب. $y' = 1 + (t-y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$.

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = t\ln t + 2t$.

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \ 0 \le t \le 1, \ y(0) = 1$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

2. استخدم طرائق Adams-Bashforth لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وفي كل حالة استخدم قيم بداية مستخرجة من طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = \dfrac{2-2ty}{t^2+1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \dfrac{2t+1}{t^2+2}$.

ب. $y' = \dfrac{y^2}{1+t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad (1) = \dfrac{-1}{\ln 2}$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t+1)}$.

ج. $y' = (y^2 + y)/t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = \dfrac{2t}{1-2t}$.

د. $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$.

3. استخدم طرائق Adams-Bashforth لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وفي كل حالة استخدم قيم بداية مستخرجة من طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \dfrac{t}{1+\ln t}$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = t\tan(\ln t)$.

ج. $y' = -(y+1)(y+3), \ 0 \le t \le 2, \ y(0) = -2$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيق $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$.

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t, \ 0 \le t \le 1, \ y(0) = \frac{1}{3}$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$.

4. استخدم طرائق Adams-Moulton جميعها لتقريب حلول التمرين 1 (أ، ج، د). وفي كل حالة استخدم قيم بداية صحيحة، وضمّن حل w_{i+1}، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية.

5. استخدم الخوارزمية (4.5) لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (1).

6. استخدم الخوارزمية (4.5) لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (2).

7. استخدم الخوارزمية (4.5) لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (3).

8. غيّر الخوارزمية (4.5) بحيث يكون بالإمكان تكرار المصحح لعدد p من المرات. كرّر التمرين (7) مع $p = 2, 3$ و 4 من المرات. ما اختيار p الذي يعطي أحسن جواب لكل مسألة للقيمة الابتدائية؟

9. مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = e^y, \quad 0 \le t \le 0.20, \quad y(0) = 1$$

لها حل

$$y(t) = 1 - \ln(1 - et)$$

إن تطبيق طريقة Adams–Moulton بثلاث خطوات على هذه المسألة يعادل إيجاد النقطة الثابتة w_{i+1} لـ

$$g(w) = w_i + \frac{h}{24}(9e^{w} + 19e^{w_i} - 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{i-2}})$$

أ. مع $h = 0.01$، أوجد w_{i+1} من خلال تكرار دالية لـ $i = 2, \ldots, 19$ مستخدمًا قيم بداية صحيحة w_0, w_1 و w_2. استخدم في كل خطوة w_i لتقريب ابتدائي إلى w_{i+1}.

ب. هل ستعمل طريقة نيوتن على تسريع التقارب عما هي مع تكرار دالية؟

10. استخدم طريقة Milne–Simpson Predictor-Corrector لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (3).

11. أ. اشتق المعادلة (32.5) باستخدام صيغة لاكرنج لكثيرة حدود استكمال داخلي.

ب. اشتق المعادلة (34.5) باستخدام صيغة الفرق المتراجع لنيوتن لكثيرة حدود استكمال داخلي.

12. اشتق المعادلة (33.5) من خلال الطريقة الآتية، ضع

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + ahf(t_i, y(t_i)) + bhf(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + chf(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$$

وسّع $y(t_{i+1}), f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$ و $f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$ في سلسلة تايلور حول $(t_i, y(t_i))$، وعدّل معاملات h, h^2, h^3 لإيجاد a, b, c.

13. اشتق المعادلة (36.5) وخطأ القطع المحلي لها باستخدام صيغة مناسبة لكثيرة حدود استكمال داخلي.

14. اشتق طريقة Simpson's من خلال تطبيق قاعدة Simpson's للتكامل

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt$$

15. اشتق طريقة Milne's من خلال تطبيق صيغة Newton–Cotes المفتوحة (المعادلة (29.4)) للتكامل.

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-3}) = \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt$$

16. تحقق من بيانات جدول (10.5).

7.5 طرائق متعددة الخطوات متغيرة السعة
Variable Step-size Multistep Methods

تستخدم طريقة Runge–Kutta–Fehlberg للسيطرة على الخطأ؛ لأنها في كل خطوة بتكلفة إضافية قليلة تعطي تقريبين يمكن مقارنتهما وربطهما بخطأ القطع المحلي. إن أساليب المتنبئ – المصحح تنتج دائمًا اثنين من التقريبات عند كل خطوة، و من ثم فإنهما مرشحان طبيعيان لتبني السيطرة على الخطأ. ولتوضيح عملية السيطرة على الخطأ؛ سننشئ طريقة المتنبئ – المصحح متغيرة السعة مستخدمين طريقة Adams–Bashforth الواضحة بأربع خطوات بمنزلة المتنبئ، وطريقة Adams–Moulton الضمنية بثلاث خطوات بمنزلة المصحح.

وتأتي طريقة Adams–Bashforth بأربع خطوات من العلاقة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}[55f(t_i, y(t_i)) - 59f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$$
$$+ 37f(t_{i-2}, y(t_{i-2})) - 9f(t_{i-3}, y(t_{i-3}))] + \frac{251}{720}y^{(5)}(\hat{\mu}_i)h^5$$

لبعض القيم $\hat{\mu}_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$. بافتراض أن التقريبات $w_0, w_1, \ldots, w_i$ جميعها صحيحة يؤدي إلى خطأ قطع

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{251}{720} y^{(5)}(\hat{\mu}_i) h^4 \tag{39.5}$$

وإن التحليل المماثل لطريقة Adams–Moulton بثلاث خطوات تأتي من

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + 19f(t_i, y(t_i)) - 5f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$$
$$+ f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] - \frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4$$

لبعض القيم $\tilde{\mu}_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$، يؤدي إلى خطأ قطع محلي

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}}{h} = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4 \tag{40.5}$$

وللمضي في ذلك أكثر، يجب أن نفترض أن لقيم h الصغيرة يكون

$$y^{(5)}(\hat{\mu}_i) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$$

إن فاعلية أسلوب السيطرة على الخطأ تعتمد مباشرةً على هذا الافتراض.

وإذا طرحنا المعادلة (40.5) من المعادلة (39.5) يكون لدينا

$$\frac{w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{h^4}{720}[251 y^{(5)}(\hat{\mu}_i) + 19 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)] \approx \frac{3}{8} h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$$

ولذلك

$$y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) \approx \frac{8}{3h^5}(w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}) \tag{41.5}$$

واستخدام هذه التمهيدية لحذف الحد المتضمن $h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$ من المعادلة (40.5) يعطي التقريب لخطأ القطع المحلي لـِ

$$|\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19h^4}{720} \cdot \frac{8}{3h^5} |w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}| = \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{270h}$$

لنفترض أننا الآن نعود إلى المعادلة (40.5) مع سعة خطوة جديدة qh وتوليد تقريبات جديدة $\hat{w}_{i+1}^{(0)}$ و $\hat{w}_{i+1}$، والهدف اختيار q بما يحقق كون خطأ القطع المحلي المعطى بالمعادلة (40.5) محدداً بحد سماح ε المبين مسبقاً. فإذا افترضنا أن القيمة $y^{(5)}(\mu)$ في المعادلة (40.5) المرتبطة بـِ qh مقربة أيضاً باستخدام المعادلة (41.5) فإن

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} = \frac{19q^4h^4}{720} |y^{(5)}(\mu)| \approx \frac{19q^4h^4}{720} \left[\frac{8}{3h^5} |w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}| \right]$$

ونحتاج إلى اختيار q ليكون

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} \approx \frac{19q^4}{270} \frac{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{h} < \varepsilon$$

بمعنى أننا نختار q ليكون

$$q < \left(\frac{270}{19}\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4} \approx 2\left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4}$$

عددًا من افتراضات التقريب قد افتُرِضت في هذا التطوير، لذا تُختار q عمليًا وبتحفظ، وعادة تكون

$$q = 1.5\left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4}$$

إن التغيير في سعة الخطوة للطريقة المتعددة الخطوات أكثر تكلفة من حيث تقييمات الدالة مقارنة بطريقة الخطوة الواحدة، إذ يجب حساب قيم البداية الجديدة المتساوية التباعد. وتمهيدية لذلك نتجاهل عادةً تغيير سعة الخطوة ما دام أن خطأ القطع المحلي ما بين $\varepsilon/10$ و ε، بمعنى أن

$$\frac{\varepsilon}{10} < |\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{270h} < \varepsilon$$

وبالإضافة إلى ذلك، فإن q تعطي حدًّا أعلى لضمان أن تقريبًا دقيقًا واحدًا على غير العادة لا يظهر خطوة ذات سعة كبيرة جدًّا. وتعتمد الخوارزمية (5.5) هذه الحماية مع حد أعلى 4.

وتذكر أنه لكون الطرائق المتعددة الخطوات تتطلب سعة خطوات متساوية لقيم البداية، فإن أي تغيير في سعة الخطوة يتطلب بالضرورة تكرار حساب قيم بداية جديدة عند تلك النقطة. وقد تم ذلك في الخوارزمية (5.5) من خلال استدعاء خوارزمية Runge–Kutta الجزئية (الخوارزمية 2.5).

ALGORITHM
الخوارزمية
5.5

متنبئ- مصحح آدم بسعة خطوة متغير
Adams Variable Step-Size Predictor-Corrector

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:

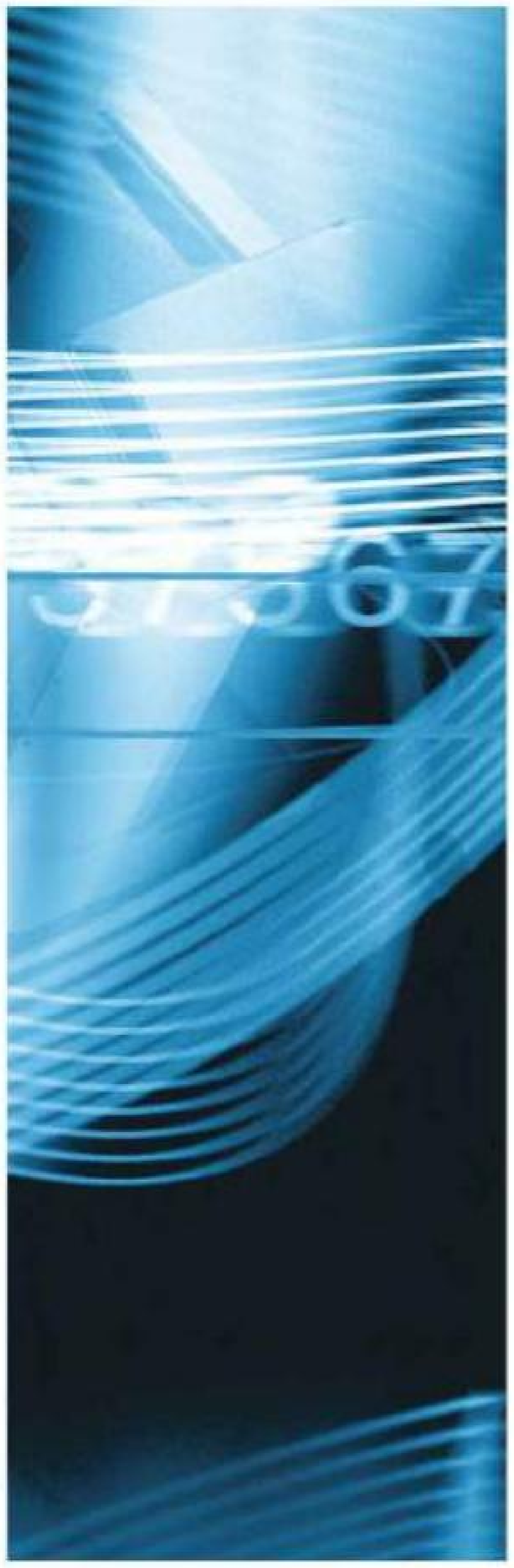
المدخلات: نقاط النهاية a و b، شرط ابتدائي α، حد سماح TOL، أكبر سعة خطوة $hmax$، أصغر سعة خطوة $hmin$.

المخرجات: i, t_i, w_i, h حيث عند الخطوة i، فإن w_i تقرب $y(t_i)$، وقد استُخدِمت سعة الخطوة h أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة قد تم تجاوزها.

الخطوة	المضمون
1	هي خوارزمية جزئية من طريقة Runge–Kutta من الرتبة 4، وتسميتها $RK4(h, v_0, x_0, v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_3)$، وتقبل سعة خطوة h بوصفها مدخلات وقيمة البداية $v_0 \approx y(x_0)$ وتعيد $\{(x_j, v_j) \mid j = 1, 2, 3\}$ معرفًا وفق ما يلي: عند $j = 1, 2, 3$، ضع $K_1 = hf(x_{j-1}, v_{j-1});$ $K_2 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_1/2)$ $K_3 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_2/2)$ $K_4 = hf(x_{j-1} + h, v_{j-1} + K_3)$

$v_j = v_{j-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6;$ $x_j = x_0 + jh.$	
ضع $t_0 = a$ $w_0 = \alpha$ $h = hmax$ $FLAG = 1$ (سيستخدم لتنفيذ الحلقة في الخطوة 4). $LAST = 0$ (سيؤشر متى تحسَب القيمة الأخيرة). المخرجات (t_0, w_0)	2
استدع $RK4(h, w_0, t_0, w_1, t_1, w_2, t_2, w_3, t_3)$ ضع $NFLAG = 1$ (يشير إلى حساب من $RK4$). $i = 4$ $t = t_3 + h$	3
بما أن (FLAG = 1)، فطبّق الخطوات 5 – 20.	4
ضع $WP = w_{i-1} + \frac{h}{24}[55f(t_{i-1}, w_{i-1}) - 59f(t_{i-2}, w_{i-2})$ $+ 37f(t_{i-3}, w_{i-3}) - 9f(t_{i-4}, w_{i-4})];$ (التنبؤ w_i) $WC = w_{i-1} + \frac{h}{24}[9f(t, WP) + 19f(t_{i-1}, w_{i-1})$ $- 5f(t_{i-2}, w_{i-2}) + f(t_{i-3}, w_{i-3})];$ (صحح w_i) $\sigma = 19\|WC - WP\|/(270h).$	5
إذا كان $\sigma \leq TOL$ فطبّق الخطوات 7 – 16. (قُبلت التمهيدية). وإلا فطبق الخطوات 17 – 19. (رفضت التمهيدية).	6
ضع $w_i = WC$ (قبلت التمهيدية). $t_i = t$	7
إذا كان $NFLAG = 1$، فإنه عند $j = i-3, i-2, i-1, i$ تكون المخرجات (j, t_j, w_j, h). (النتائج السابقة مقبولة أيضًا). وما عدا ذلك تكون المخرجات (i, t_i, w_i, h). (قُبلت النتائج السابقة).	8
إذا كان $LAST = 1$ فضع $FLAG = 0$ (الخطوة التالية هي 20). وإلا فطبّق الخطوات 10 – 16.	9
ضع $i = i + 1$ $NFLAG = 0$	10
إذا كان $\sigma \leq 0.1\ TOL$ أو $t_{i-1} + h > b$ فطبق الخطوات 12 – 16. (زد h إذا كانت أدق من المطلوب أو أنقص h لجعل b بمنزلة نقطة شبكية).	11
ضع $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$	12

13	إذا كان $q > 4$ فضع $h = 4h$ ما عدا ذلك ضع $h = qh$.
14	إذا كان $h > hmax$ فضع $h = hmax$.
15	إذا كان $t_{i-1} + 4h > b$ فضع $h = (b - t_{i-1})/4$ $LAST = 1$
16	استدع $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$ ضع $NFLAG = 1$ $i = i + 3$ (الفرع الحقيقي قد استُكمل، والخطوة التالية هي 20).
17	ضع $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$ (فرع فاشل من الخطوة 6، التمهيدية مرفوضة).
18	إذا كان $q < 0.1$ ضع $h = 0.1h$ وإلا فضع $h = qh$.
19	إذا كان $h < hmin$ فضع $FLAG = 0$. المخرجات ($hmin$ تم تجاوزه). وما عدا ذلك إذا كان $NFLAG = 1$ فضع $i = i - 3$ (النتائج السابقة مرفوضة أيضًا). استدع $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$ ضع $i = i + 3$ $NFLAG = 1$
20	ضع $t = t_{i-1} + h$.
21	توقف.



■

جدول 13.5

t_i	$y(t_i)$	w_i	h_i	σ_i	$\|y(t_i) - w_i\|$
0	0.5	0.5			
0.1257017	0.7002323	0.7002318	0.1257017	4.051×10^{-6}	0.0000005
0.2514033	0.9230960	0.9230949	0.1257017	4.051×10^{-6}	0.0000011
0.3771050	1.1673894	1.1673877	0.1257017	4.051×10^{-6}	0.0000017
0.5028066	1.4317502	1.4317480	0.1257017	4.051×10^{-6}	0.0000022
0.6285083	1.7146334	1.7146306	0.1257017	4.610×10^{-6}	0.0000028
0.7542100	2.0142869	2.0142834	0.1257017	5.210×10^{-6}	0.0000035
0.8799116	2.3287244	2.3287200	0.1257017	5.913×10^{-6}	0.0000043
1.0056133	2.6556930	2.6556877	0.1257017	6.706×10^{-6}	0.0000054
1.1313149	2.9926385	2.9926319	0.1257017	7.604×10^{-6}	0.0000066
1.2570166	3.3366642	3.3366562	0.1257017	8.622×10^{-6}	0.0000080
1.3827183	3.6844857	3.6844761	0.1257017	9.777×10^{-6}	0.0000097
1.4857283	3.9697541	3.9697433	0.1030100	7.029×10^{-6}	0.0000108
1.5887383	4.2527830	4.2527711	0.1030100	7.029×10^{-6}	0.0000120
1.6917483	4.5310269	4.5310137	0.1030100	7.029×10^{-6}	0.0000133
1.7947583	4.8016639	4.8016488	0.1030100	7.029×10^{-6}	0.0000151
1.8977683	5.0615660	5.0615488	0.1030100	7.760×10^{-6}	0.0000172
1.9233262	5.1239941	5.1239764	0.0255579	3.918×10^{-8}	0.0000177
1.9488841	5.1854932	5.1854751	0.0255579	3.918×10^{-8}	0.0000181
1.9744421	5.2460056	5.2459870	0.0255579	3.918×10^{-8}	0.0000186
2.0000000	5.3054720	5.3054529	0.0255579	3.918×10^{-8}	0.0000191

مثال 1

يتضمن جدول (13.5) النتائج المستخرجة باستخدام الخوارزمية (5.5) لإيجاد تقريبات لحل مسألة القيمة الابتدائية $y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \le t \le 2 \quad y(0) = 0.5$

التي لها حل $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$. وتتضمن المدخلات حد السماح $TOL = 10^{-5}$، أكبر سعة خطوة $hmax = 0.25$، وأصغر سعة خطوة $hmin = 0.01$. وقد أدرجنا في العمود الخامس من جدول تقدير الخطأ $\sigma_i = \dfrac{19}{270h}\left|w_i - w_i^{(0)}\right| \approx |y(t_i) - w_i|$ ■

EXERCISE SET
مجموعة التمارين 7.5

1. استخدم خوارزمية آدمز المتنبئ – المصحح لسعة خطوة متغير مع حد سماح $TOL = 10^{-4}$ و $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.025$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

ب. $y' = 1 + (t-y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = t + 1/(1-t)$.

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ الحل الحقيقي $y(t) = t\ln t + 2t$.

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. استخدم خوارزمية آدمز المتنبئ – المصحح لسعة خطوة متغير مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = (y/t)^2 + y/t, \ 1 \le t \le 1.2, \ y(1) = 1$ مع الحل الحقيقي $hmax = 0.05$ و $hmin = 0.01$.

ب. $y' = \sin t + e^{-t}, \ 0 \le t \le 1, \ y(0) = 0$ مع الحل الحقيقي $hmax = 0.2$ و $hmin = 0.01$.

ج. $y' = (1/t)(y^2 + y), \ 1 \le t \le 3, \ y(1) = -2$ مع الحل الحقيقي $hmax = 0.4$ و $hmin = 0.01$.

د. $y' = -ty + 4t/y, \ 0 \le t \le 1, \ y(0) = 1$ مع الحل الحقيقي $hmax = 0.2$ و $hmin = 0.01$.

3. استخدم خوارزمية آدمز المتنبئ – المصحح لسعة خطوة متغير مع $TOL = 10^{-6}$، $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.02$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \ 1 \le t \le 4, \ y(1) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \ 1 \le t \le 3, \ y(1) = 0$ الحل الحقيقي $y(t) = t\tan(\ln t)$.

ج. $y' = -(y+1)(y+3), \ 0 \le t \le 3, \ y(0) = -2$ الحل الحقيقي $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.

د. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty, \ 0 \le t \le 2, \ y(0) = \frac{1}{3}$ الحل الحقيقي $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$.

4. أنشئ الخوارزمية متنبئ– مصحح آدم بسعة خطوة متغير بالاعتماد على طريقة Adams–Bashforth ذات الخطوات الخمس وطريقة Adams–Moulton ذات الخطوات الأربع. كرّر التمرين (3) مستخدمًا هذه الطريقة الجديدة.

5. دائرة كهربائية تتضمن مكثفًا بتكثيف ثابت $C = 1.1$ فارادي على التوالي مع مقاوم بمقاومة ثابتة $R_0 = 2.1$ أوم. مُرّرت فولتية $\mathrm{E}(t) = 110\sin t$ عند الزمن $t = 0$ وعندما ترتفع رتبة حرارة المقاوم، فإن المقاومة تصبح دالة للتيار i، $R(t) = R_0 + ki$ حيث $k = 0.9$، والمعادلة التفاضلية لـ $i(t)$ تصبح

$$\left(1 + \frac{2k}{R_0}i\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{R_0C}i = \frac{1}{R_0C}\frac{d\mathrm{E}}{dt}$$

أوجد $i(2)$، مفترضًا أن $i(0) = 0$.

8.5 طرائق الاستكمال الخارجي Extrapolation Methods

استُخدِم الاستكمال الخارجي في الفصل (5.4) لتقريب تكاملات محدودة، حيث وجدنا أنه عن طريق أخذ المعدلات الصحيحة للتقريبات بطريقة شبه المنحرف غير الدقيقة نسبيًا نستطيع عمل تقريبات جديدة، وتكون دقيقة إلى حدٍّ بعيد. وسوف نطبق في هذا الفصل الاستكمال الخارجي لزيادة دقة التقريبات لحل مسائل القيمة الابتدائية. وكما لاحظنا سابقًا، يجب أن يكون للتقريبات الأصلية امتداد خطأ بصيغة معينة لتكون العملية ناجحة.

لتطبيق الاستكمال الخارجي في حل مسائل القيمة الابتدائية؛ فإننا نستخدم أسلوبًا يعتمد على طريقة النقطة الوسطية

$$w_{i+1} = w_{i-1} + 2hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i \geq 1 \qquad (42.5)$$

يتطلب هذا الأسلوب قيمتين للبداية؛ بسبب الحاجة إلى كل من w_0 و w_1 قبل التمكن من تحديد أول تقريب لنقطة وسطية w_2. وإحدى القيمتين عادة هي الشرط الابتدائي لـ $w_0 = y(a) = \alpha$. ولتحديد نقطة البداية الثانية w_1؛ نطبق طريقة أويلر . وتوجد التقريبات اللاحقة من المعادلة (42.5). وبعد سلسلة من تقريبات هذا النوع المتولدة التي تنتهي عند القيمة t، فإننا نجري تصحيحًا لنقطة نهاية يتضمن آخر تقريبين لنقطة النهاية. وهذا يعطي التقريب $w(t, h)$ لـ $y(t)$ وصيغته

$$y(t) = w(t, h) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k h^{2k} \qquad (43.5)$$

حيث إن δ_k عبارة عن ثوابت تعود إلى مشتقات الحل $y(t)$. والنقطة المهمة هي أن δ_k لا تعتمد على سعة الخطوة h. وتوجد تفصيلات هذه العملية في ورقة بحثية لـ Gragg {Gr}.

ولتوضيح أسلوب الاستكمال الخارجي لحل

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

نفترض خطوة بسعة ثابتة h، وأننا نرغب في تقريب $y(t_1) = y(a + h)$.

وبالنسبة إلى خطوة الاستكمال الخارجي الأولى نضع $h_0 = h/2$، ونستخدم طريقة أويلر مع $w_0 = \alpha$ لتقريب $y(a + h_0) = y(a + h/2)$ وهي

$$w_1 = w_0 + h_0 f(a, w_0)$$

وعند تطبيق طريقة النقطة الوسطية مع $t_{i-1} = a$ و $t_i = a + h_0 = a + h/2$ لعمل أول تقريب لـ $y(a + h) = y(a + 2h_0)$ وهو

$$w_2 = w_0 + 2h_0 f(a + h_0, w_1)$$

إن تصحيح نقطة النهاية يُطبّق لإيجاد التقريب النهائي لـ $y(a + h)$ عند سعة خطوة h_0، وهذا يؤدي إلى ظهور التقريب $O(h_0^2)$ إلى $y(t_1)$

$$y_{1,1} = \tfrac{1}{2}[w_2 + w_1 + h_0 f(a + 2h_0, w_2)]$$

لقد وفَّرنا التقريب $y_{1,1}$ تقريبًا، وأهملنا النتائج الوسطية w_1 و w_2.

لإيجاد التقريب التالي $y_{2,1}$ لـِ $y(t_1)$، نضع $h_1 = h/4$، ونستخدم طريقة أويلر مع $w_0 = \alpha$ لإيجاد تقريب لـِ $y(a + h_1) = y(a + h/4)$ الذي سنرمز إليه بـِ w_1:

$$w_1 = w_0 + h_1 f(a, w_0)$$

بعد ذلك نقرب $y(a + 2h_1) = y(a + h/2)$ مع w_2 و $y(a + 3h_1) = y(a + 3h/4)$ مع w_3 حيث

$$w_2 = w_0 + 2h_1 f(a + h_1, w_1) \text{ و } w_3 = w_1 + 2h_1 f(a + 2h_1, w_2)$$

ثم نوجد التقريب w_4 لـِ $y(a + 4h_1) = y(t_1)$ حيث

$$w_4 = w_2 + 2h_1 f(a + 3h_1, w_3)$$

إن تصحيح نقطة النهاية يُطبّق الآن على w_3 و w_4 للحصول على تقريب $O(h_1^2)$ محسن لـِ $y(t_1)$

$$y_{2,1} = \frac{1}{2}[w_4 + w_3 + h_1 f(a + 4h_1, w_4)]$$

وبسبب صيغة الخطأ المعطى في المعادلة (43.5)، فإن التقريبين لـِ $y(a+h)$ يتميزان بالآتي:

$$y(a + h) = y_{1,1} + \delta_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \delta_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \cdots = y_{1,1} + \delta_1 \frac{h^2}{4} + \delta_2 \frac{h^4}{16} + \cdots$$

و

$$y(a + h) = y_{2,1} + \delta_1 \left(\frac{h}{4}\right)^2 + \delta_2 \left(\frac{h}{4}\right)^4 + \cdots = y_{2,1} + \delta_1 \frac{h^2}{16} + \delta_2 \frac{h^4}{256} + \cdots$$

ويمكننا حذف جزء $O(h^2)$ من هذا الخطأ المتقلص من خلال عمل معدل هاتين الصيغتين على نحو مناسب. وعلى نحو خاص، فإذا طرحنا الصيغة الأولى من 4 أمثال الثانية وقسمنا الناتج على 3، يكون لدينا

$$y(a + h) = y_{2,1} + \frac{1}{3}(y_{2,1} - y_{1,1}) - \delta_2 \frac{h^4}{64} + \cdots$$

و من ثم فإن تقريب $y(t_1)$ المعطى من خلال

$$y_{2,2} = y_{2,1} + \frac{1}{3}(y_{2,1} - y_{1,1})$$

له خطأ من رتبة $O(h^4)$.

وباستمرار هذا الأسلوب، نضع بعد ذلك $h_2 = h/6$ ونطبّق طريقة أويلر مرة واحدة، ثم نتبعها بطريقة النقطة الوسطية خمس مرات، وبعد ذلك نستخدم تصحيح نقطة النهاية لتحديد تقريب h^2، $y_{3,1}$ إلى $y(a+h) = y(t_1)$. ويمكن إيجاد معدل هذا التقريب مع $y_{2,1}$ للحصول على تقريب $O(h^4)$ الثاني الذي نرمز إليه بـ $y_{3,2}$. ومن ثم فإن معدل $y_{3,2}$ و $y_{2,2}$ من شأنه إلغاء حدود خطأ $O(h^4)$ وإعطاء تقريب بخطأ من رتبة $O(h^6)$. ويمكن توليد صيغ أخرى من الرتبة أعلى باستمرار العملية.

والفرق المعنوي الوحيد ما بين الاستكمال الخارجي المطبق هنا وذلك الذي استُخدم في تكامل Romberg في الفصل (5.4) يكمن في طريقة اختيار التقسيمات الجزئية. إن لتكامل Romberg صيغة مريحة لتمثيل تقريبات قاعدة Composite Trapezoidal التي تستخدم تقسيمات متتابعة لسعة الخطوة بكرّراد صحيحة .1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... يسمح هذا الإجراء لعملية عمل المعدل بالاستمرار وفق أسلوب سهل المتابعة.

ونحن لا نملك وسائل للحصول على تقريبات منتقاة بسهولة لمسائل القيمة الابتدائية، لذا فإن تقسيمات أساليب الاستكمال الخارجي تُختار لتقليل عدد تقييمات الدالة المطلوبة. وعملية عمل المعدل ناتجة من هذا الاختيار للتقسيم الجزئي، والمبينة في جدول (14.5)، وهي ليست بهذه البدائية، ولكن العملية هي نفسها التي استخدمت في تكامل Romberg.

جدول 14.5

$y_{1,1} = w(t, h_0)$		
$y_{2,1} = w(t, h_1)$	$y_{2,2} = y_{2,1} + \dfrac{h_1^2}{h_0^2 - h_1^2}(y_{2,1} - y_{1,1})$	
$y_{3,1} = w(t, h_2)$	$y_{3,2} = y_{3,1} + \dfrac{h_2^2}{h_1^2 - h_2^2}(y_{3,1} - y_{2,1})$	$y_{3,3} = y_{3,2} + \dfrac{h_2^2}{h_0^2 - h_2^2}(y_{3,2} - y_{2,2})$

الخوارزمية تستخدم نقاطًا مع تقسيمات بالصيغة 2^n و $3 \cdot 2^n$. اختيارات أخرى يمكن استخدامها.

تستخدم الخوارزمية (6.5) أسلوب الاستكمال الخارجي مع متتالية كرّراد صحيحة بصيغة

$q_0 = 2$، $q_1 = 4$، $q_2 = 6$، $q_3 = 8$، $q_4 = 12$، $q_5 = 16$، $q_6 = 24$ و $q_7 = 32$

تُختار سعة خطوة رئيسة h، وتستمر الطريقة باستخدام $h_i = h/q_i$ لكل من $i = 0, \ldots, 7$ لتقريب $y(t+h)$. ويعد الخطأ مسيطرًا عليه على أن تُحسَب التقريبات $y_{1,1}, y_{2,2}, \ldots$ حتى يكون $|y_{i,i} - y_{i-1,i-1}|$ أقل من حد السماح المحدد، وإذا لم تصل إلى حد السماح عند $i = 8$ تخفّض h، ويعاد تطبيق العملية. تحدّد القيمة الدنيا $hmin$ والقيمة العليا $hmax$ لـ h لضمان سيطرة الطريقة. فإذا وجِدت $y_{i,i}$ مقبولة فإن w_1 تعطى لـ $y_{i,i}$، وتبدأ الحسابات مجددًا بتحديد w_2 التي ستقرب $y(t_2) = y(a + 2h)$. وتعاد العملية إلى أن يكون التقريب w_N إلى $y(b)$ قد حدِّد.

ALGORITHM

الخوارزمية

6.5

الاستكمال الخارجي Extrapolation

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

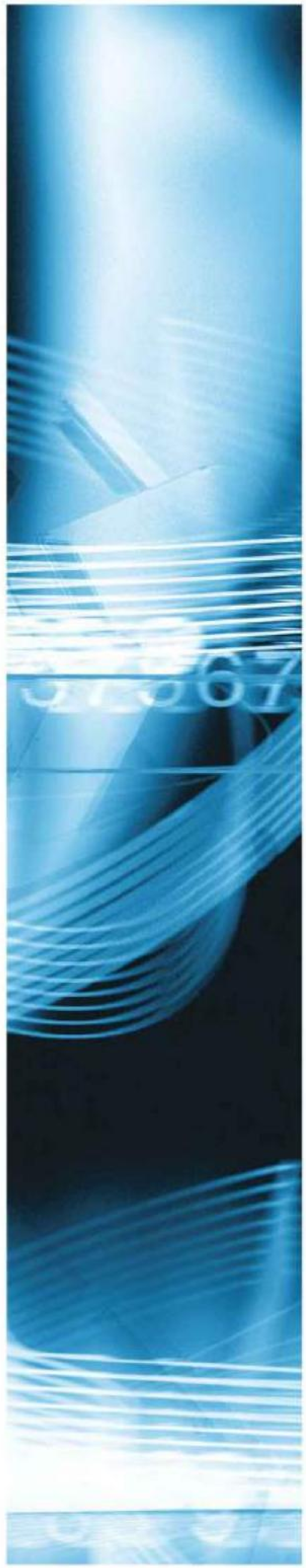
مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:

المدخلات: نقاط النهاية a و b، شرط ابتدائي α، حد سماح TOL، أكبر سعة خطوة $hmax$ أصغر سعة خطوة $hmin$.

المخرجات: T, W, h حيث W تقرّب $y(t)$ وقد استُخدمت سعة الخطوة h، أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة تم تجاوزها.

الخطوة	المضمون
1	هيّئ الصف $NK = (2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32)$.
2	ضع $TO = a$ $WO = \alpha$ $h = hmax$ $FLAG = 1$ ($FLAG$ سيستخدم لتنفيذ الحلقة في الخطوة 4).

3	عند $i = 1, 2, \ldots, 7$ و $j = 1, \ldots, i$ ضع (ملحوظة: $Q_{i,j} = h_j^2/h_{i+1}^2$). $Q_{i,j} = (NK_{i+1}/NK_j)^2$
4	ما دام (FLAG = 1)، فطبّق الخطوات 5 – 20.
5	ضع $k = 1$ $NFLAG = 0$ (وعند حصول الدقة المطلوبة، ضع $NFLAG = 1$)
6	ما دام ($k \leq 8$ و $NFLAG = 0$)، فطبّق الخطوات 7 – 14.
7	ضع $HK = h/NK_k$ $T = TO$ $W2 = WO$ $W3 = W2 + HK \cdot f(T, W2)$ (أولى خطوات أويلر Euler) $T = TO + HK$
8	عند $j = 1, \ldots, NK_k - 1$ ضع $W1 = W2$ $W2 = W3$ $W3 = W1 + 2HK \cdot f(T, W2)$ (طريقة النقطة الوسطية) $T = TO + (j + 1) \cdot HK$
9	ضع $y_k = [W3 + W2 + HK \cdot f(T, W3)]/2$ (تصحّح نقطة النهاية لحساب $y_{k,1}$).
10	إذا كان $k \geq 2$ فطبّق الخطوات 11 – 13. (ملحوظة: $y_{k-1} \equiv y_{k-1,1}, y_{k-2} \equiv y_{k-2,2}, \ldots, y_1 \equiv y_{k-1,k-1}$، لأنه قد حُفظ السطر السابق للجدول فقط).
11	ضع $j = k$ $v = y_1$ (حفظ $y_{k-1,k-1}$)
12	ما دام ($j \geq 2$) فاعمل الآتي: ضع $y_{j-1} = y_j + \dfrac{y_j - y_{j-1}}{Q_{k-1,j-1} - 1}$ (استكمال خارجي لحساب $y_{j-1} \equiv y_{k,k-j+2}$) (ملحوظة: $y_{j-1} = \dfrac{h_{j-1}^2 y_j - h_k^2 y_{j-1}}{h_{j-1}^2 - h_k^2}$) .$j = j - 1$
13	إذا كان $\lvert y_1 - v \rvert \leq TOL$ فضع $NFLAG = 1$ (تُقبَل y_1 بمنزلة w الجديدة).
14	ضع $k = k + 1$.
15	ضع $k = k - 1$.
16	إذا كان $NFLAG = 0$ فطبّق الخطوتين 17 و 18. (التمهيدية مرفوضة). أيضًا طبق الخطوتين 19 و 20. (التمهيدية مقبولة).





17	ضع $h = h/2$ (قيمة جديدة لـ w مرفوضة، أنقص h).
18	إذا كان $h < hmin$ فإن المخرجات ($hmin$ تم تجاوزه). ضع $FLAG = 0$ (فرع صحيح قد استكمل، الخطوة الآتية هي الذهاب إلى الخطوة 4).
19	ضع $WO = y_1$ (قيمة جديدة لـ w مقبولة). ضع $TO = TO + h$ المخرجات (TO, WO, h)
20	إذا كان $TO \geq b$ فضع $FLAG = 0$ (العملية استكملت بنجاح). وما عدا ذلك إذا كان $TO + h > b$ فضع $h = b - TO$ (توقف عند $t = b$) وما عدا ذلك إذا كان $k \leq 3$) و $h < 0.5(hmax)$) فضع $h = 2h$. (زيادة سعة الخطوة إذا أمكن).
21	توقف.

■

مثال 1 لنأخذ مسألة القيمة الابتدائية

$$y = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad y(0) = 0.5$$

التي لها حل $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$. ستُطبّق خوارزمية الاستكمال الخارجي على هذه المسألة مع $h = 0.25$، $TOL = 10^{-10}$ و $hmin = 0.01$ وقد استُخرِج جدول (15.5) ضمن حساب $w_1 \approx y(0.25)$. ■

تتوقف الحسابات مع $w_1 = y_{5,5}$؛ لأن $|y_{5\,5} - y_{4\,4}| \leq 10^{-10}$ وقد قُبلت $y_{5,5}$ بوصفها تقريبًا إلى $y(t_1) = y(0.25)$ تكون المجموعة الكاملة لهذه التقريبات دقيقة، والمواقع المعطاة في جدول (5.16) أيضًا.

جدول 15.5

$y_{1,1} = 0.9187011719$				
$y_{2,1} = 0.9200379848$	$y_{2,2} = 0.9204835892$			
$y_{3,1} = 0.9202873689$	$y_{3,2} = 0.9204868761$	$y_{3,3} = 0.9204872870$		
$y_{4,1} = 0.9203747896$	$y_{4,2} = 0.9204871876$	$y_{4,3} = 0.9204872914$	$y_{4,4} = 0.9204872917$	
$y_{5,1} = 0.9204372763$	$y_{5,2} = 0.9204872656$	$y_{5,3} = 0.9204872916$	$y_{5,4} = 0.9204872917$	$y_{5,5} = 0.9204872917$

جدول 16.5

t_i	$y_i = y(t_i)$	w_i	h_i	k
0.25	0.9204872917	0.9204872917	0.25	5
0.50	1.4256393646	1.4256393646	0.25	5
0.75	2.0039999917	2.0039999917	0.25	5
1.00	2.6408590858	2.6408590858	0.25	5
1.25	3.3173285213	3.3173285212	0.25	4
1.50	4.0091554648	4.0091554648	0.25	3
1.75	4.6851986620	4.6851986619	0.25	3
2.00	5.3054719505	5.3054719505	0.25	3

إن البرهان الذي بيَّنته الطريقة في تقاربات الخوارزمية (6.5) يتضمن نتائج من مبرهنة الجمع التي يمكن إيجادها في ورقة Gragg [Gr] البحثية الأصلية. وهناك عدد آخر من عمليات الاستكمال الخارجي المتوفرة، وبعضها يعتمد أساليب سعة الخطوة. وبشأن أساليب إضافية تستند إلى عملية الاستكمال الخارجي، انظر أوراق Bulirsch and Stoer ([BS1], [BS2], [BS3]) أو كتاب Stetter [Stet]. تتضمن الطرائق المستخدمة في Bulirsch and Stoer استيفاءً داخليًّا مع دوال معقولة بدلًا من كثيرة حدود الاستكمال الداخلي المستخدم في عملية Gragg.

مجموعة التمارين 8.5 EXERCISE SET

1. استخدم خوارزمية الاستكمال الخارجي مع حد سماح $TOL = 10^{-4}$، $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.05$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

ب. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ الحل الحقيقي $y(t) = t \ln t + 2t$.

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. استخدم خوارزمية الاستكمال الخارجي مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = (y/t)^2 + y/t, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1$ مع $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.05$.

ب. $y' = \sin t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ مع $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.25$.

ج. $y' = (1/t)(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ مع $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.5$.

د. $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ مع $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.25$.

3. استخدم خوارزمية الاستكمال الخارجي مع $hmin = 0.05$ و $hmax = 0.5$ ، $TOL = 10$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 4, \quad y(1) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = t/(1 + \ln t)$

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ الحل الحقيقي $y(t) = t\tan(\ln t)$

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = -2$ الحل الحقيقي $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$

د. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ الحل الحقيقي $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$

4. ليمثّل $P(t)$ عدد الأشخاص في مجتمع عند الزمن t، مقيسًا بالسنوات. فإذا كان معدل الولادات b ثابتًا، ومعدل الوفيات d يتناسب مع حجم المجتمع (بسبب الكثافة السكانية المفرطة)، فإن معدل نمو المجتمع مُعطَى من خلال المعادلة اللوجستية

$$\frac{dP(t)}{dt} = bP(t) - k[P(t)]^2$$

حيث $d = kP(t)$ افترض أن $P(0) = 50,976$، $b = 2.9\times 10^{-2}$ و $k = 1.4\times 10^{-7}$ أوجد حجم المجتمع بعد 5 سنوات.

9.5 معادلات عالية الرتبة وأنظمة المعادلات التفاضلية
Higher – Order Equations and Systems of Differential Equations

يتضمن هذا الفصل مقدمة للحل العددي لمسائل القيمة الابتدائية العالية الرتبة. والأساليب المعروضة محددة بتلك التي تتضمن تحويل معادلة عالية الرتبة إلى نظام معادلات تفاضلية

بالرتبة الأولى. وقبل شرح عملية التحويل، نحتاج إلى بعض الملاحظات ذات العلاقة بأنظمة تتضمن معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

إن نظامًا من الرتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى تمتلك الصيغة

$$\frac{du_1}{dt}(t) = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$\frac{du_2}{dt}(t) = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_m}{dt}(t) = f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \tag{44.5}$$

لـ $a \le t \le b$ مع الشروط الابتدائية

$$u_1(a) = \alpha_1,\ u_2(a) = \alpha_2, \dots,\ u_m(a) = \alpha_m \tag{45.5}$$

الهدف هو إيجاد m من الدّوال $u_1, u_2, \dots, u_m$ من شأنها تحقيق كل واحدة من المعادلات التفاضلية مع الشروط الابتدائية جميعها.

ولمناقشة وجود الحلول لأنظمة المعادلات ووحدانيتها؛ فإننا نحتاج إلى توسيع تعريف شرط Lipschitz لدوال بعدة متغيرات.

تعريف 16.5 الدالة $f(t, y_1, \dots, y_m)$ المعرف على المجموعة

$$D = \{(t, u_1, \dots, u_m) \mid a \le t \le b, -\infty < u_i < \infty \text{ لكل } i = 1, 2, \dots, m\}$$ ■

يقال إنه يحقق شرط Lipschitz على D، في المتغيرات $u_1, u_2, \dots, u_m$ في حالة وجود ثابت $L > 0$ حيث

$$|f(t, u_1, \dots, u_m) - f(t, z_1, \dots, z_m)| \le L \sum_{j=1}^{m} |u_j - z_j| \tag{46.5}$$

لكل من $(t, u_1, \dots, u_m)$ و $(t, z_1, \dots, z_m)$ ينتمي إلى D. ■

وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطية، يمكن إثبات أنه إذا كانت f ومشتقاتها الجزئية الأولى متصلة على D، وإذا كان

$$\left|\frac{\partial f(t, u_1, \dots, u_m)}{\partial u_i}\right| \le L$$

لكلٍّ من $i = 1, 2, \dots, m$ و $(t, u_1, \dots, u_m)$ جميعها ضمن D، فإن f يحقق شرط Lipschitz على D مع ثابت Lipschitz L. (انظر [BiR, p. 141])، وفيما يلي مبرهنة الوجود والوحدانية الرئيسة، ويمكن إيجاد برهانها في [BiR, pp. 152–154].

مبرهنة 17.5 افترض أن

$$D = \{(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \mid a \le t \le b, -\infty < u_i < \infty \text{ لكل } i = 1, 2, \dots, m\}$$

وليكن $f_i(t, u_1, \dots, u_m)$ لكل من $i = 1, 2, \dots, m$ متصلًا على D، ويحقق شرط Lipschitz هناك. إن نظام المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى (معادلة 44.5) ضمن الشروط الابتدائية (معادلة 45.5) له حل وحيد $u_1(t), \dots, u_m(t)$ لـ $a \le t \le b$. ■

إن طرائق حل أنظمة المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى عبارة عن تعميمات لطرائق معادلة الرتبة الأولى المفردة التي قد شُرحت مبكرًا ضمن هذه الوحدة. وعلى سبيل المثال فطريقة Runge–Kutta التقليدية من الرتبة 4 المعطاة بالصيغة

$$w_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3),$$

و $w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ لكل من $i = 0, 1, \ldots, N-1$

المستخدمة لحل مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

يمكن تعميمها كما يلي:

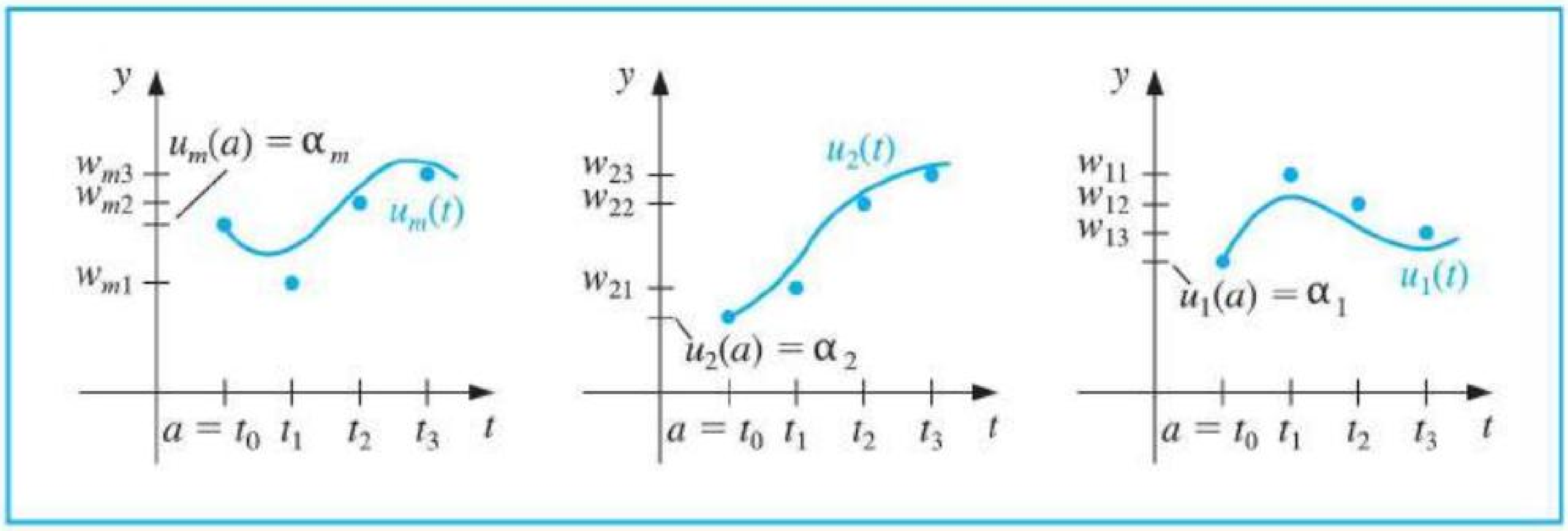
افترض أن اختيار $N > 0$ عدد صحيح، وضع $h = (b-a)/N$. قسّم الفترة $[a, b]$ إلى N من الفترات الجزئية مع النقاط الشبكية

$t_j = a + jh$ لكل من $j = 0, 1, \ldots, N$

استخدم الرمز w_{ij} لكل من $j = 0, 1, \ldots, N$ و $i = 1, 2, \ldots, m$ لتمثيل تقريب إلى $u_i(t_j)$ بمعنى أن w_{ij} تقرب الحل بتسلسل i وهو $u_i(t)$ للمعادلة (44.5) عند النقطة الشبكية t_j بتسلسل j. أما الشروط الابتدائية، فضع: (انظر شكل 5.5)

$$w_{1,0} = \alpha_1, \ w_{2,0} = \alpha_2, \ldots, w_{m,0} = \alpha_m \tag{47.5}$$

شكل 5.5



افترض أن القيم $w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m,j}$ قد حُسِبت، فنجد $w_{1,j+1}$ من خلال حساب $w_{2,j+1}, \ldots, w_{m,j+1}$ من خلال حساب

$$k_{1,i} = hf_i(t_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m,j}), \tag{48.5}$$

$$k_{2,i} = hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \ldots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m}\right) \tag{49.5}$$

$$k_{3,i} = hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \ldots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m}\right) \tag{50.5}$$

$$k_{4,i} = hf_i(t_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \ldots, w_{m,j} + k_{3,m}) \tag{51.5}$$

ثم بعد ذلك

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}) \tag{52.5}$$

وذلك في المعادلات جميعها لكل من $i = 1, 2, \ldots, m$.

ولكل من $i = 1, 2, \ldots, m$ انظر أن القيم $k_{1,1}, k_{1,2}, \ldots, k_{1,m}$ يجب حسابها قبل أن نتمكن من حساب أي من الحدود ذات الصيغة $k_{2,i}$. وعمومًا يجب حساب كل من $k_{l,1}, k_{l,2}, \ldots, k_{l,m}$ قبل أي من القيم $k_{l+1,i}$. تنفذ الخوارزمية (7.5) طريقة من الرتبة الرابعة لأنظمة مسائل القيمة الابتدائية.

ALGORITHM

الخوارزمية

7.5

طريقة رونج-كوتا لأنظمة معادلات تفاضلية

Runge-Kutta Methods for Systems of Differential Equations

لتقريب حل نظام من رتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة أولى

$u'_j = f_j(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ ، $a \le t \le b$ مع $u_j(a) = \alpha_j$

لكل $j = 1, 2, \ldots, m$ عند $(N + 1)$ من الأرقام المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط نهاية a, b، عدد المعادلات m، N عدد صحيح، شروط ابتدائية $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

المخرجات: التقريبات w_j إلى $u_j(t)$ عند $(N + 1)$ من القيم لـ t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$ $t = a$
2	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $w_j = \alpha_j$
3	المخرجات $(t, w_1, w_2, \ldots, w_m)$
4	عند $i = 1, 2, \ldots, N$ طبق الخطوات 5 - 11.
5	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{1,j} = hf_j(t, w_1, w_2, \ldots, w_m)$
6	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{2,j} = hf_j\left(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{1,2}, \ldots, w_m + \frac{1}{2}k_{1,m}\right)$
7	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{3,j} = hf_j\left(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{2,2}, \ldots, w_m + \frac{1}{2}k_{2,m}\right)$
8	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{4,j} = hf_j(t + h, w_1 + k_{3,1}, w_2 + k_{3,2}, \ldots, w_m + k_{3,m})$

9	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $w_j = w_j + (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j})/6$
10	ضع $t = a + ih$
11	المخرجات $(t, w_1, w_2, \ldots, w_m)$
12	توقف.

■

مثال 1

إن قانون Kirchhoff's ينص على أن مجموع كل التغيرات اللحظية في الفولتية حول دائرة مغلقة يساوي صفرًا، ويؤدي هذا القانون إلى أن التيار $I(t)$ في دائرة مغلقة مقدار مقاومتها R ohms وحمل مقداره C، وحث مقداره L، ومصدر فولتية مقداره $E(t)$ يحقق المعادلة

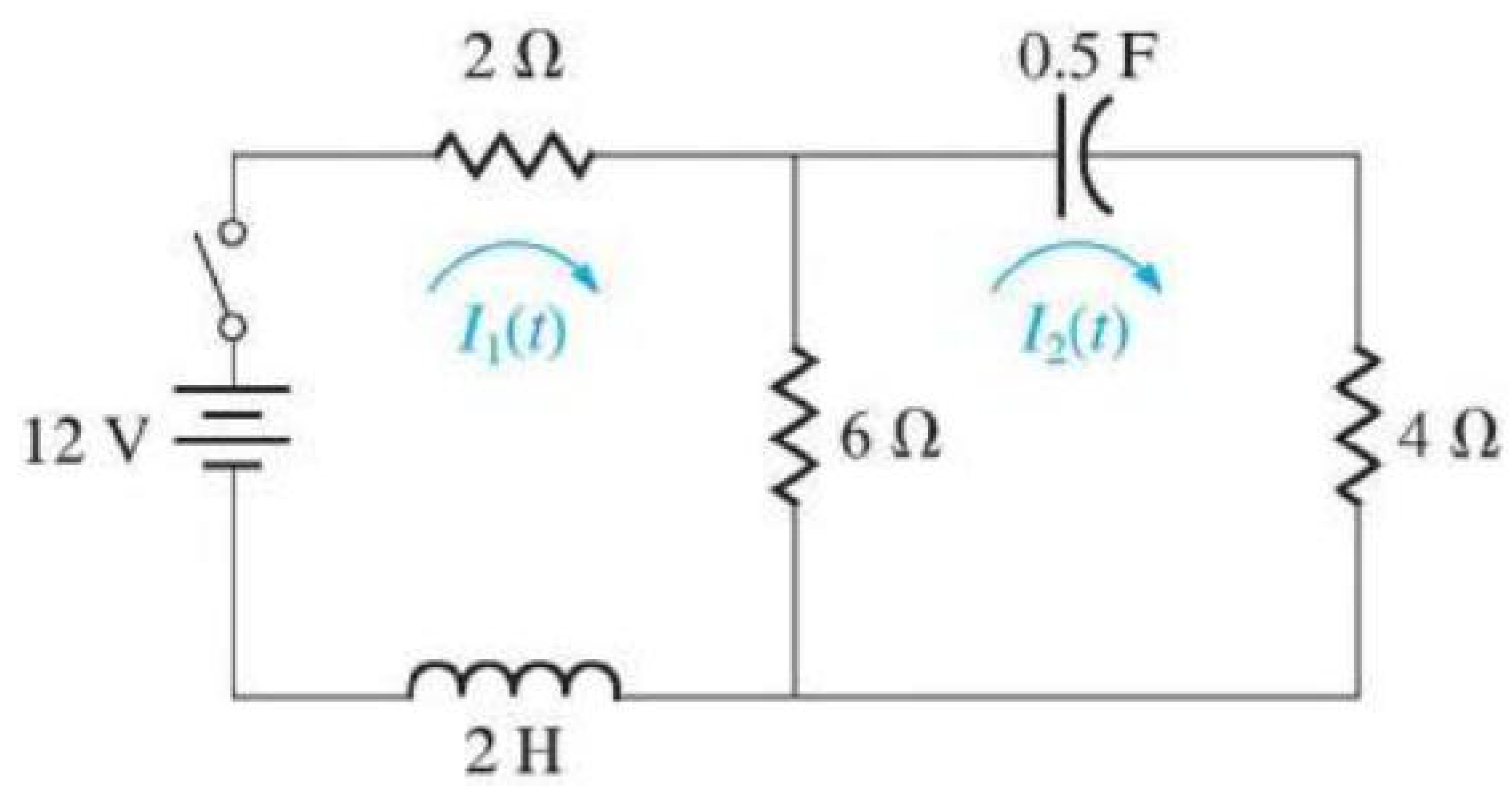
$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = E(t)$$

إن التيارين $I_1(t)$ و $I_2(t)$ في الحلقتين اليسرى واليمنى على التوالي من الدائرة المبينة في شكل (6.5) هما الحل لنظام المعادلات

$$2I_1(t) + 6[I_1(t) - I_2(t)] + 2I_1'(t) = 12$$

$$\frac{1}{0.5}\int I_2(t)\,dt + 4I_2(t) + 6[I_2(t) - I_1(t)] = 0$$

شكل 6.5



افترض أن المفتاح في الدائرة مغلق عند الزمن $t = 0$، وبذلك $I_1(0) = 0$ و $I_2(0) = 0$. طبّق الحل لـِ $I_1'(t)$ في المعادلة الأولى، وفاضل المعادلة الثانية، ومن ثم عوّض $I_1'(t)$ لتحصل على

$$I_1' = f_1(t, I_1, I_2) = -4I_1 + 3I_2 + 6\ , \quad I_1(0) = 0$$

$$I_2' = f_2(t, I_1, I_2) = 0.6I_1' - 0.2I_2 = -2.4I_1 + 1.6I_2 + 3.6\ , \quad I_2(0) = 0$$

والحل الصحيح لهذا النظام هو

$$I_1(t) = -3.375e^{-2t} + 1.875e^{-0.4t} + 1.5$$

$$I_2(t) = -2.25e^{-2t} + 2.25e^{-0.4t}$$

سنطبق طريقة Runge–Kutta من الرتبة 4 لهذا النظام مع $h = 0.1$ وحيث $w_{1,0} = I_1(0) = 0$ و $w_{2,0} = I_2(0) = 0$ فإن

$$k_{1,1} = hf_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0.1\ f_1(0,0,0) = 0.1(-4(0)+3(0)+6) = 0.6$$
$$k_{1,2} = hf_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0.1\ f_2(0,0,0) = 0.1(-2.4(0)+1.6(0)+3.6) = 0.36$$
$$k_{2,1} = hf_1\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, w_{1,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,2}\right) = 0.1\ f_1(0.05, 0.3, 0.18)$$
$$= 0.1(-4(0.3)+3(0.18)+6) = 0.534$$
$$k_{2,2} = hf_2\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, w_{1,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,2}\right) = 0.1\ f_2(0.05, 0.3, 0.18)$$
$$= 0.1(-2.4(0.3)+1.6(0.18)+3.6) = 0.3168$$

وتوليد بقية المدخلات بنفس الأسلوب يعطينا

$$k_{3,1} = (0.1)\,f_1(0.05, 0.267, 0.1584) = 0.54072$$
$$k_{3,2} = (0.1)\,f_2(0.05, 0.267, 0.1584) = 0.321264$$
$$k_{4,1} = (0.1)\,f_1(0.1, 0.54072, 0.321264) = 0.4800912$$

و

$$k_{4,2} = (0.1)\,f_2(0.1, 0.54072, 0.321264) = 0.28162944$$

وتمهيدية لذلك

$$I_1(0.1) \approx w_{1,1} = w_{1,0} + \tfrac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})$$
$$= 0 + \tfrac{1}{6}\,(0.6 + 2(0.534) + 2(0.54072) + 0.4800912) = 0.5382552$$

و

$$I_2(0.1) \approx w_{2,1} = w_{2,0} + \tfrac{1}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) = 0.3196263$$

وتتولّد البيانات المتبقية في جدول (5.17) بنفس الأسلوب.

جدول 17.5

$\lvert I_2(t_j) - w_{2,j}\rvert$	$\lvert I_1(t_j) - w_{1,j}\rvert$	$w_{2,j}$	$w_{1,j}$	t_j
0	0	0	0	0.0
0.5803×10^{-5}	0.8285×10^{-5}	0.3196263	0.5382550	0.1
0.9596×10^{-5}	0.1514×10^{-4}	0.5687817	0.9684983	0.2
0.1216×10^{-4}	0.1907×10^{-4}	0.7607328	1.310717	0.3
0.1311×10^{-4}	0.2098×10^{-4}	0.9063208	1.581263	0.4
0.1240×10^{-4}	0.2193×10^{-4}	1.014402	1.793505	0.5

يحتفظ مابل Maple بالحرف D للتعبير عن المشتقة.

ويمكن استخدام الأمر dsolve في Maple's لحل أنظمة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

ويُعرّف النظام في مثال (1) من خلال

```
>sys2:=D(u1)(t)=-4*u1(t)+3*u2(t)+6,D(u2)(t)=-2.4*u1(t)+1.6*u2(t)+3.6;
```

والشروط الابتدائية من خلال

```
>init2:=u1(0)=0,u2(0)=0;
```

يكون حل النظام من خلال الأمر

```
>sol2:=dsolve({sys2,init2},{u1(t),u2(t)});
```

لإيجاد

$$sol2 := \left\{u1(t) = \frac{3}{2} - \frac{27}{8}e^{(-2t)} + \frac{15}{8}e^{(-2/5t)},\ u2(t) = -\frac{9}{4}e^{(-2t)} + \frac{9}{4}e^{(-2/5t)}\right\}$$

ولحصر الحل في صيغة دالة، استخدم

```
>r1:=rhs(sol2[2]);
```

$$r1 := \frac{3}{2} - \frac{27}{8}e^{(-2t)} + \frac{15}{8}e^{(-2/5t)}$$

و

```
>r2:=rhs(sol2[1]);
```

الذي يعطي استجابة مماثلة.

ولتقييم $u_1(0.5)$ و $u_2(0.5)$، استخدم

```
>evalf(subs(t=0.5,r1));evalf(subs(t=0.5,r2);
```

لتحصل على 1.793527048 و 1.014415451.

سيفشل الأمر dsolve لو كان ثمة حل ضمني لا يمكن إيجاده. ويمكننا في تلك الحالة استخدام معادلة عددية في dsolve التي تطبق أسلوب Runge–Kutta–Fehlberg وعلى سبيل المثال فإن

```
>g:=dsolve({sys2,init2},{u1(t),u2(t)},numeric);
```

يعيد العملية

$$g := \text{proc}(rkf45_x)\ldots\ \text{end proc}$$

ولتقريب الحل عند $t = 0.5$، أدخل

```
>g(0.5);
```

لإيجاد

$$[t = .5,\ u2(t) = 1.01441545470291761,\ u1(t) = 1.79352705243766586]$$

تتضمن العديد من المسائل الفيزيائية المهمة، مثل الدوائر الكهربائية ونظم الاهتزاز مسائل القيمة الابتدائية ومعادلاتها من الرتبة أكبر من 1. ولا يتطلب الأمر أساليب جديدة لحل هذه المسائل، ويمكننا من خلال إعادة تسمية المتغيرات، تخفيض المعادلة التفاضلية من الرتبة العالية إلى نظام معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى، وبعد ذلك نطبّق إحدى الطرائق التي شُرِحت. إن مسألة قيمة ابتدائية عامة من الرتبة m

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)})\ ,\quad a \le t \le b$$

مع شروط ابتدائية $y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \ldots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$ يمكن قلبها إلى نظام

معادلات بصيغة المعادلتين (44.5) و(45.5).

لتكن $u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t),\ldots$ و $u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$. هذا يعطي النظام من الرتبة الأولى

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3, \quad \cdots \quad \frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m$$

و

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = f(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

مع شروط ابتدائية

$$u_1(a) = y(a) = \alpha_1, \quad u_2(a) = y'(a) = \alpha_2, \quad \ldots, \quad u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$$

مثال 2 افترض مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}\sin t \quad \text{لكل} \quad 0 \le t \le 1 \quad \text{مع} \quad y(0) = -0.4, \; y'(0) = -0.6$$

ليكن $u_1(t) = y(t)$ و $u_2(t) = y'(t)$، وهذا يحول المعادلة إلى النظام

$$u_1'(t) = u_2(t), \quad u_2'(t) = e^{2t}\sin t - 2u_1(t) + 2u_2(t)$$

مع شروط ابتدائية

$$u_1(0) = -0.4, \; u_2(0) = -0.6$$

وستُستخدم طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة لتقريب حل هذه المسألة باستخدام $h = 0.1$. الشروط الابتدائية تعطي $w_{1,0} = -0.4$ و $w_{2,0} = -0.6$. المعادلات من (48.5) إلى (51.5) مع $j = 0$ تعطي

$$k_{1,1} = hf_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = hw_{2,0} = -0.06$$

$$k_{1,2} = hf_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = h[e^{2t_0}\sin t_0 - 2w_{1,0} + 2w_{2,0}] = -0.04$$

$$k_{2,1} = hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right) = h[w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}] = -0.062$$

$$k_{2,2} = hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)$$

$$= h\left[e^{2(t_0+0.05)}\sin(t_0 + 0.05) - 2\left(w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}\right) + 2\left(w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)\right]$$

$$= -0.03247644757$$

$$k_{3,1} = h\left[w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right] = -0.06162832238$$

$$k_{3,2} = h\left[e^{2(t_0+0.05)}\sin(t_0 + 0.05) - 2\left(w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{2,1}\right) + 2\left(w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right)\right]$$

$$= -0.03152409237$$

$$k_{4,1} = h\left[w_{2,0} + k_{3,2}\right] = -0.06315240924$$

و

$$k_{4,2} = h\left[e^{2(t_0+0.1)}\sin(t_0+0.1) - 2(w_{1,0}+k_{3,1}) + 2(w_{2,0}+k_{3,2})\right] = -0.02178637298$$

ومن ثم فإن

$$w_{1,1} = w_{1,0} + \tfrac{1}{6}(k_{1,1}+2k_{2,1}+2k_{3,1}+k_{4,1}) = -0.4617333423$$

و

$$w_{2,1} = w_{2,0} + \tfrac{1}{6}(k_{1,2}+2k_{2,2}+2k_{3,2}+k_{4,2}) = -0.6316312421$$

القيمة $w_{1,1}$ تقرب $u_1(0.1) = y(0.1) = 0.2e^{2(0.1)}(\sin 0.1 - 2\cos 0.1)$ والقيمة $w_{2,1}$ تقرب $u_2(0.1) = y'(0.1) = 0.2e^{2(0.1)}(4\sin 0.1 - 3\cos 0.1)$.

وتوجد مجموعة القيم $w_{1,j}$ و $w_{2,j}$ عند $j = 0, 1, \ldots, 10$ باستخدام طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة، وقد عُرِضت في جدول (18.5) وقُورنت بالقيم الحقيقية لـِ $u_1(t) = 0.2e^{2t}(\sin t - 2\cos t)$ و $u_2(t) = u_1'(t) = 0.2e^{2t}(4\sin t - 3\cos t)$. ■

جدول 18.5

t_j	$y(t_j) = u_1(t_j)$	$w_{1,j}$	$y'(t_j) = u_2(t_j)$	$w_{2,j}$	$\|y(t_j) - w_{1,j}\|$	$\|y'(t_j) - w_{2,j}\|$
0.0	−0.40000000	−0.40000000	−0.6000000	−0.60000000	0	0
0.1	−0.46173297	−0.46173334	−0.6316304	−0.63163124	3.7×10^{-7}	7.75×10^{-7}
0.2	−0.52555905	−0.52555988	−0.6401478	−0.64014895	8.3×10^{-7}	1.01×10^{-6}
0.3	−0.58860005	−0.58860144	−0.6136630	−0.61366381	1.39×10^{-6}	8.34×10^{-7}
0.4	−0.64661028	−0.64661231	−0.5365821	−0.53658203	2.03×10^{-6}	1.79×10^{-7}
0.5	−0.69356395	−0.69356666	−0.3887395	−0.38873810	2.71×10^{-6}	5.96×10^{-7}
0.6	−0.72114849	−0.72115190	−0.1443834	−0.14438087	3.41×10^{-6}	7.75×10^{-7}
0.7	−0.71814890	−0.71815295	0.2289917	0.22899702	4.05×10^{-6}	2.03×10^{-6}
0.8	−0.66970677	−0.66971133	0.7719815	0.77199180	4.56×10^{-6}	5.30×10^{-6}
0.9	−0.55643814	−0.55644290	1.534764	1.5347815	4.76×10^{-6}	9.54×10^{-6}
1.0	−0.35339436	−0.35339886	2.578741	2.5787663	4.50×10^{-6}	1.34×10^{-5}

فـي Maple المشـتقة اليونانيـة $y^{(n)}(t)$ محددة بـ (D@@n)(y)(t).

يمكننا أيضًا تطبيق dsolve من Maple على معادلات برتب أعلى. ولتعريف المعادلة التفاضلية في مثال (2)، استخدم

```
>def2:=(D@@2)(y)(t)-2*D(y)(t)+2*y(t)=exp(2*t)*sin(t);
```

ولوصف الشروط الابتدائية، استخدم

```
>init2:=y(0)=-0.4,  D(y)(0)=-0.6;
```

ويستخرج الحل من خلال الأمر

```
>sol2:=dsolve({def2,init2},y(t));
```

لإيجاد

$$\text{sol2} := \; y(t) = -\frac{2}{5}e^{(2t)}\cos(t) + \frac{1}{5}e^{(2t)}\sin(t)$$

ولحصر الحل في صيغة دالة باستخدام

```
>g:=rhs(sol2);
```

ولإيجاد $y(1.0) = g(1.0)$، أدخل

```
>evalf(subs(t=1.0,g));
```

الذي يعطي التمهيدية 0.3533943558 −.

وطريقة Runge–Kutta–Fehlberg متوفرة أيضًا لمعادلات برتب أعلى من خلال الأمر dsolve مع خيار عددي. ندخل الأمر

```
>g:=dsolve({def2,init2},y(t),numeric);
```

مع استجابة **Maple**

$$g := \; \text{proc}(rkf45_x) \ldots \; \text{end proc}$$

ويمكننا تقريب $y(1.0)$ باستخدام الأمر

```
>g(1.0);
```

لنحصل على

$$\left[t = 1.0,\, y(t) = -.353394346807534676,\, \frac{\partial}{\partial t}y(t) = 2.57874665940482072\right]$$

يمكن توسيع طرائق الخطوة الواحدة الأخرى للنظم بالأسلوب نفسه، وعند توسيع طرائق سيطرة الخطأ مثل طريقة Runge–Kutta–Fehlberg، يجب فحص دقة كل مركبة من الحل العددي $(w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{mj})$. وفي حالة كون أيٍّ من هذه المركبات غير دقيقة، يجب إعادة حساب الحل العددي $(w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{mj})$ برمته.

ويمكن توسيع طرائق متعددة الخطوات وأساليب المتنبئ – المصحح أيضًا للنظم. وفي حالة استخدام السيطرة على الخطأ مرة أخرى، فإن كل مركبة يجب أن تكون دقيقة. وإن توسيع أسلوب الاستكمال الخارجي للأنظمة ممكن أيضًا، لكن ستشمل الرموز إلى حدٍّ ما. وإذا كان هذا الموضوع يستقطب اهتمامك فانظر [HNW1].

إن نظريات التقارب وتقديرات الخطأ للأنظمة هي نفسها التي تناولناها في الفصل (5.10 لمعادلة مفردة، فضلًا عن أن الحدود معطاة بدلالة صيغ المتجه، وهو الموضوع الذي سنتناوله في الباب السابع. ([Gea1,pp. 45–72] مصدر جيد لهذه النظريات.

مجموعة التمارين 9.5 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة Runge–Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأولى، وقارن النتائج بالحلول الحقيقية.

أ.
$$u_1' = 3u_1 + 2u_2 - (2t^2+1)e^{2t}, \quad u_1(0) = 1$$
$$u_2' = 4u_1 + u_2 + (t^2+2t-4)e^{2t}, \quad u_2(0) = 1; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.2$$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} + t^2e^{2t}$ و $u_1(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t}$

ب. $u_1' = -4u_1 - 2u_2 + \cos t + 4\sin t, \quad u_1(0) = 0$
$u_2' = 3u_1 + u_2 - 3\sin t, \quad u_2(0) = -1; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.1$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}$ و $u_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t$

ج. $u_1' = u_2, \quad u_1(0) = 1$
$u_2' = -u_1 - 2e^t + 1, \quad u_2(0) = 0$
$u_3' = -u_1 - e^t + 1, \quad u_3(0) = 1; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.5$

الحلول الحقيقية $u_3(t) = -\sin t + \cos t$ و
$u_1(t) = \cos t + \sin t - e^t + 1, \quad u_2(t) = -\sin t + \cos t - e^t$

د. $u_1' = u_2 - u_3 + t, \quad u_1(0) = 1$
$u_2' = 3t^2, \quad u_2(0) = 1$
$u_3' = u_2 + e^{-t}, \quad u_3(0) = -1; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.1$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = t^3 + 1$ ، $u_1(t) = -0.05t^5 + 0.25t^4 + t + 2 - e^{-t}$ و
$u_3(t) = 0.25t^4 + t - e^{-t}$

2. استخدم طريقة Runge–Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأولى، وقارن النتائج بالحلول الحقيقية.

أ. $u_1' = u_1 - u_2 + 2, \quad u_1(0) = -1$
$u_2' = -u_1 + u_2 + 4t, \quad u_2(0) = 0; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.1$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + t^2 - \frac{1}{2}$ و $u_1(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + t^2 + 2t - \frac{1}{2}$

ب. $u_1' = \frac{1}{9}u_1 - \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{9}t^2 + \frac{2}{3}, \quad u_1(0) = -3$
$u_2' = u_2 + 3t - 4, \quad u_2(0) = 5; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.2$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = 4e^t - 3t + 1$ و $u_1(t) = -3e^t + t^2$

ج. $u_1' = u_1 + 2u_2 - 2u_3 + e^{-t}, \quad u_1(0) = 3$
$u_2' = u_2 + u_3 - 2e^{-t}, \quad u_2(0) = -1$
$u_3' = u_1 + 2u_2 + e^{-t}, \quad u_3(0) = 1; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.1$

الحلول الحقيقية $u_1(t) = -3e^{-t} - 3\sin t + 6\cos t$ و $u_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{10}\sin t - \frac{21}{10}\cos t - \frac{2}{5}e^{2t}$
و $u_3(t) = -e^{-t} + \frac{12}{5}\cos t + \frac{9}{5}\sin t - \frac{2}{5}e^{2t}$.

د. $u_1' = 3u_1 + 2u_2 - u_3 - 1 - 3t - 2\sin t, \quad u_1(0) = 5$
$u_2' = u_1 - 2u_2 + 3u_3 + 6 - t + 2\sin t + \cos t, \quad u_2(0) = -9$
$u_3' = 2u_1 + 4u_3 + 8 - 2t, \quad u_3(0) = -5; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.2$

الحلول الحقيقية $u_3(t) = 2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-2t} - 2$
و $u_1(t) = 2e^{3t} + 3e^{-2t} + 1, \; u_2(t) = -8e^{-2t} + e^{4t} - 2e^{3t} + \sin t$.

3. استخدم خوارزمية Runge–Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأعلى، وقارن النتائج بالحلول الحقيقية.

أ. $y'' - 2y' + y = te^t - t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$ عند $h = 0.1$

الحلول الحقيقية $y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2$.

ب. $t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3\ln t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$ عند $h = 0.1$

الحلول الحقيقية $y(t) = \frac{7}{4}t + \frac{1}{2}t^3\ln t - \frac{3}{4}t^3$.

ج. $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0$ عند $h = 0.2$

الحلول الحقيقية $y(t) = \frac{43}{36}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{1}{6}te^t$

د. $t^3y''' - t^2y'' + 3ty' - 4y = 5t^3\ln t + 9t^3, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 3$

مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = -t^2 + t\cos(\ln t) + t\sin(\ln t) + t^3\ln t$

4. استخدم خوارزمية Runge–Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأعلى، وقارن النتائج بالحلول الحقيقية:

أ. $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = y'(0) = 2$ عند $h = 0.1$

الحلول الحقيقية $y(t) = 2e^{2t} - e^t + e^{-t}$

ب. $t^2y'' + ty' - 4y = -3t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 3$ عند $h = 0.2$

الحلول الحقيقية $y(t) = 2t^2 + t + t^{-2}$

ج. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 9$ عند $h = 0.2$

الحلول الحقيقية $y(t) = e^{-t} + e^{2t} + e^{-2t}$

د. $t^3y''' + t^2y'' - 2ty' + 2y = 8t^3 - 2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 8, \quad y''(1) = 6$ عند $h = 0.1$

الحلول الحقيقية $y(t) = 2t - t^{-1} + t^2 + t^3 - 1$

5. غيّر خوارزمية متنبئ- مصحح آدم من الرتبة 4 لإيجاد حلول تقريبية لأنظمة معادلات من الرتبة أولى.

6. كرّر التمرين (2) مستخدمًا الخوارزمية التي طوّرت في التمرين (5).

7. كرّر التمرين (1) مستخدمًا الخوارزمية التي طوّرت في التمرين (5).

8. افترض أن الرقاص الموضح في المثال السابق لهذا الفصل بطول 2 ft وأن $g = 32.17$ ft/s^2 مع $h = 0.1$ s. قارن الزاوية θ الناتجة من مسألتي القيمة الابتدائية الآتيتين عند $t = 0, 1$ و 2 s

أ. $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{6}, \quad \theta'(0) = 0$$

ب. $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{6}, \quad \theta'(0) = 0$$

9. إن دراسة النماذج الرياضية للتنبؤ بديناميكية مجتمع تنافس الأنواع لها صلة بأعمال مستقلة نُشِرت في بدايات هذا القرن من قبل A.J. Lotka و V. Volterra. لنأخذ مسألة التنبؤ بمجتمع من نوعين، أحدهما من النوع المفترس وحجم مجتمعه في الزمن t هو $x_2(t)$، ويقتات على النوع الآخر الذي هو الفريسة، وحجم مجتمعه $x_1(t)$. سنفترض توفر ما يكفي من القوت لتقتات الفريسة عليه، وأن معدل توالده عند أي زمن يتناسب مع حجم المجتمع الحي في ذلك الوقت ويساوي $k_1x_1(t)$. ويعتمد معدل وفيات الفريسة على عددها وعدد المفترسين الأحياء في ذلك الوقت. وللتبسيط؛ لنفترض أن معدل وفيات الفريسة هو $k_2x_1(t)x_2(t)$، ومن جانبٍ آخر يعتمد معدل ولادات المفترس على إمدادات الغذاء $x_1(t)$، بالإضافة إلى عدد المفترسين المتاح لأغراض التوالد. لذا نفترض أن معدل ولادات المفترس هو $k_3x_1(t)x_2(t)$. ومعدل وفيات المفترس سوف يكون متناسبًا مع عدد المفترسين الأحياء في زمن معين يساوي $k_4x_2(t)$. ولما كان $x_1'(t)$ و $x_2'(t)$ يمثلان التغير في مجتمعي الفريسة والمفترس على التوالي نسبة إلى الزمن، فإن المسألة يمكن وضعها على صورة نظام لمعادلات تفاضلية لاخطّيّة

$$x_2'(t) = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t) \quad \text{و} \quad x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t)$$

حلّ هذا النظام لـ $0 \le t \le 4$ مفترضًا أن المجتمع الابتدائي للفريسة هو 1000 وللمفترس 500، والثوابت هي $k_1 = 3, k_2 = 0.002, k_3 = 0.0006$ و $k_4 = 0.5$. ارسم رسمًا بيانيًّا لحلول هذه المسألة، ورسمًا بيانيًّا للمجتمعين مع الزمن، ووضح الظاهرة الفيزيائية الممثّلة. وهل هناك حل مستقر لنموذج المجتمع هذا؟ وإذا كان كذلك فلأي قيم x_1 و x_2 يكون الحل مستقرًّا؟

10. في التمرين (9) افترضنا مسألة التنبؤ للمجتمع في نموذج المفترس–الفريسة. وإن مسألة أخرى

من هذا النوع تأخذ في الحسبان تنافسَ النوعين على نفس كمية الغذاء. فإذا كانت $x_1(t)$ و$x_2(t)$ ترمزان إلى عدد الأحياء من النوعين عند الزمن t فإنه غالبًا ما يفترض الآتي: على الرغم من أن معدل الولادات لكل نوع يتناسب مع عدد الأحياء من ذلك النوع عند ذلك الزمن، إلا أن معدل الوفيات لكل نوع يتناسب مع مجموع كلا النوعين. سنفترض أن مجتمع زوج معين من الأنواع موضح في المعادلتين

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)[4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t)]$$

و

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)[2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)]$$

فإذا كان معروفًا أن المجتمع الابتدائي لكل نوع هو 10000 فأوجد حلًّا لهذا النظام $0 \le t \le 4$. هل هناك حل مستقر لنموذج المجتمع هذا؟ وإذا كان كذلك فلأي قيم x_1 و x_2 يكون الحل مستقرًّا؟

10.5 الاستقرارية Stability

تناولنا عددًا من الطرائق ضمن هذا الباب لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية. وعلى الرغم من توفر العديد من الأساليب الأخرى، إلا أننا اخترنا الطرائق المبيَّنة هنا؛ لأنها تحقق ثلاثة معايير عمومًا:

- إن تكوينها عملية واضحة على نحو كافٍ لجعلك تفهم كيف تعمل، ولماذا.
- واحدة أو أكثر من هذه الطرائق ستعطي نتائج وافية لغالبية المسائل التي تواجه الطلبة في العلوم والهندسة.
- تستند غالبية الأساليب الأكثر تقدمًا وتعقيدًا إلى واحدة أو مجموعة من العمليات الموضحة هنا.

نناقش في هذا الفصل لماذا تعطي هذه الطرائق نتائج وافية، حيث إن بعض الطرائق الأخرى المماثلة ليست كذلك.

وقبل بدء نقاشنا هذا، نحتاج إلى عرض تعريفين متعلِّقين بتقارب طرائق معادلة الفرق بخطوة واحدة لحل المعادلة التفاضلية مع تناقص سعة الخطوة.

تعريف 18.5

طريقة الخطوة الواحدة تكون ثابتة عندما تكون معادلة الفرق للطريقة تقترب من المعادلة التفاضلية مع اقتراب حجم الخطوة للصفر.

نقول إن طريقة معادلة الفرق بخطوة واحدة مع خطأ قطع محلي $\tau_i(h)$ عند الخطوة i نقول متسقة مع المعادلة التفاضلية التي تقربها إذا كان

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le N} |\tau_i(h)| = 0$$

■

انظر أن هذا التعريف هو تعريف محلي؛ لأننا نفترض لكل من القيم $\tau_i(h)$ أن التقريب w_{i-1} والحل الصحيح $y(t_{i-1})$ هما نفس الشيء. وتكمن السبل الأخرى الواقعية لتحليل الآثار الناتجة عن جعل h صغيرة في تحديد الأثر الكلي للطريقة. وهذا الأثر هو أكبر خطأ للطريقة خلال كامل مدى التقريب، مفترضين فقط أن الطريقة تعطي التمهيدية الصحيحة عند القيمة الابتدائية.

تعريف 19.5

تكون الطريقة تقاربية عندما يقترب حل معادلة الفـرق من حل المعادلة التفاضلية مع اقتراب حجم الخطوة للصفر.

يقال إن طريقة معادلة الفرق بخطوة واحدة متقاربة نسبة إلى المعادلة التفاضلية التي تقربها إذا كان

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le N} |w_i - y(t_i)| = 0$$

حيث يمثِّل $y_i = y(t_i)$ القيمة الصحيحة لحل المعادلة التفاضلية و w_i هو التقريب المستخرَج من طريقة الفرق عند الخطوة i.

■

ومن خلال فحص المتباينة (10.5) من الفصل (2.5) بصيغة حد الخطأ لطريقة Euler، يمكننا القول إنه في ظل فرضيات المبرهنة (9.5) يكون

$$\max_{1\leq i\leq N}|w_i - y(t_i)| \leq \frac{Mh}{2L}|e^{L(b-a)} - 1|$$

وبذلك فإن طريقة Euler متقاربة بالنسبة إلى معادلة تفاضلية تحقق شروط هذا التعريف، ومعدل التقارب هو $O(h)$.

الطريقة المستقرة هي التي تعتمد نتائجها باستمرار على البيانات الابتدائية.

إن الطريقة المتسقة بخطوة واحدة تمتاز باقتراب معادلة الفرق لهذه الطريقة من المعادلة التفاضلية عندما تقترب سعة الخطوة إلى الصفر، لذا فإن خطأ القطع المحلي لطريقة متسقة يقترب إلى الصفر مع اقتراب سعة الخطوة من الصفر.

أما النوع الآخر من حد الخطأ لمسألة ما تظهر عند استخدام طرائق الفرق لتقريب حلول المعادلات التفاضلية فإنه ناتج عن عدم استخدام نتائج صحيحة. في التطبيق العملي، لا الشروط الابتدائية ولا العمليات الحسابية المتبعة بعد ذلك تكون ممثَّلة بدقة بسبب خطأ التدوير المرتبط بالعمليات الحسابية محدودة المواقع العشرية. ولقد رأينا في الفصل (2.5) أن هذا الافتراض يمكن أن يؤدي إلى مصاعب حتى مع طريقة Euler المتقاربة. ولتحليل هذه الحالة جزئيًّا؛ سنحاول تحديد أي الطرائق مستقرة؛ لكون تغييرات أو تشويشات صغيرة في الشروط الابتدائية تنتج في المقابل تغييرات صغيرة في التقريبات التي تلي ذلك.

ولأن الأساس في استقرارية معادلة الفرق بخطوة واحدة يكون إلى حد ما مماثلًا لشرط المعادلة التفاضلية الجيدة التقديم، فإنه ليس بمستغرب أن يظهر شرط Lipschitz هنا، كما حدث في المبرهنة المقابلة للمعادلات التفاضلية، المبرهنة (6.5).

إن الجزء (i) من المبرهنة التالية يأخذ في الحسبان استقرارية طريقة الخطوة الواحدة، وبرهان هذه التمهيدية ليس صعبًا وقد أُخذ في الحسبان في التمرين (1). والجزء (ii) من المبرهنة (20.5) يتضمن شروطاً وافية لطريقة متسقة لكي تكون متقاربة. ويبرر الجزء (iii) الملاحظة التي ظهرت في الفصل (5.5) حول السيطرة على الخطأ التام لطريقة ما من خلال السيطرة على خطأ القطع المحلي له، الذي يؤدي إلى أنه حينما يكون للخطأ بالقطع المحلي معدل تقارب $O(h^n)$ فسيكون للخطأ الكلي نفس معدل التقارب. وإن برهان الجزأين (ii) و (iii) أكثر صعوبة من الجزء (i)، ويمكن إيجاده ضمن موضوع عُرِض في [Gea1, pp. 57–58].

مبرهنة 20.5 لنفترض أن مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

تم تقريبها بطريقة الفرق بخطوة واحدة بالصيغة

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h)$$

لنفترض أيضًا وجود $h_0 > 0$، وأن $\phi(t, w, h)$ متصلة، وتحقق شرط Lipschitz في المتغير w مع ثابت L على المجموعة

$$D = \{(t, w, h) \mid a \leq t \leq b, -\infty < w < \infty, 0 \leq h \leq h_0\}$$

عندئذ

(i) الطريقة مستقرة.

(ii) طريقة الفرق متقاربة إذا وفقط إذا كانت متسقة، وتكافئ

$$\phi(t, y, 0) = f(t, y) \text{ لكل } a \le t \le b$$

(iii) إذا كانت الدالة τ موجودة، ولكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, N$ يكون خطأ القطع المحلي $\tau_i(h)$ محققًا $|\tau_i(h)| \le \tau(h)$، حيث $0 \le h \le h_0$ فإن

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{\tau(h)}{L} e^{L(t_i - a)}$$

■

مثال 1 افترض طريقة Modified Euler المعطاة من خلال

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))\right]$$

عند $i = 0, 1, \ldots, N-1$. سنتحقق من أن هذه الطريقة تحقق فرضية hypothesis المبرهنة **(5.20)**. ولهذه الطريقة

$$\phi(t, w, h) = \tfrac{1}{2} f(t, w) + \tfrac{1}{2} f(t + h, w + hf(t, w))$$

فإذا كانت f تحقق شرط Lipschitz على $\{(t, w) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty\}$ في المتغير w مع ثابت L فإن

$$\begin{aligned}\phi(t, w, h) - \phi(t, \overline{w}, h) &= \tfrac{1}{2} f(t, w) + \tfrac{1}{2} f(t + h, w + hf(t, w)) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} f(t, \overline{w}) - \tfrac{1}{2} f(t + h, \overline{w} + hf(t, \overline{w}))\end{aligned}$$

وإن شرط Lipschitz على f يؤدي إلى

$$\begin{aligned}|\phi(t, w, h) - \phi(t, \overline{w}, h)| &\le \tfrac{1}{2} L|w - \overline{w}| + \tfrac{1}{2} L\, |w + hf(t, w) - \overline{w} - hf(t, \overline{w})| \\ &\le L|w - \overline{w}| + \tfrac{1}{2} L\, |hf(t, w) - hf(t, \overline{w})| \\ &\le L|w - \overline{w}| + \tfrac{1}{2} hL^2 |w - \overline{w}| \\ &= \left(L + \tfrac{1}{2} hL^2\right) |w - \overline{w}|.\end{aligned}$$

لذا فإن ϕ تحقق شرط Lipschitz في w على المجموعة

$$\{(t, w, h) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty, 0 \le h \le h_0\}$$

ولأي $h_0 > 0$ مع ثابت

$$L' = L + \tfrac{1}{2} h_0 L^2$$

وأخيرًا إذا كانت f متصلة على $\{(t, w) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty\}$، فإن ϕ متصلة على

$$\{(t, w, h) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty, 0 \le h \le h_0\}$$

ومن ثم فالمبرهنة **(20.5)** تؤدي إلى أن طريقة Modified Euler متسقة. وبوضع $h = 0$، يكون لدينا

$$\phi(t, w, 0) = \tfrac{1}{2} f(t, w) + \tfrac{1}{2} f(t + 0, w + 0 \cdot f(t, w)) = f(t, w)$$

ولذا فإن شرط الاتساق المنوّه عنه في الجزء **(ii)** من المبرهنة **(20.5)** يتحقق، وبذلك فالطريقة متقاربة. والأكثر من ذلك لاحظنا أن خطأ القطع المحلي لهذه الطريقة يكون $O(h^2)$، ولذلك فإن $O(h^2)$ تقارب طريقة Modified Euler هو أيضًا $O(h^2)$. ■

أما الطرائق المتعددة الخطوات، فإن المسائل ذات العلاقة بالاتساق، والاستمرارية والاستقرارية تكون مركبة بسبب عدد التقريبات الداخلة في كل خطوة. ونجد في طرائق الخطوة الواحدة أن التقريب w_{i+1} يعتمد مباشرة على التقريب السابق w_i، حيث تستخدم طرائق متعددة الخطوات على الأقل اثنين من التقريبات السابقة، وتتضمن الطرائق الاعتيادية المطبّقة أكثر من ذلك.

ويمكن كتابة الطريقة المتعددة الخطوات العامة لتقريب حل معادلة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{53.5}$$

بالصيغة

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$
$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i+1-m}), \tag{54.5}$$

لكلٍّ من $i = m-1, m, \ldots, N-1$ حيث إن $a_0, a_1, \ldots, a_{m+1}$ ثوابت و $h = (b-a)/N$ كالعادة و $t_i = a + ih$.

إن خطأ القطع المحلي للطريقة المتعددة الخطوات وفقًا لهذه الصيغة يكون

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \cdots - a_0 y(t_{i+1-m})}{h} - F(t_i, h, y(t_{i+1}), y(t_i), \ldots, y(t_{i+1-m})),$$

لكلٍّ من $i = m-1, m, \ldots, N-1$. وكما في طريقة الخطوة الواحدة، فإن خطأ القطع المحلي يقيس فشل الحل y للمعادلة التفاضلية في تحقيق معادلة الفرق.

لقد لاحظنا في طريقة Adams–Bashforth بأربع خطوات أن

$\tau_{i+1}(h) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\mu_i)h^4$ بالنسبة إلى بعض $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$

أما الطريقة Adams–Moulton بثلاث خطوات فلها

$\tau_{i+1}(h) = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\mu_i)h^4$ بالنسبة إلى بعض $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$

مع تحقق كون $y \in C^5[a, b]$ على أي حال.

ومن خلال التحليل، افترضنا افتراضين يتعلقان بالدالة F:

1. إذا كان $f \equiv 0$ (بمعنى أنه إذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة)، فإن $f \equiv 0$ أيضًا.

2. تحقق F شرط Lipschitz بالنسبة إلى $\{w_j\}$، في ضوء وجود الثابت L، وأنه لكل من أزواج المتتاليات $\{v_j\}_{j=0}^N$ و $\{\tilde{v}_j\}_{j=0}^N$، وعند $i = m-1, m, \ldots, N-1$، يكون لدينا

$$|F(t_i, h, v_{i+1}, \ldots, v_{i+1-m}) - F(t_i, h, \tilde{v}_{i+1}, \ldots, \tilde{v}_{i+1-m})| \le L \sum_{j=0}^{m} |v_{i+1-j} - \tilde{v}_{i+1-j}|$$

إن طرائق Adams–Bashforth الواضحة و Adams–Moulton الضمنية تحقق كلا الشرطين،

مفترضين أن f تحقق شرط Lipschitz. (انظر التمرين 2).

إن مفهوم تقارب الطرائق متعددة الخطوات هو نفسه في طرائق الخطوة الواحدة والطرائق متعددة الخطوات متقاربة إذا كان حل معادلة الفرق يقترب من حل المعادلة التفاضلية كلما اقتربت سعة الخطوة من الصفر. معنى ذلك أن $\lim_{h\to 0}\max_{0\le i\le N}|w_i - y(t_i)| = 0$.

وبالنسبة إلى الاتساق، فهناك حالة مختلفة قليلًا. ومرةً أخرى نريد للطريقة المتعددة الخطوات أن تكون متسقة على أن تقترب معادلة الفرق من المعادلة التفاضلية كلما اقتربت سعة الخطوة من الصفر، بمعنى أن خطأ القطع المحلي يقترب من الصفر كلما اقتربت سعة الخطوة منه. ويظهر الشرط الخارجي هنا بسبب عدد نقاط البداية التي تتطلبها الطرائق متعددة الخطوات. ولأن قيمة البداية الأولى $w_0 = \alpha$ فقط تكون موجودة عادةً، فإننا نحتاج – كمتطلب – إلى اقتراب الأخطاء في قيم البداية $\{\alpha_i\}$ جميعها من الصفر كلما اقتربت سعة الخطوة منه. ولذلك فإن كلاً من:

$$\lim_{h\to 0}|\tau_i(h)| = 0 \quad \text{لكل} \quad i = m, m+1, \ldots, N \tag{55.5}$$

و

$$\lim_{h\to 0}|\alpha_i - y(t_i)| = 0 \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{56.5}$$

يجب أن تكون صحيحة، لكي تكون الطريقة متعددة الخطوات بصيغة المعادلة (54.5) متسقة. انظر إلى المعادلة (56.5) التي تشير إلى أن الطريقة المتعددة الخطوات لن تكون متسقة ما لم تكن طريقة الخطوة الواحدة التي تولد قيم البداية متسقة أيضًا.

وإن المبرهنة التالية للطرائق المتعددة الخطوات مشابهة للمبرهنة (20.5) الجزء (iii)، وتعطي علاقة ما بين خطأ القطع المحلي والخطأ التام لطريقة متعددة الخطوات. إنها تعطي التبرير النظري لمحاولة السيطرة على الخطأ التام من خلال السيطرة على خطأ القطع المحلي. ويمكن إيجاد برهان صيغة لهذه المبرهنة أعمّ قليلًا في [IK, pp. 387–388].

مبرهنة 21.5 لنفترض أنه تم تقريب مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

بطريقة متنبئ – مصحح آدمز الواضحة مع معادلة متنبئ Adams–Bashforth في m من الخطوات

$$w_{i+1} = w_i + h[b_{m-1}f(t_i, w_i) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})]$$

بخطأ قطع محلي $\tau_{i+1}(h)$ ومعادلة المصحح Adams–Moulton الضمنية في $(m-1)$ من الخطوات

$$w_{i+1} = w_i + h\left[\tilde{b}_{m-1}f(t_i, w_{i+1}) + \tilde{b}_{m-2}f(t_i, w_i) + \cdots + \tilde{b}_0 f(t_{i+2-m}, w_{i+2-m})\right]$$

بخطأ قطع محلي $\tilde{\tau}_{i+1}(h)$. بالإضافة إلى ذلك لنفترض أن $f(t, y)$ و $f_y(t, y)$ متصلان على $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b$ و $-\infty < y < \infty\}$، وأن f_y محددة، لذا فإن خطأ القطع المحلي $\sigma_{i+1}(h)$ لطريقة متنبئ – مصحح هو

$$\sigma_{i+1}(h) = \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \tau_{i+1}\tilde{b}_{m-1}\frac{\partial f}{\partial y}(t_{i+1}, \theta_{i+1})$$

حيث إن θ_{i+1} عبارة عن عدد ما بين الصفر و $h\tau_{i+1}(h)$.
بالإضافة إلى ذلك يوجد ثابتان k_1 و k_2 بحيث

$$|w_i - y(t_i)| \le \left[\max_{0\le j\le m-1} \left|w_j - y(t_j)\right| + k_1\sigma(h)\right]e^{k_2(t_i-a)}$$

حيث إن $\sigma(h) = \max_{m\le j\le N} |\sigma_j(h)|$. ■

وقبل مناقشة الروابط ما بين الاتساق، والتقارب، واستقرارية الطرائق المتعددة الخطوات، علينا أن نأخذ في الحسبان تفصيلات أكثر لمعادلة الفرق للطريقة متعددة الخطوات. وبذلك سنكتشف سبب اختيار طرائق Adams بمثابة الطرائق المتعددة الخطوات المعيارية المعتمدة.

وبالربط بمعادلة الفرق (54.5) المعطاة في بداية هذا النقاش، فإن

$$w_0 = \alpha,\ w_1 = \alpha_1, \dots, w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i+1-m})$$

كثيرة حدود، وتسمى كثيرة حدود المميزة Characteristic polynomial للطريقة، ويكون

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - a_{m-2}\lambda^{m-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0 \qquad (57.5)$$

إن استقرارية الطريقة المتعددة الخطوات بالنسبة إلى خطأ التدوير تكون مختلفة من حيث مقادير الأصفار لكثيرة حدود المميزة. ولكي نرى ذلك، افترض تطبيق الطريقة المتعددة الخطوات المعيارية في المعادلة (54.5) لمسألة القيمة الابتدائية الاعتيادية

$$y' \equiv 0, \quad y(a) = \alpha \quad \text{حيث} \quad \alpha \ne 0 \qquad (58.5)$$

لهذه المسألة حل صحيح $y(t) \equiv \alpha$. ومن خلال فحص المعادلتين (26.5) و (27.5) في الفصل (6.5) نستطيع أن نرى بأن أي طريقة المتعددة الخطوات سوف تنتج نظريًا الحل الصحيح $w_n = \alpha$ لكل قيم n. الانحراف الوحيد عن الحل الصحيح هو تمهيدية خطأ التدوير للطريقة.

الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية في (58.5) له $f(t, y) \equiv 0$، ولذلك من خلال الافتراض (1) يكون لدينا $F(t_i, h, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_{i+1-m}) = 0$ في معادلة الفرق (54.5). وتمهيدية لذلك تصبح الصيغة المعيارية لمعادلة الفرق

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} \qquad (59.5)$$

لنفترض أن λ أحد أصفار كثيرة حدود المميزة المرتبطة بالمعادلة (54.5). لذا فإن $w_n = \lambda^n$ وكل n هو حل للمعادلة (59.5)؛ لأن

$$\lambda^{i+1} - a_{m-1}\lambda^i - a_{m-2}\lambda^{i-1} - \cdots - a_0\lambda^{i+1-m} = \lambda^{i+1-m}[\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \cdots - a_0] = 0$$

وفي الحقيقة إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ أصفارًا مختلفة لكثيرة حدود المميزة للمعادلة (54.5)، فمن الممكن ملاحظة أن كل حل للمعادلة (59.5) يمكن وضعه بالصيغة

$$w_n = \sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i^n \qquad (60.5)$$

لمجموعة وحيدة من الثوابت $c_1, c_2, \dots, c_m$.

ولما كان الحل الصحيح للمعادلة (58.5) هو $y(t) = \alpha$، فإن اختيار $w_n = \alpha$ لقيم n كلها هو حل

للمعادلة (59.5). وباستخدام هذه الحقيقة في المعادلة (59.5) نحصل على

$$0 = \alpha - \alpha a_{m-1} - \alpha a_{m-2} - \cdots - \alpha a_0 = \alpha(1 - a_{m-1} - a_{m-2} - \cdots - a_0)$$

هذا يشير إلى أن $\lambda = 1$ هو أحد أصفار كثيرة حدود المميزة (57.5). سنفترض توضيح الحل في التمثيل (60.5) من خلال $\lambda_1 = 1$ و $c_1 = \alpha$، ولذلك فإن كل حلول المعادلة (59.5) يعبر عنها بالصيغة

$$w_n = \alpha + \sum_{i=2}^{m} c_i \lambda_i^n \tag{61.5}$$

فإذا كانت الحسابات جميعها صحيحة فستكون أصفارًا. وفي التطبيق العملي لا تكون الثوابت $c_2, c_3, \ldots, c_m$ أصفارًا؛ بسبب خطأ التدوير. وخطأ التدوير في الحقيقة ينمو أسيًّا ما لم يكن $|\lambda_i| \le 1$ للجذور $c_2, c_3, \ldots, c_m$ جميعها. وكلما كانت قيم هذه الجذور صغيرة $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ زادت استقرارية الطريقة بالنسبة إلى نمو خطأ التدوير.

عند اشتقاق المعادلة (61.5) افترضنا افتراضًا تبسيطيًّا بأن أصفار كثيرة حدود المميزة مختلفة. والحالة k مماثلة عندما تظهر أصفار متعددة. وعلى سبيل المثال إذا كان $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+p}$ لقيم k وp المعينة، فإن ذلك يتطلب استبدال المجموع

$$c_k\lambda_k^n + c_{k+1}\lambda_{k+1}^n + \cdots + c_{k+p}\lambda_{k+p}^n$$

في المعادلة (61.5) بالمقدار

$$c_k\lambda_k^n + c_{k+1}n\lambda_k^{n-1} + c_{k+2}n(n-1)\lambda_k^{n-2} + \cdots + c_{k+p}[n(n-1)\cdots(n-p+1)]\lambda_k^{n-p} \tag{62.5}$$

(انظر [He2, pp. 119–145]) وعلى الرغم من تعديل صيغة الحل، إلا أن خطأ التدوير يستمر في النمو أسيًّا إذا كان $|\lambda_k| > 1$.

وعلى الرغم من أننا افترضنا الحالة الخاصة فقط لتقريب مسائل القيمة الابتدائية بصيغة المعادلة (58.5)، إلا أن سمات استقرارية هذه المعادلة تحدد استقرارية الحالة عندما لا تكون $f(t, y)$ صفرًا بالتحديد، وهذا بسبب كون حل المعادلة المتجانسة (58.5) جزءًا من حل أي معادلة. وقد صيغت التعريفات الآتية من خلال هذا النقاش.

تعريف 22.5 لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ جذور المعادلة المميزة (ليس بالضرورة أن تكون مختلفة).

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0 = 0$$

المرتبطة بطريقة الفرق متعددة الخطوات

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

و

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i+1-m})$$

فإذا كانت $|\lambda_i| \le 1$ لكل من $i = 1, 2, \ldots, m$ والجذور جميعها ذات القيمة المطلقة 1 هي جذور بسيطة، فإن طريقة الفرق توصف بأنها تحقق شرط الجذر **root condition**.

مبرهنة 23.5 (i) الطرائق التي تحقق شرط الجذر وفيها $\lambda = 1$ بمنزلة الجذر الوحيد للمعادلة المميزة بقيمة 1 تسمى مستقرة بقوة **strongly stable**.

(ii) الطرائق التي تحقق شرط الجذر ولها أكثر من جذر واحد مختلف بقيمة 1 تسمى مستقرة بضعف weakly stable.

(iii) الطرائق التي لا تحقق شرط الجذر تسمى غير مستقرة unstable. ■

الاتساق والتقارب للطريقة متعددة الخطوات مرتبطان باستقرارية التدوير للطريقة. تعطي المبرهنة الآتية تفصيلًا لهذه الارتباطات. ولبرهنة هذه النتائج والمبرهنة المستندة إليها، انظر [IK, pp. 410–417].

مبرهنة 24.5 الطريقة المتعددة الخطوات بالصيغة

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

حيث إن

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i+1-m})$$

مستقرة إذا وفقط إذا تحقق شرط الجذر. والأكثر من ذلك، إذا كانت طريقة الفرق متسقة مع المعادلة التفاضلية، فإن الطريقة مستقرة إذا وفقط إذا كانت متقاربة. ■

مثال 2 قد لاحظنا أن طريقة Adams–Bashforth من الرتبة الرابعة يمكن وضعها بالصيغة

$$w_{i+1} = w_i + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i-3})$$

حيث إن

$$F(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i-3}) = \frac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

وبذلك فإن $m = 4$، $a_0 = 0$، $a_1 = 0$، $a_2 = 0$ و $a_3 = 1$.

إن المعادلة المميزة لطريقة Adams–Bashforth هذه تعطينا

$$0 = P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1)$$

التي لها جذور $\lambda_1 = 1$، $\lambda_2 = 0$، $\lambda_3 = 0$ و $\lambda_4 = 0$، وإنها تحقق شرط الجذر ومستقرة بقوة. ولطريقة Adams–Bashforth نفس كثيرة حدود المميزة $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2$ مع أصفار $\lambda_1 = 1$، $\lambda_2 = 0$، $\lambda_3 = 0$، وإنها أيضًا مستقرة بقوة. ■

مثال 3 إن الطريقة متعددة الخطوات الواضحة المعطاة من خلال

$$w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

قد تناولناها في الفصل (5.6) على أنها طريقة Milne من الرتبة رابعة. وحيث إن المعادلة المميزة لهذه الطريقة $0 = P(\lambda) = \lambda^4 - 1$ لها أربعة جذور بقيمة 1 $\lambda_1 = 1$، $\lambda_2 = -1$، $\lambda_3 = i$ و $\lambda_4 = -i$ فإن الطريقة تحقق شرط الجذر، لكنها فقط مستقرة بضعف.

افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -6y + 6, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 2$$

التي لها حل صحيح $y(t) = 1 + e^{-6t}$. ولأغراض المقارنة فإن طريقة Adams–Bashforth من الرتبة الرابعة والمستقرة بقوة وطريقة Milne المستقرة بضعف تُستخدمان في تقريب حل هذه المسألة عند $h = 0.1$ مع قيم بداية صحيحة. وتبين النتائج في جدول (19.5) تأثيرات الطريقة المستقرة بضعف لهذه المسألة مقابل الطريقة المستقرة بقوة.

جدول 19.5

t_i	الصحيحة $y(t_i)$	طريقة آدمز – باشفورث w_i	الخطأ $\lvert y_i - w_i \rvert$	طريقة مالين w_i	الخطأ $\lvert y_i - w_i \rvert$
0.10000000		1.5488116		1.5488116	
0.20000000		1.3011942		1.3011942	
0.30000000		1.1652989		1.1652989	
0.40000000	1.0907180	1.0996236	8.906×10^{-3}	1.0983785	7.661×10^{-3}
0.50000000	1.0497871	1.0513350	1.548×10^{-3}	1.0417344	8.053×10^{-3}
0.60000000	1.0273237	1.0425614	1.524×10^{-2}	1.0486438	2.132×10^{-2}
0.70000000	1.0149956	1.0047990	1.020×10^{-2}	0.9634506	5.154×10^{-2}
0.80000000	1.0082297	1.0359090	2.768×10^{-2}	1.1289977	1.208×10^{-1}
0.90000000	1.0045166	0.9657936	3.872×10^{-2}	0.7282684	2.762×10^{-1}
1.00000000	1.0024788	1.0709304	6.845×10^{-2}	1.6450917	6.426×10^{-1}

إن سبب اختيارنا Adams–Bashforth–Moulton ليكون أسلوب المتنبئ – المصحح المعياري من الرتبة الرابعة، الذي نعتمده في الفصل (6.5) والمقدم على طريقة Milne–Simpson بنفس الرتبة هو أن كلًّا من طريقتي Adams–Bashforth و Adams–Moulton مستقرة بقوة. وهما أكثر احتمالاً لإعطاء تقريبات دقيقة لصنف أوسع من المسائل مقارنة بالمتنبئ– المصحح المستند إلى أساليب Milne و Simpson، حيث إن كلًّا منهما مستقر بضعف. ■

مجموعة التمارين 10.5 EXERCISE SET

1. لبرهنة المبرهنة (20.5) الفقرة (i)؛ أثبت أن الفرضيات تؤدي إلى وجود ثابت $K > 0$ بحيث

$$|u_i - v_i| \le K|u_0 - v_0| \quad \text{لكل} \quad 1 \le i \le N$$

متى ما حققت $\{u_i\}_{i=1}^{N}$ و $\{v_i\}_{i=1}^{N}$ معادلة الفرق $w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h)$

2. لكلٍّ من طريقتي Adams–Bashforth و Adams–Moulton من الرتبة رابعة

أ. أثبت أنه إذا كانت $f = 0$ فإن

$$F(t_i, h, w_{i+1}, \ldots, w_{i+1-m}) = 0$$

ب. أثبت أنه إذا كانت f تحقق شرط Lipschitz بثابت L فإن ثابت C موجود مع

$$|F(t_i, h, w_{i+1}, \ldots, w_{i+1-m}) - F(t_i, h, v_{i+1}, \ldots, v_{i+1-m})| \le C \sum_{j=0}^{m} |w_{i+1-j} - v_{i+1-j}|$$

3. استخدم نتائج التمرين (31) في الفصل (4.5) لإثبات أن طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة المتسقة.

4. افترض المعادلة التفاضلية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

أ. أثبت أن

$$y'(t_i) = \frac{-3y(t_i) + 4y(t_{i+1}) - y(t_{i+2})}{2h} + \frac{h^2}{3}y'''(\xi_1)$$

لـ ξ معينة، حيث $t_i < \xi_i < t_{i+2}$.

ب. تقترح الفقرة (أ) طريقة الفرق الآتية:

$$w_{i+2} = 4w_{i+1} - 3w_i - 2hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-2$$

استخدم هذه الطريقة لحل المسألة

$$y' = 1 - y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$$

مع $h = 0.1$. استخدم قيم البداية $w_0 = 0$ و $w_1 = y(t_1) = 1 - e^{-0.1}$.

ج. كرّر الفقرة (ب) مع $h = 0.01$ و $w_1 = 1 - e^{-0.01}$.

د. حلّل هذه الطريقة بالنسبة إلى الاتساق، الاستقرارية، والتقارب.

5. لنفترض طريقة متعددة الخطوات

$$w_{i+1} = -\tfrac{3}{2}w_i + 3w_{i-1} - \tfrac{1}{2}w_{i-2} + 3hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 2, \ldots, N-1$$

مع قيم بداية w_0, w_1, w_2:

أ. أوجد خطأ القطع المحلي.

ب. علق على حالات الاتساق، الاستقرارية، والتقارب.

6. أوجد حلًا تقريبيًا للمعادلة التفاضلية

$$y' = -y, \quad 0 \le t \le 10, \quad y(0) = 1$$

مستخدمًا طريقة Milne مع $h = 0.1$، ثم مع $h = 0.01$، وقيم بداية $w_0 = 1$ و $w_1 = e^{-h}$ لكلا الحالتين.

كيف يظهر تأثير انخفاض h من $h = 0.1$ إلى $h = 0.01$ في عدد الخانات الصحيحة في تقريب الحلول عند $t = 1$ و $t = 10$؟

7. تحقق من استقرارية طريقة الفرق

$$w_{i+1} = -4w_i + 5w_{i-1} + 2h[f(t_i, w_i) + 2hf(t_{i-1}, w_{i-1})]$$

عند $i = 1, 2, \ldots, N-1$ مع قيم بداية w_0, w_1.

8. افترض المسألة $y' = 0, 0 \le t \le 10, y(0) = 0$ التي لها حل $y \equiv 0$. فإذا كانت طريقة الفرق في التمرين (4) هي المطبقة على المسألة فإن

$$w_{i+1} = 4w_i - 3w_{i-1} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$w_0 = 0 \text{ و } w_1 = \alpha_1$$

افترض $w_1 = \alpha_1 = \varepsilon$، حيث إن ε خطأ تدوير صغير. احسب w_i بدقة عند $i = 2, 3, \ldots, 6$ للوقوف على كيفية تضخم الخطأ ε.

11.5 المعادلات التفاضلية الشديدة Stiff Differential Equations

للطرائق المستخدمة في تقريب حل مسائل القيمة الابتدائية حدود خطأ تتضمن مشتقة عالية لحل المعادلة. فإذا كان بالإمكان وضع حدود معقولة للمشتقة فإن الطريقة سيكون لها حد خطأ متوقَّع يمكن استخدامه في تقدير دقة التقريب. وحتى لو أن المشتقة تنمو مع زيادة الخطوات، فإنه يمكن إبقاء الخطأ ضمن سيطرة نسبية، مع تحقق نمو الحل من حيث القيمة. على أي حال فغالبًا ما تظهر مشاكل عندما تزداد قيمة المشتقة، ولكن لا يكون الحل كذلك. ويمكن للخطأ في هذه الحالة أن ينمو نموًّا كبيرًا لرتبة تجعله يسيطر على الحسابات. إن مسائل القيمة الابتدائية التي من المحتمل أن يحصل لها مثل ذلك تسمى معادلات شديدة **stiff equations**، وهي شائعة إلى حدٍّ ما، وخصوصًا في دراسة الاهتزازات، التفاعلات الكيميائية، والدوائر الكهربائية.

تتميز المعادلات التفاضلية الشديدة بأن لحلها الصحيح حدًّا بالصيغة e^{-ct}، حيث c ثابت كبير موجب.

النظم الشديدة تستقي اسمها من حركة النابض ونظم الكتلة التي لها ثوابت نابضية كبيرة.

وهذا عادةً يشكِّل جزءًا فقط من الحل، ويُسمى الحل العابر **transient solution**. الجزء الأكثر أهمية في الحل يسمى حل الحالة المستقرة **steady-state solution**. الجزء العابر من المعادلة الشديدة سيتضاءل بسرعة نحو الصفر مع زيادة t، ولكن لما كان للمشتقة من الرتبة n لهذا الجزء قيمة $c^n e^{-ct}$، فإن المشتقة لن تتضاءل بمثل هذه السرعة. وفي الحقيقة لما كانت المشتقة في حد الخطأ فإنها لا تُقيّم عند t، بل عند عدد ما بين الصفر و t، فإن حدود المشتقة يمكن أن تزداد مع زيادة t وبسرعة كبيرة في الواقع. ولحسن الحظ؛ فالمعادلات الشديدة عمومًا يمكن التنبؤ بها من طبيعة المسألة التي اشتُقّت المعادلة منها، ويمكن إبقاء الخطأ تحت السيطرة مع الحذر. وسنتناول في هذا الفصل الأسلوب الذي يمكن من خلاله عمل ذلك.

مثال 1 إن نظام مسائل القيمة الابتدائية

$$u_1' = 9u_1 + 24u_2 + 5\cos t - \tfrac{1}{3}\sin t, \quad u_1(0) = \tfrac{4}{3}$$

$$u_2' = -24u_1 - 51u_2 - 9\cos t + \tfrac{1}{3}\sin t, \quad u_2(0) = \tfrac{2}{3}$$

له حل وحيد

$$u_1(t) = 2e^{-3t} - e^{-39t} + \tfrac{1}{3}\cos t$$

$$u_2(t) = -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \tfrac{1}{3}\cos t$$

إن الحد العابر e^{-39t} في الحل يدفع هذا النظام إلى أن يكون شديدًا. وبتطبيق الخوارزمية (7.5) فإن طريقة Runge–Kutta للأنظمة من الرتبة الرابعة تعطي النتائج المبينة في جدول (20.5). وعندما $h = 0.05$، نحصل على الاستقرارية، وتكون التقريبات دقيقة. وعلى أي حال تؤدي زيادة سعة الخطوة لـ $h = 0.1$ إلى نتائج خطيرة تُنظر في جدول. ■

وعلى الرغم من أن الشدة ترتبط عادة بأنظمة المعادلات التفاضلية، فإن خصائص التقريب لطريقة عددية معينة تطبّق على نظام شديد يمكن التنبؤ به من خلال فحص الخطأ الناتج عند تطبيق الطريقة على معادلة اختبار بسيطة

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = \alpha \quad \text{حيث} \quad \lambda < 0 \qquad (63.5)$$

جدول 20.5

$w_2(t)$ $h=0.1$	$w_2(t)$ $h=0.05$	$u_2(t)$	$w_1(t)$ $h=0.1$	$w_1(t)$ $h=0.05$	$u_1(t)$	t
7.844527	−0.8703152	−1.032001	−2.645169	1.712219	1.793061	0.1
38.87631	−0.8550148	−0.8746809	−18.45158	1.414070	1.423901	0.2
176.4828	−0.7228910	−0.7249984	−87.47221	1.130523	1.131575	0.3
789.3540	−0.6079475	−0.6082141	−934.0722	0.9092763	0.9094086	0.4
3520.00	−0.5155810	−0.5156575	−1760.016	9.7387506	0.7387877	0.5
15697.84	−0.4403558	−0.4404108	−7848.550	0.6056833	0.6057094	0.6
69979.87	−0.3773540	−0.3774038	−34989.63	0.4998361	0.4998603	0.7
311959.5	−0.3229078	−0.3229535	−155979.4	0.4136490	0.4136714	0.8
1390664.	−0.2743673	−0.2744088	−695332.0	0.3415939	0.3416143	0.9
6199352.	−0.2298511	−0.2298877	−3099671.	0.2796568	0.2796748	1.0

وحلُّ هذه المعادلة هو $y(t) = \alpha e^{\lambda t}$، الذي يتضمن الحل العابر $e^{\lambda t}$. إن حل الحالة المستقرة هو صفر، ولذلك فمن السهل تحديد خصائص تقريب الطريقة. (تتطلب مناقشة أكثر شمولية لخطأ التدوير المرتبط بالأنظمة الشديدة فحص معادلة الاختبار عندما تكون λ عددًا معقدًا بجزء حقيقي سالب، انظر (Gea1, p. 222).

افترض أولًا طريقة أويلر Euler مطبقة على معادلة الاختبار، وبجعل $h = (b-a)/N$ و $t_j = jh$ عند $j = 0, 1, 2, \ldots, N$، فإن المعادلة (5.8) تعطي

$$w_0 = \alpha \text{ و } w_{j+1} = w_j + h(\lambda w_j) = (1 + h\lambda)w_j$$

ومن ثم فإن

$$w_{j+1} = (1 + h\lambda)^{j+1}w_0 = (1 + h\lambda)^{j+1}\alpha \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{64.5}$$

وحيث إن الحل الصحيح هو $y(t) = \alpha e^{\lambda}$، فإن الخطأ المطلق هو

$$|y(t_j) - w_j| = \left|e^{jh\lambda} - (1 + h\lambda)^j\right| |\alpha| = \left|(e^{h\lambda})^j - (1 + h\lambda)^j\right| |\alpha$$

وتُحدّد الدقة من خلال أي مدى يكون الحد $1+h\lambda$ يقرب $e^{h\lambda}$. وعندما $\lambda < 0$، فإن الحل الصحيح $(e^{h\lambda})^j$ يتضاءل نحو الصفر مع تزايد j، ولكن من خلال المعادلة (5.64)، ستكون هذه سمة التقريب فقط إذا كان $|1+h\lambda| < 1$، التي تعطي $-2 < h\lambda < 0$. وهذا يجعل سعة الخطوة h لطريقة Euler مقتصرة على تحقق $h < 2/|\lambda|$.

لنفترض الآن أن خطأ التدوير δ_0 قد أدخِل ضمن الشرط الابتدائي لطريقة Euler، $w_0 = \alpha + \delta_0$. وعند الخطوة j يكون خطأ التدوير

$$\delta_j = (1 + h\lambda)^j \delta_0$$

ولأن $\lambda < 0$ فإن شرط السيطرة على نمو خطأ التدوير هو نفسه شرط السيطرة على الخطأ المطلق $|1+h\lambda| < 1$، الذي يؤدي إلى أن $h < 2/|\lambda|$.

والحالة شبيهة بطرائق خطوة واحدة أخرى. وعمومًا فالدالة Q موجودة مع خاصية وجود طريقة فالدالة الفرق، وعند تطبيقها على معادلة الاختبار تعطي

$$w_{i+1} = Q(h\lambda)w_i \tag{65.5}$$

وتعتمد دقة الطريقة على أي مدى تكون $Q(h\lambda)$ أقرب إلى $e^{h\lambda}$، وعلى أن الخطأ سوف ينمو بلا حدود إذا كانت $|Q(h\lambda)| > 1$. وسيكون لطريقة Taylor من الرتبة n على سبيل مثال استقرارية

بالنسبة إلى كل من نمو خطأ التدوير والخطأ المطلق، على شرط اختيار h لتحقيق

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \cdots + \frac{1}{n!}h^n\lambda^n\right| < 1$$

يختبر التمرين (10) الحالة الخاصة حينما تكون الطريقة هي طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة الاعتيادية، وهي طريقة Taylor من الرتبة الرابعة.

وعند تطبيق طريقة كثيرة الحدود من صيغة المعادلة (54.5) في معادلة الاختبار، فإن التمهيدية هي

$$w_{j+1} = a_{m-1}w_j + \cdots + a_0 w_{j+1-m} + h\lambda(b_m w_{j+1} + b_{m-1}w_j + \cdots + b_0 w_{j+1-m})$$

عند $j = m-1, \ldots, N-1$ أو

$$(1 - h\lambda b_m)w_{j+1} - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})w_j - \cdots - (a_0 + h\lambda b_0)w_{j+1-m} = 0$$

وترتبط بمعادلة الفرق المتجانس هذه كثيرة حدود المميزة

$$Q(z, h\lambda) = (1 - h\lambda b_m)z^m - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})z^{m-1} - \cdots - (a_0 + h\lambda b_0)$$

وكثيرة الحدود هذه تشبه كثيرة حدود المميزة (57.5)، لكنها تشمل معادلة الاختبار أيضًا.

والمبرهنة هنا توازي نقاش الاستقرارية في الفصل (10.5).

افرض أنك أعطيت $w_0, \ldots, w_{m-1}$، وعند ثبوت $h\lambda$، لتعبر $\beta_1, \ldots, \beta_m$ عن أصفار كثيرة حدود $Q(z, h\lambda)$. فإذا كانت $\beta_1, \ldots, \beta_m$ مختلفة فإن $c_1, \ldots, c_m$ موجودة مع

$$w_j = \sum_{k=1}^{m} c_k(\beta_k)^j \quad \text{لكل} \quad j = 0, \ldots, N \tag{66.5}$$

إذا كانت لـ $Q(z, h\lambda)$ أصفار متعددة فإن w_j تعرف بنفس الأسلوب. (انظر المعادلة (62.5)) في الفصل (10.5). وإذا كانت w_j تقرب $y(t_j) = e^{jh\lambda} = (e^{h\lambda})^j$ بدقة فإن على الأصفار β_k جميعها أن تحقق $|\beta_k| < 1$، وبخلاف ذلك، فإن اختيارات معينة لـ α ستنتج $c_k \neq 0$، وإن الحد $c_k(\beta_k)^j$ لن يتضاءل نحو الصفر.

مثال 1

إن معادلة الاختبار التفاضلية

$$y' = -30y, \quad 0 \le t \le 1.5, \quad y(0) = \tfrac{1}{3}$$

لها حل صحيح $y = \frac{1}{3}e^{-30t}$ باستخدام $h = 0.1$ لخوارزمية Euler (1.5)، وخوارزمية Runge–Kutta (2.5) من الرتبة رابعة، وخوارزمية متنبئ- مصحح آدم Adams Predictor-Correcto (4.5)، وتعطي عند $t = 1.5$ النتائج المبينة في جدول (5.21). ■

جدول 21.5

الحل الصحيح	9.54173×10^{-21}
طريقة أويلر	-1.09225×10^{4}
طريقة رونج كوتا	3.95730×10^{1}
طريقة توقع – المصحح	8.03840×10^{5}

إن عدم الدقة في مثال (2) يعود إلى حقيقة كون $|Q(h\lambda)| > 1$ لطريقتي Euler و Runge–Kutta. وإن لـ $Q(z, h\lambda)$ أصفارًا مع معامل تزيد على 1 لطريقة المتنبئ- المصحح. ولتطبيق هذه الطرائق على هذه المسألة، يجب إنقاص سعة الخطوة. ويُستخدم التعريف الآتي لتوضيح مقدار الإنقاص المطلوب لسعة الخطوة.

تعريف 25.5 المنطقة R للاستقرارية المطلقة لطريقة بخطوة واحدة هو $R = \{ h\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |Q(h\lambda)| < 1\}$، وللطرائق متعددة الخطوات فهو $R = \{ h\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\beta_k| < 1$ للأصفار β_k جميعها لـ $Q(z, h\lambda)\}$. ■

تشير المعادلتان (65.5) و(66.5) إلى إمكانية تطبيق طريقة ما بكفاءة على معادلة شديدة فقط إذا كانت $h\lambda$ ضمن حقل الاستقرارية المطلقة، الذي يضع قيدًا على السعة h لمسألة ما. وعلى الرغم من أن الحد الأسي في الحل الصحيح يتضاءل بسرعة نحو الصفر، إلا أن λh يجب أن تبقى ضمن حقل الاستقرارية المطلقة عبر فترة قيم t لجعل التقريب يتضاءل نحو الصفر، وليبقى نمو الخطأ تحت السيطرة. هذا يعني أنه على الرغم من أن h يمكن أن يزداد طبيعيًّا بسبب افتراضات خطأ القطع، إلا أن المعيار يدفع h ليبقى صغيرًا. وتكون الطرائق متغيرة سعة الخطوة غير حصينة تجاه هذه المشكلة؛ لأن فحص خطأ القطع المحلي قد يشير إلى إمكانية زيادة سعة الخطوة، التي قد تعطي من غير قصد قيمًا لـ λh خارج حقل الاستقرارية المطلقة.

ولما كان حقل الاستقرارية المطلقة لطريقة ما هو عمومًا العامل الحرج في الحصول على تقريبات دقيقة للأنظمة الشديدة، فإن الطرائق العددية يؤمل أن تكون ذات حقل كبير للاستقرارية المطلقة قدر الإمكان.

يقال للطريقة العددية: إنها A-stable إذا كان R حقلها للاستقرارية المطلقة يتضمن نصف السطح الأيسر كاملاً.

إن طريقة شبه المنحرف الضمني Implicit Trapezoidal المعطاة من خلال

هذه الطريقة ضمنية لكونها؛ تتضمن w_{j+1} بطرفي المعادلة.

$$w_0 = \alpha, \tag{67.5}$$

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2}\left[f(t_{j+1}, w_{j+1}) + f(t_j, w_j)\right], \quad 0 \le j \le N-1$$

تكون A-stable، (انظر التمرين 15) وهي الطريقة متعددة الخطوات الوحيدة بصفة A-stable. وعلى الرغم من أن طريقة شبه المنحرف لا تعطي تقريبات دقيقة عند سعات كبيرة للخطوة، إلا أن خطأها لا ينمو أسيًّا.

إن أساليب الأنظمة الشديدة المستخدمة عادة هي طرائق ضمنية متعددة الخطوات. ونحصل عمومًا على w_{i+1} من خلال حل معادلة لاخطية أو نظام لاخطي على نحو تكراري، وغالبًا من خلال طريقة نيوتن. افترض على سبيل مثال طريقة شبه المنحرف الضمني

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2}[f(t_{j+1}, w_{j+1}) + f(t_j, w_j)]$$

لقيم محسوبة لـ t_j, t_{j+1} و w_j، فإننا نحتاج إلى تحديد w_{j+1}، وهو الحل لـ

$$F(w) = w - w_j - \frac{h}{2}[f(t_{j+1}, w) + f(t_j, w_j)] = 0 \tag{68.5}$$

ولتقريب هذا الحل؛ نختار $w_{j+1}^{(0)}$ وهو عادةً w_j، وتنتج $w_{j+1}^{(k)}$ من خلال تطبيق طريقة نيوتن للمعادلة (68.5)

$$w_{j+1}^{(k)} = w_{j+1}^{(k-1)} - \frac{F(w_{j+1}^{(k-1)})}{F'(w_{j+1}^{(k-1)})}$$

$$= w_{j+1}^{(k-1)} - \frac{w_{j+1}^{(k-1)} - w_j - \frac{h}{2}[f(t_j, w_j) + f(t_{j+1}, w_{j+1}^{(k-1)})]}{1 - \frac{h}{2} f_y(t_{j+1}, w_{j+1}^{(k-1)})}$$

حتى نحصل على $|w_{j+1}^{(k)} - w_{j+1}^{(k-1)}|$ صغيرة بما يكفي، وتستخدم هذه العملية في الخوارزمية

(8.5). ومن الطبيعي أن يتطلب هذا 3 أو 4 فقط من الإعادات لكل خطوة.

إن طريقة القاطع يمكن استخدامها بديلًا لطريقة نيوتن في المعادلة (68.5)، ولكن هذا يتطلب تقريبين ابتدائيين مختلفين لـ w_{j+1}. ولتطبيق طريقة القاطع، فإن الإجراء المعتاد هو جعل $w_{j+1}^{(0)} = w_j$ وإيجاد $w_{j+1}^{(1)}$ من طريقة ما متعددة الخطوات الواضحة. وعندما يكون نظام معادلات شديدة ضمن العملية، فإن ذلك يتطلب تعميمًا ما لطريقة نيوتن أو طريقة القاطع. وسنتناول هذه المواضيع في الباب العاشرة.

ALGORITHM

الخوارزمية 8.5

شبه المنحرف مع إعادة نيوتن Trapezoidal with Newton iteration

لتقريب الحل لنظام من رتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة أولى

$y' = f(t, y)$ لكل $a \le t \le b$ عند $y(a) = \alpha$

عند $(N + 1)$ من الأرقام المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط نهاية a, b، عدد صحيح N، شرط ابتدائي α، حد سماح TOL، أكبر عدد إعادات M عند أيٍّ من الخطوات.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N + 1)$ من القيم لـ t، أو عبارة فشل.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$ $t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w).
2	عند $i = 1, 2, \ldots, N$ طبق الخطوات 3 – 7.
3	ضع $k_1 = w + \frac{h}{2} f(t, w)$ $w_0 = k_1$ $j = 1$ $FLAG = 0$
4	ما دام $FLAG = 0$، فطبق الخطوتين 5 و 6.
5	ضع $w = w_0 - \dfrac{w_0 - \frac{h}{2} f(t + h, w_0) - k_1}{1 - \frac{h}{2} f_y(t + h, w_0)}$
6	إذا كان $\|w - w_0\| < TOL$ فضع $FLAG = 1$ وما عدا ذلك ضع $j = j + 1$ $w_0 = w$ وإذا كان $j > M$ فإن المخرجات (تم تجاوز أكبر عدد من الإعادات). توقف.
7	ضع $t = a + ih;$ المخرجات (t, w)
8	توقف.

مثال 3

إن مسألة القيمة الابتدائية الشديدة

$$y' = 5e^{5t}(y-t)^2 + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = -1$$

لها حل $y(t) = t - e^{-5t}$. وللوقوف على آثار الشدة، نطبّق طريقة شبه المنحرف الضمنية وطريقة Runge–Kutta من الرتبة رابعة مع $N = 4$، لتعطي $h = 0.25$، و$N = 5$ لتعطي $h = 0.20$.

إن أداء طريقة شبه المنحرف جيد في كلا الحالتين مستخدمين $M = 10$ و $TOL = 10^{-6}$ وكما هو الحال في طريقة Runge–Kutta مع $h = 0.2$. وعلى أي حال تقع $h = 0.25$ خارج حقل الاستقرارية المطلقة لطريقة Runge–Kutta، وهو ما تثبته النتائج في جدول (22.5).

■

جدول 22.5

طريقة شبه المنحرف		طريقة رونج – كوتا		
$h = 0.2$		$h = 0.2$		
w_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	w_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	t_i
−1.0000000	0	−1.0000000	0	0.0
−0.1414969	2.6383×10^{-2}	−0.1488521	1.9027×10^{-2}	0.2
0.2748614	1.0197×10^{-2}	0.2684884	3.8237×10^{-3}	0.4
0.5539828	3.7700×10^{-3}	0.5519927	1.7798×10^{-3}	0.6
0.7830720	1.3876×10^{-3}	0.7822857	6.0131×10^{-4}	0.8
0.9937726	5.1050×10^{-4}	0.9934905	2.2845×10^{-4}	1.0
$h = 0.25$		$h = 0.25$		
w_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	w_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	t_i
−1.0000000	0	−1.0000000	0	0.0
0.0054557	4.1961×10^{-2}	0.4014315	4.37936×10^{-1}	0.25
0.4267572	8.8422×10^{-3}	3.4374753	3.01956×10^{0}	0.5
0.7291528	2.6706×10^{-3}	1.44639×10^{23}	1.44639×10^{23}	0.75
0.9940199	7.5790×10^{-4}	Overflow فيض		1.0

لقد قدمنا هنا كمية صغيرة فقط مما يجب على القارئ معرفته حول المعادلات التفاضلية الشديدة. ولمزيد من التفاصيل؛ راجع ([Gea2], [Lam] او [SGe]).

EXERCISE SET مجموعة التمارين 11.5

1. حلَّ مسائل القيمة الابتدائية الشديدة الآتية مستخدمًا طريقة Euler، وقارن النتائج بالحل الحقيقي:

أ. $y' = -9y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = e$ عند $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = e^{1-9t}$.

ب. $y' = -20(y - t^2) + 2t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ عند $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-20t}$.

ج. $y' = -20y + 20\sin t + \cos t, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.25$

الحل الحقيقي $y(t) = \sin t + e^{-20t}$.

د. $y' = 50/y - 50y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \sqrt{2}$ عند $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$.

2. حُلَّ مسائل القيمة الابتدائية الشديدة الآتية مستخدمًا طريقة Euler، وقارن النتائج بالحل الحقيقي:

أ. $y' = -5y + 6e^t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 2$ عند $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = e^{-5t} + e^t$.

ب. $y' = -10y + 10t + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = e$ عند $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(t) = e^{-10t+1} + t$.

ج. $y' = -15(y - t^{-3}) - 3/t^4, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0.9999997$ عند $h = 0.25$

الحل الحقيقي $y(t) = -e^{-15t} + t^{-3}$.

د. $y' = -20y + 20\cos t - \sin t, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$ عند $h = 0.25$

الحل الحقيقي $y(t) = -e^{-20t} + \cos t$.

3. كرّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة.

4. كرّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة.

5. كرّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة Adams fourth-order predictor-corrector.

6. كرّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة Adams fourth-order predictor-corrector.

7. كرّر تمرين (1) مستخدمًا خوارزمية شبه المنحرف مع $TOL = 10^{-5}$.

8. كرّر تمرين (2) مستخدمًا خوارزمية شبه المنحرف مع $TOL = 10^{-5}$.

9. حل مسائل القيمة الابتدائية الشديدة الآتية مستخدمًا طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة، مع (أ) $h = 0.1$ و (ب) $h = 0.025$.

$$u_1' = 32u_1 + 66u_2 + \tfrac{2}{3}t + \tfrac{2}{3}, \quad 0 \le t \le 0.5, \quad u_1(0) = \tfrac{1}{3}$$

$$u_2' = -66u_1 - 133u_2 - \tfrac{1}{3}t - \tfrac{1}{3}, \quad 0 \le t \le 0.5, \quad u_2(0) = \tfrac{1}{3}$$

قارن النتائج بالحل الحقيقي:

$$u_1(t) = \tfrac{2}{3}t + \tfrac{2}{3}e^{-t} - \tfrac{1}{3}e^{-100t} \quad \text{and} \quad u_2(t) = -\tfrac{1}{3}t - \tfrac{1}{3}e^{-t} + \tfrac{2}{3}e^{-100t}$$

10. أثبت أن طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + h/2, w_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(t_i + h/2, w_i + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3)$$

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

يمكن كتابتها حين تطبّق على المعادلة التفاضلية $y' = \lambda y$ بالصيغة

$$w_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \tfrac{1}{2}(h\lambda)^2 + \tfrac{1}{6}(h\lambda)^3 + \tfrac{1}{24}(h\lambda)^4\right) w_i$$

11. ناقش: الاتساق، الاستقرارية، والتقارب لطريقة شبه المنحرف الضمنية

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left(f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i)\right) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

مع $w_0 = \alpha$ بتطبيقها على المعادلة التفاضلية

$$y' = f(t, y) \quad a \le t \le b \quad y(a) = \alpha$$

12. تعرف طريقة Backward Euler one-step بخطوة واحدة من خلال

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1}) \text{ لكل } i = 0, \dots, N-1$$

أثبت أن $Q(h\lambda) = 1/(1 - h\lambda)$ لطريقة Backward Euler one-step.

13. طبّق طريقة Backward Euler على المعادلة التفاضلية المعطاة في تمرين (1). استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حل لـ w_{i+1}.

14. طبّق طريقة Backward Euler على المعادلة التفاضلية المعطاة في تمرين (2). استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حل لـ w_{i+1}.

15. أ. أثبت أن طريقة شبه المنحرف الضمنية (67.5) هي A-stable.

ب. أثبت أن طريقة Backward Euler في تمرين (12) هي A-stable.

12.5 مسح للطرائق والبرمجيات Survey of Methods and Software

تناولنا في هذا الباب طرائق لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية لمعادلات تفاضلية عادية. ولقد بدأنا بمناقشة الأسلوب العددي الأكثر أولوية وهو طريقة Euler. وهذه العملية ليست دقيقة بما يكفي لاستخدامها في التطبيقات، ولكنها توضح السلوك العام للأساليب الأكثر قوة دون الدخول في مصاعب جبرية، لذلك فقد افتُرِضت طرائق Taylor بمنزلة تعميمات لطريقة Euler. ولقد تبيَن أنها كانت دقيقة، ولكنها بطيئة بسبب الحاجة إلى تحديد اشتقاقات جزئية واسعة للدالة الموصوفة للمعادلة التفاضلية. إن صيغ Runge–Kutta تبسّط طرائق Taylor، حيث لا تزيد الخطأ معنويًّا. وعند هذا الحد فقد كان اهتمامنا بطرائق الخطوة الواحدة أساليب تستخدم البيانات فقط عند النقاط التي حُسبت توًّا. وقد تناولنا الطرائق متعددة الخطوات في الفصل (6.5)، حيث افتُرِضت طرائق واضحة من نوع Adams– Bashforth وطرائق ضمنية من نوع Adams–Moulton. وتُوِّجت هذه في طرائق المتنبئ–المصحح التي تستخدم طرائق واضحة مثل Adams– Bashforth للتنبؤ بالحل، ومن ثم تطبيق طريقة ضمنية مقابلة لها مثل Adams–Moulton لتصحيح التقريب. أوضح الفصل (9.5) كيفية استخدام هذه الأساليب لحل مسائل القيمة الابتدائية برتب أعلى وأنظمة مسائل القيمة الابتدائية.

وتستند الطرائق الأدق والمتبناة إلى أساليب بخطوة واحدة وبعدة خطوات وغير معقدة نسبيًّا. وقد لاحظنا في الفصل (5.5) خصوصًا أن طريقة Runge–Kutta– Fehlberg هي عملية بخطوة واحدة تتحرى اختيار مباعدة شبكية لإبقاء خطأ التقريب المحلي تحت السيطرة. إن طريقة المتنبئ– المصحح بسعة خطوات متغيرة التي عرِضت في الفصل (7.5) تستند إلى طريقة Adams– Bashforth من الرتبة الرابعة وطريقة Adams–Moulton من الرتبة الثالثة، وهي أيضًا تغير من سعة الخطوة لإبقاء الخطأ المحلي ضمن حد السماح المحدد. وإن طريقة الاستكمال الخارجي التي نوقشت في الفصل (8.5) تستند إلى تعديل طريقة النقطة الوسطية، وتشمل استكمالًا خارجيًّا للإبقاء على الدقة المطلوبة للتقريب. وتتناول المادة الأخيرة في الفصل الصعوبة

الملازمة لتقريب حل المعادلة الشديدة، أو المعادلة التفاضلية التي يتضمن حلها الصحيح جزءًا بصيغة $e^{-\lambda t}$، حيث إن λ ثابت موجب. ويجب الحذر عند التعامل مع مسائل من هذا النوع، أو أن تطغى النتائج على خطأ التدوير.

إن طرائق من نوع Runge–Kutta–Fehlberg تكون وافية عمومًا لمسائل غير شديدة، وتتطلب دقة وسيطية. وعمليات الاستكمال الخارجي تعتمد على مسائل غير شديدة، وتتطلب دقة عالية. وتستخدم توسعات طريقة شبه المنحرف الضمنية لطرائق متغيرة الرتبة ومتغيرة سعة الخطوة من نوع Adams الضمنية لمسائل القيمة الابتدائية الشديدة.

وتتضمن مكتبة IMSL اثنين من البرامج الفرعية لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية. وكل واحد منها يحل نظامًا من m من المعادلات من الرتبة الأولى في m من المتغيرات. والمعادلات ذات صيغة

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_m) \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

حيث إن $u_i(t_0)$ معطاة عند كل i. ويستند البرنامج الفرعي سعة الخطوة المتغيرة IVPRK إلى طرائق Runge–Kutta–Verner من الرتبتين 5 و 6 الموضحتين في التمرين (4) من الفصل (5.5). ويُستخدم برنامج فرعي من نوع Adams في المعادلات الشديدة يعود إلى C. William Gear ومعطى من خلال IVPAG. هذه الطريقة تستخدم طرائق ضمنية متعددة الخطوات من رتبة حتى 12 وصيغ تفاضلية تراجعية من رتبة حتى 5.

وتحتوي مكتبة NAG عمليات من نوع Runge–Kutta تسمى D02BGF، D02BHF، D02PCF، D02PDF. D02BGF و D02BHF تستند إلى صيغة Merson لطريقة Runge–Kutta. وطريقة Adams متغيرة الرتبة ومتغيرة سعة الخطوة متضمنة في العملية D02CJF. وطرائق الفرق المتراجع متغيرة الرتبة ومتغيرة سعة الخطوة لنظام شديد متضمنة في العملية D02EJF. وتتضمن برامج فرعية أخرى نفس الطرائق، ولكن بإعادات حتى تقترب مكونة الحل لقيمة معطاة أو حتى يكون دالة الحل صفرًا. إن مكتبة netlib تتضمن برامج فرعية متعددة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية في الحزمة ODE الموجودة عند الموقع http://www.netlib.org. والبرنامج الفرعي dverk.f يستند إلى طرائق Runge–Kutta–Verner من الرتبتين 5 و 6. والبرنامج الفرعي rkf45.f يستند إلى طرائق Runge–Kutta–Fehlberg من الرتبتين 4 و 5. وكما وُضِّح في الفصل (5.5)، ولمسائل القيمة الابتدائية لمعادلة تفاضلية شديدة اعتيادية. يمكن استخدام البرنامج الفرعي epsode.f المستند إلى صيغة التفاضل التراجعي المتغيرة المعامل. وهناك العديد من الكتب مختصة في الحل العددي لمسائل القيمة الابتدائية، يتقدمها اثنان ككتابي Henrici [He1] و Gear [Ge1]. وتتناول كتب أخرى هذا الحقل مثل Botha، Pinder [BP]، Ortega، Poole [OP]، Golub و Ortega [GO] Shampine [Sh]، Dor- mand [Do]. وهناك أيضًا كتابان لـ Hairer, Nörsett و Warner يوفران نقاشًا مستفيضًا حول مسائل [HNW1] عديمة الشدة و [HNW2] الشديدة، وكتاب لـ Burrage [Bur] يوضح طرائق التوازي والتتابع.

الباب

6

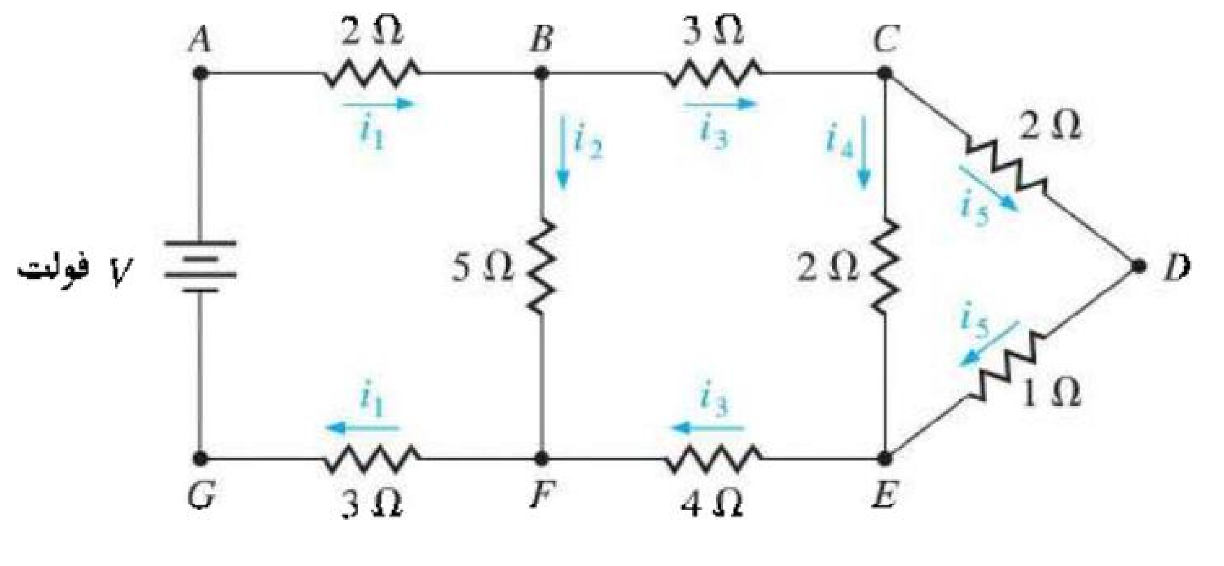
الطرائق المباشرة لحل الأنظمة الخطيّة

Direct Methods for Solving Linear Systems

مقدمة

تنص قوانين كيرشــوف **Kirchhoff** في الــدارات الكهربائية على أن صافي تدفق التيار عند كل عروة وصافي انخفاض الجهد حول كل دارة في الدارة يساوي صفرًا. افترض أن طاقة وضع قيمتهـــا V فولت وُضعــت بين النقطتين A و G في الــدارة، وأن i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 تمثيل اندفاع التيار كما في الشكل أدناه بافتراض G نقطة مرجعية؛ وإن قوانين كيرشوف تعني أن التيارات تحقق نظام المعادلات الخطية الآتية:

$$5i_1 + 5i_2 = V$$
$$i_3 - i_4 - i_5 = 0$$
$$2i_4 - 3i_5 = 0$$
$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$
$$5i_2 - 7i_3 - 2i_4 = 0$$



ســيتناول هــذا الباب حَلّ الأنظمة من هذا النوع. لقد شُــرِح هــذا التطبيق في التمرين (29) من الفصل (6.6).

إن أنظمــة المعادلات الخطية مرتبطة بكثير من مســائل الهندســة والعلــوم وكذلك بتطبيقات الرياضيات في العلوم الاجتماعية والدراسات الكمية في الأعمال والمسائل الاقتصادية.

ندرس في هذا الباب طرائق مباشرة لحل نظام خطي على الصيغة

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{1.6}$$

فـــي المجاهيل (المتغيـــرات) $x_1, \ldots, x_n$ حيث a_{ij} ثوابت معطاة لكل $i, j = 1, 2, \ldots, n$ و b_i لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ إن الطرائق المباشـــرة هي طرائق تعطي الحل بعدد محدد من الخطوات، وخاضعة لأخطاء تقريب فقط. وســـنقدم خلال عرضنا بعض المفاهيم الابتدائية في موضوع الجبر الخطي.

أما طرائق تقريب حل الأنظمة الخطية باستخدام الطرائق المتكررة فستُعرض في الفصل السابع.

1.6 أنظمة المعادلات الخطية Linear Systems of Equations

نستخدم ثلاث عمليات (تدعى العمليات الابتدائية) لتبسيط النظام الخطي في المعادلة (1.6):

أ. يمكن ضرب المعادلة E_i في أي ثابت غير صفري λ والحصول على معادلة تكافئ المعادلة (E_i)، ونعبر عن هذه العملية بالرمز $(\lambda E_i) \to (E_i)$.

ب. يمكن ضرب المعادلة E_i في أي ثابت λ، ثم إضافة الناتج إلى المعادلة E_j، ونعبّر عن هذه العملية بالرمز $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$.

ج. يمكن تبديل المعادلتين E_i و E_j. ونعبّر عن هذه العملية بالرمز $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$.

يمكن تحويل نظام خطي باستخدام متتالية من هذه العمليات، إلى نظام خطي آخر يسهل حله، وله حلول النظام الأول نفسها.

مثال 1 حُلَّ المعادلات الأربع الآتية للمجاهيل x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ E_2 &: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ E_3 &: \quad 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ E_4 &: \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{aligned} \tag{2.6}$$

نستخدم E_1 أولاً لحذف المجهول x_1 من E_2, E_3, E_4 وذلك باستخدام

$$(E_4 + E_1) \to (E_4) \text{ و } (E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3)$$

لنحصل على النظام

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ E_2 &: \quad -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ E_3 &: \quad -4x_2 - x_3 - 7x_4 = -15 \\ E_4 &: \quad 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \end{aligned}$$

حيث رمزنا إلى المعادلات الجديدة بالرموز E_1, E_2, E_3 و E_4 للتبسيط.

في النظام الجديد نستخدم E_2 لحذف x_2 من E_3 و E_4 من خلال تشكيل $(E_3) \longrightarrow (E_3 - 4E_2)$ و $(E_4) \longrightarrow (E_4 + 3E_2)$ فنحصل على

$$\begin{aligned} E_1 &: x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ E_2 &: - x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ E_3 &: 3x_3 + 13x_4 = 13 \\ E_4 &: - 13x_4 = -13 \end{aligned} \quad (3.6)$$

إن نظــام المعادلات (3.6) الآن في صيغة مثلثية (أو مختزلة) (triangular (or reduced)، وبهذا يمكن إيجاد الحلول بعملية التعويض العكسي. (backward - substitution process) بما أن E_4 تعطي $x_4 = 1$ فيمكننا حل E_3 لإيجاد x_3، وذلك باستخدام

$$x_3 = \frac{1}{3}(13 - 13x_4) = \frac{1}{3}(13 - 13) = 0$$

وباستمرار هذه العملية فإن E_2 تعطي

$$x_2 = -(-7 + 5x_4 + x_3) = -(-7 + 5 + 0) = 2$$

و E_1 تعطي

$$x_1 = 4 - 3x_4 - x_2 = 4 - 3 - 2 = -1$$

ولذلك فإن حل نظام المعادلات (3.6) ومن ثم نظام المعادلات (2.6) هو $x_1 = -1$، $x_2 = 2$، $x_3 = 0$ و $x_4 = 1$. ■

عنــد القيام بالحســابات في مثال (1)، لم تكن هناك حاجة إلــى كتابة المعادلات كاملة في كل خطوة أو حمل المتغيرات x_1، x_2، x_3 و x_4 خلال الحسابات؛ لأنها بقيت دائمًا في العمود نفسه. إن التغير الوحيد الذي طرأ عند الانتقال من نظام إلى آخر كان في معاملات المجاهيل وفي قيم الطرف الأيمن للمعادلات. ولهذا الســبب غالبًا ما تســتخدم المصفوفــة بدلاً من النظام الخطي، وهذه المصفوفة تحتوي على المعلومات الضرورية جميعها في النظام للحل، ولكن بطريقة أفضل. المصفوفة من الدرجة (أو الشكل أو السعة) $n \times m$ هي مستطيل من العناصر عدد صفوفه n وعدد أعمدته m ، حيث يتحدد العنصر بقيمته وموقعه معًا. ■

تعريف 1.6 يعبَّــر عــن المصفوفة $n \times m$ بحرف كبير مثل A ، وبحــروف صغيرة وعددي دليل مثل a_{ij} لكل مدخل (أو عنصر) في تقاطع الصف i والعمود j، أي

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

مثال 2 المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

هــي مصفوفــة 2×3 حيــث

$a_{11} = 2$، $a_{12} = -1$، $a_{13} = 7$، $a_{21} = 3$، $a_{22} = 1$ و $a_{23} = 0$ ■

تسمى المصفوفة $n \times 1$، ويعبر عنها $A = [\, a_{11}\, a_{12} \cdots\ a_{1n}]$ متجهًا صفيًّا ذا بعد n وتسمى المصفوفة $n \times 1$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

متجهًا عموديًّا ذا بعد n

نحــذف في العادة الرموز غير الضرورية عند التعبير عن المتجهات، وتســتخدم حروف صغيرة غامقة اللون للتعبير عنها فمثلًا

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

متجه عمودي، و

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]$$

متجه صفي.

يمكن تمثيل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + \ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

بمصفوفة من الدرجة $n \times (n-1)$ على النحو التالي:

$$\text{بوضع} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A = [a_{ij}] \text{ و } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ثم بتجميع هاتين المصفوفتين للحصول على المصفوفة الموسعة **augmented matrix**

كلمــة معزّزة (مزيدة) تشــير إلى حقيقة أن الحدود الثابتة قد زيدت وضمّت إلى المصفوفة.

$$[A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

حيــث اســتخدمنا الخط العمودي المنقــوط ليفصل بين معاملات المجاهيل عــن القيم في الجهة اليمنى للمعادلات.

إن إعادة العمليات التي أُجريت في مثال (1) باستخدام رموز المصفوفة تنتج بالمصفوفة الموسعة أولاً.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

وبإجراء العمليات الصفية للمثال المذكور نحصل على المصفوفتين

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right] \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

ويمكن تحويل المصفوفة النهائية للنظام الخطي المرتبط بها، ومن ثم الحصول على حل المجاهيل x_1, x_2, x_3 و x_4.

تُسمى الطريقة المستخدمة في هذه العملية طريقة الحذف لجاوس باستخدام التعويض التراجعي **Gaussian elimination with backward substitution**

ظهرت طريقة مشابهة لطريقة الحذف لجاوس لأول مرة في فترة حكم سلالة هان Han في الصين، وكان ذلك في الكتاب "تسعة فصول في فن الرياضيات" الذي كتب عام 200 قبل الميلاد تقريبا.
لقد وصف جوزيف لويس لاجرانج (1736–1813) طريقة مماثلة لهذه العملية عام 1778 في حالة أن قيمة كل معادلة صفر. وأعطى جاوس وصفا أعم في كتابه
Theoria Motus corporum coelestium sectionbus solem ambientum
الذي شرح طريقة المربعات الصغرى التي استخدمها عام 1801 ليصف مدار الكوكب الصغير سيريز.

تعمم طريقة الحذف لجاوس على النظام العام للمعادلات الخطية بصورة مماثلة على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} E_1: \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2: \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ E_n: \quad & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{4.6}$$

إن الصيغة الأولى للمصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ هي

$$\tilde{A} = [A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right] \tag{5.6}$$

حيث تعبر A عن المصفوفة المكوّنة من المعاملات.

إن مدخلات العمود $(n+1)$ هي قيم $\mathbf{b}$؛ أي أن $a_{i,n+1} = b_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

في حالة $a_{11} \neq 0$ ، ويمكن تنفيذ العمليات المقابلة للتحويل $(E_j - (a_{j1}/a_{11})E_1) \rightarrow (E_j)$ لكل من $j = 2, 3, \ldots, n$؛ للتخلص من معامل x_1 في كل صف من هذه الصفوف .

وعلى الرغم من أنه من المتوقع أن تتغير المدخلات في الصفوف $2, 3, \ldots, n$ ، فإننا ولتبسيط الرموز سنعبر عن المدخل في الصف i والعمود j بالرمز a_{ij}، وبإبقاء هذا الأمر ضمن الافتراض سنتبع متتالية من العمليات لكل $i = 2, 3, \ldots, n-1$، ونجري العملية $(E_j - (a_{ji}/a_{ii})E_i) \rightarrow (E_j)$.

لكل $j = i+1, i+2, \ldots, n$ على أن $a_{ii} \neq 0$

إن هذا يحذف (يغير المعامل ليصبح صفرًا) x_i في كل صف تحت الصف i، وللقيم $i = 1, 2, \ldots, n-1$ جميعها تأخذ المصفوفة الناتجة الصيغة الآتية:

$$\tilde{\tilde{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

إذ لا يتوقَّع أن تتوافق قيم a_{ij} عدا التي في الصف الأول مع مثيلاتها في المصفوفة الأصلية $\tilde{A}$. وتمثِّل المصفوفة $\tilde{\tilde{A}}$ نظامًا خطيًّا له مجموعة من حلول النظام الأصلي (4.6) نفسها.

وبما أن النظام الخطي الجديد مثلثيّ فإن

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\ \ddots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{nn}x_n &= a_{n,n+1} \end{aligned}$$

ويمكن تطبيق التعويض الارتجاعي. وبحل المعادلة ذات العدد n لإيجاد قيمة x_n نجد أن

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

وبحل المعادلة عدد $(n-1)$ لإيجاد قيمة x_{n-1} واستخدام القيمة المعلومة لـِ x_n نجد أن

$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

وباستمرار هذه العملية نحصل على

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - a_{i,n}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \cdots - \ a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

لكل $i = n-1, n-2, \ldots, \ 2, 1$

ويمكـــن عرض طريقة جـــاوس بالحذف بدقة أكبر على الرغم من كونـــه أكثر تعقيدًا، عن طريق تكوين المصفوفات الموسعة

$\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \ldots, \tilde{A}^{(n)}$ حيـــث إن $\tilde{A}^{(1)}$ المعطـــاة في المعادلة (5.6) و $\tilde{A}^{(k)}$ ، لكل $k = 2, 3, \ldots, n$ لها المدخلات $a_{ij}^{(k)}$ حيث

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)}، & \text{عندما } i = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ و } j = 1, 2, \ldots, n+1 \\ 0، & \text{عندما } i = k, k+1, \ldots, n \text{ و } j = 1, 2, \ldots, k-1 \\ a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} a_{k-1,j}^{(k-1)}، & \text{عندما } i = k, k+1, \ldots, n \text{ و } j = k, k+1, \ldots, n+1 \end{cases}$$

وهكذا

$$\tilde{A}^{(k)} = \left[\begin{array}{ccccccc:c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & \\ \vdots & & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)} \end{array}\right] \quad (6.6)$$

يمثِّل النظام الخطي المكافئ الذي حذف فيه x_{k-1} من المعادلات $E_k, E_{k+1}, \ldots, \ E_n$.

وستفشل العملية إذا كان أي من $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, a_{33}^{(3)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}, a_{nn}^{(n)}$ يساوي صفرًا؛ لأن الخطوة

$$\left(E_i - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} E_k\right) \to E_i$$

إما أنه لا يمكن تنفيذها (هذا في حالة أن واحدًا من $a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$ يساوي صفرًا)، وإما أنه لا يمكن إجراء التعويض الارتجاعي (في حالة $a_{nn}^{(n)} = 0$).

ومن الممكن أن النظام ما زال له حل، ولكن لا بد من تغيير الطريقة لإيجاد الحل. والتوضيح في مثال الآتي:

مثال 3 لديك النظام الخطي

$$\begin{aligned}
E_1: &\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8\\
E_2: &\quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20\\
E_3: &\quad x_1 + x_2 + x_3 = -2\\
E_4: &\quad x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4
\end{aligned}$$

إن المصفوفة الموسعة هي

$$\tilde{A} = \tilde{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8\\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20\\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4\end{array}\right]$$

وإن إجراء العمليات

$$(E_4 - E_1) \to (E_4) \text{ و } (E_2 - 2E_1) \to (E_2),\ (E_3 - E_1) \to (E_3)$$

يعطي

$$\tilde{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12\end{array}\right]$$

وبما أن $a_{22}^{(2)}$ المسمّى بالعنصر المحوري **pivot element** يساوي صفرًا، فإنه لا يمكن استمرار الطريقة بنمطها الحالي. ولكن العملية $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$ مسموح بها، ولذلك نبدأ بتمعن العناصر $a_{32}^{(2)}$ و $a_{42}^{(2)}$ للتوصل إلى أول عنصر غير صفري. وبما أن $a_{32}^{(2)} \neq 0$ نجري العملية $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$ لنحصل على مصفوفة جديدة

إن العنصر المحوري في أي عمود محدد هو العنصر المستخدم لوضع أصفار في الخلايا الأخرى لذلك العمود.

$$\tilde{A}^{(2)'} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12\end{array}\right]$$

بما أن x_2 قد حذفت من E_3 و E_4 فإن $\tilde{A}^{(3)}$ تصبح $\tilde{A}^{(2)'}$ ويستمر الحساب في العملية $(E_4 + 2E_3) \to (E_4)$ التي تعطي

$$\tilde{A}^{(4)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right]$$

وأخيرًا، يطبَّق التعويض الارتجاعي ليعطي

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2,$$

$$x_3 = \frac{[-4-(-1)x_4]}{-1} = 2$$

$$x_2 = \frac{[6-x_4-(-1)x_3]}{2} = 3$$

$$x_1 = \frac{[-8-(-1)x_4-2x_3-(-1)x_2]}{1} = -7$$

■

يوضح مثال (3) ما يمكن عمله إذا كان $a_{kk}^{(k)} = 0$ لعدد ما $k = 1, 2, \ldots, n-1$، ويجب تمعُّن العمود k للمصفوفة $\tilde{A}^{(k-1)}$ من الصف k حتى الصف n للحصول على أول مدخل غير صفري. إذا كان $a_{pk}^{(k)} \neq 0$ لعدد ما p حيث $k+1 \leq p \leq n$ يجب إجراء العملية $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$ للحصول على $\tilde{A}^{(k-1)'}$. ويمكن بعد ذلك استمرار العملية لتكوين $\tilde{A}^{(k)}$. إذا كان $a_{pk}^{(k)} = 0$ لكل p يمكن برهنة (انظر المبرهنة (16.6) في الفصل 4.6) أن النظام الخطي ليس له حل وحيد، وأن العملية تتوقف. وأخيرًا إذا كان $a_{nn}^{(n)} = 0$ فإن النظام الخطي ليس له حل وحيد، وعليه تتوقف العملية مرة أخرى. إن الخوارزمية 1.6 تلخِّص عملية الحذف لجاوس باستخدام التعويض الارتجاعي. وتستخدم الخوارزمية عملية التمحور عندما يقوم المحور $a_{kk}^{(k)} = 0$ بتبديل الصف k بالصف p، حيث p أصغر عدد صحيح وأكبر من k، فسيكون له $a_{pk}^{(k)}$ غير صفري.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.6

طريقة جاوس للحذف باستخدام التعويض الارتجاعي
Gaussian Elimination with Backward Substitution

لحل النظام الخطي $n \times n$ الآتي:

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\
E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\
&\quad \vdots \\
E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}
\end{aligned}$$

المدخلات: عدد من المجاهيل والمعادلات n ، مصفوفة معزَّزة $A = [a_{ij}]$، حيث

$1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n+1$

المخرجات: حلّ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أو رسالة تقول: ليس للنظام الخطي حل وحيد.

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1, \ldots, n-1$ نفذ الخطوات 2 ،3 ، 4. (عملية الحذف)
2	افترض p أصغر عدد صحيح بحيث $a_{pi} \neq 0$ و $i \leq p \leq n$ إذا لم يحقق العدد p ذلك فعندئذ يكون المخرج (لا يوجد حل وحيد). توقف.
3	إذا كان $p \neq i$ فعندئذ نفِّذ $(E_p) \longleftrightarrow (E_i)$.
4	لكل $j = i+1, \ldots, n$ نفِّذ الخطوتين 5 و6.
5	ضع $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$



6	أجرِ العملية $(E_j - m_{ji}E_i) \to (E_j)$
7	إذا كان $a_{nn} = 0$ فإن المخرج (لا يوجد حل وحيد). توقف.
8	ضع $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$ (ابدأ بالتعويض الارتجاعي).
9	لكل $i = n-1, \ldots, 1$ ضع $x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right] \Big/ a_{ii}$
10	المخرج $(x_1, \ldots, x_n)$ (نجحت العملية). توقف.

■

إن برمجيــات CAS جميعها تحوي برمجيــات المصفوفات. ولتعريف المصفوفات وتنفيذ عمليات الحذف لجاوس باســتخدام مابل Maple؛ عليك أولاً الدخــول إلى مكتبة الجبر الخطي Linear Algebra باستخدام الأمر

```
>with(LinearAlgebra)
```

لتعريف المصفوفة $\tilde{A}^{(1)}$ في مثال 2 التي سنسميها AA استخدم الأمر

```
>AA:=Matrix([[1,-1,2,-1,-8],[2,-2,3,-3,-20],[1,1,1,0,-2],[1,-1,4,3,4]])
```

إن هذا يعمل قائمة بالمدخلات بحسب صفوف المصفوفة الموسعة $AA \equiv \tilde{A}^{(1)}$: إن الدالة

RowOperation(AA,[i,j],m)

يجري العملية $(E_j + mE_i) \to (E_j)$.

وهذا الأمر نفســه دون المعلمة الأخيرة RowOperation(AA,[i,j],m) يجري العملية $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

ومن ثم فإن متتالية العمليات

```
>AA1:=RowOperation(AA,[2,1],-2)
>AA2:=RowOperation(AA1,[3,1],-1)
>AA3:=RowOperation(AA2,[4,1],-1)
>AA4:=RowOperation(AA3,[2,3])
>AA5:=RowOperation(AA4,[4,3],2)
```

تؤدي إلى النتيجة $AA5 \equiv \tilde{A}^{(4)}$.

وبطريقة أخرى فإن الأمر المنفرد

AA5:=GaussianElimination(AA)

يؤدي إلى المصفوفة المنخفضة نفسها.

وفي أي من الحالتين فالعملية النهائية

```
>x:=BackwardSubstitute(AA5)
```

تعطي الحل

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مثال 4 إن الغرض من هذا مثال هو توضيح ما يمكن أن يحدث لو فشلت الخوارزمية (1.6).

إن الحسابات ستجري آنيًا على نظامين خطيين

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

وإن هذين النظامين ينتجان المصفوفتين

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 2 & 2 & 1 & : & 4 \\ 1 & 1 & 2 & : & 6 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 2 & 2 & 1 & : & 6 \\ 1 & 1 & 2 & : & 6 \end{bmatrix}$$

وبما أن $a_{11} = 1$ نجري $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$ و $(E_3 - E_1) \to (E_3)$

فينتج

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 0 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 0 & -1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix}$$

عند هذه النتيجة $a_{22} = a_{32} = 0$

تتطلب الخوارزمية توقف العملية، ومن ثم عدم الحصول على حل لأي من النظامين. إن كتابة المعادلات لكل نظام يعطي

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_3 &= -2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_3 &= -4 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

إن النظام الخطي الأول له عدد لانهائي من الحلول

$x_3 = 2,\ x_2 = 2 - x_1$ و x_1

النظام الخطي الثاني يؤدي إلى تناقض

$x_3 = 2$ و $x_3 = 4$، لذلك لا يوجد حل.

لا يوجد حل وحيد لكل حالة ضمن ما نستنتجه من الخوارزمية (1.6). ■

وعلى الرغم من أنه يمكن النظر إلى الخوارزمية (1.6) على أنها إنشاء المصفوفات $\tilde{A}^{(1)}, \ldots, \tilde{A}^{(n)}$ فإنه يمكن إجراء الحسابات على الحاسوب بتخزين مصفوفة واحدة $n \times (n+1)$ فقط. ويمكن أن نعوض في كل خطوة عن قيمة a_{ij}، السابقة بالقيمة الجديدة. بالإضافة إلى ذلك يمكننا تخزين m_{ji} فـي مواقـع a_{ij}؛ لأن a_{ij} قيمتـه 0 لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$ و n و $j = i+1, i+2, \ldots, n$.

وهكذا فبدلًا من A يمكن كتابة المضاريب تحت القطر الرئيس وكتابة مدخلات $\tilde{A}^{(n)}$ غير الصفرية علـى القطر الرئيس وفوقه. ويمكن اسـتخدام هذه القيم لحـل أنظمة خطية أخرى محتوية على المصفوفة الأصلية A، كما سـنرى في الفصل (5.6). إن الوقت اللازم لكل من الحسـابات وتدوير الخطأ الناتج يعتمد على عدد عمليات الحساب للنقطة العائمة اللازمة لحل المسألة روتينيًا.

وعمومًا فإن الوقت اللازم لإجراء الضرب أو القسـمة على الحاسـوب هو نفسه تقريبًا، وهو أكثر بكثير من الوقت اللازم لإجراء الجمع أو القسمة. وعلى كل حال فإن الفروق الفعلية تعتمد على نظام الحساب المحدد. ولعرض تعداد العمليات لأي طريقة معينة، سنعدّ العمليات اللازمة لحل نظام خطي نمطي مؤلف من n معادلات بعدد n من المجاهيل باستخدام الخوارزمية 1.6. سنبقي عدد عمليات الجمع/ الطرح منفصلًا عن عمليات الضرب/ القسـمة بسـبب الفرق في الوقت. ولا يوجد أي عمليات حسـابية لغاية الخطوتين 5 و 6 في الخوارزمية، وتتطلب الخطوة 5 $(n - i)$ من عمليات القسمة، وإن وضع $(E_j - m_{ji}E_i)$ بدلًا من E_j في الخطوة 6 يتطلب ضرب m_{ji} في كل حد في E_i، وينتج من ذلك $(n-i)(n-i+1)$ من عمليات الضرب.

وبعد استكمال هذا، فإن كل حد في المعادلة الناتجة يطرح من الحد المقابل في E_j.

إن هـذا يتطلب $(n-i)(n-i+1)$ من عمليات الطرح. لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$ فإن العمليات اللازمة في الخطوتين 5 و 6 هي كما يلي:

ضرب/ قسمة

$$(n-i)+(n-i)(n-i+1)=(n-i)(n-i+2)$$

جمع/ طرح

$$(n-i)(n-i+1)$$

يمكن الحصول على العدد الكلي للعمليات اللازمة لهذه الخطوات بجمع تعداد العمليات لكل i.
تذكر من حساب التفاضل والتكامل أن

$$\sum_{j=1}^{m} j^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{m} 1=m, \quad \sum_{j=1}^{m} j=\frac{m(m+1)}{2}$$

ومن ثم نحصل على تعدادات العمليات الآتية:

الضرب/ القسمة

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2)=\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+2n-2i)$$

$$=(n^2+2n)\sum_{i=1}^{n-1}1-2(n+1)\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}i^2=\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

الجمع/ الطرح

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)=\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+n-i)$$

$$=(n^2+n)\sum_{i=1}^{n-1}1-(2n+1)\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}i^2=\frac{n^3-n}{3}$$

إن الخطوات الوحيدة الأخرى في الخوارزمية (1.6) التي تحتوي على عمليات حسابية هي تلك اللازمة للتعويض الارتجاعي، وهي الخطوتان 8 و9. وتتطلّب الخطوة 8 عملية قسمة واحدة. وتتطلّــب الخطــوة 9 $(n-i)$ من عمليات الضــرب و $(n-i-1)$ من عمليات الجمع لكل حد جمع، ثم عملية طرح واحدة وعملية قسمة واحدة.
إن العدد الكلي للعمليات في الخطوتين 8 و9 هو كما يلي:

ضرب/ قسمة

$$1+\sum_{i=1}^{n-1}((n-i)+1)=\frac{n^2+n}{2}$$

جمع/ طرح

$$\sum_{i=1}^{n-1}((n-i-1)+1)=\frac{n^2-n}{2}$$

ولذلك فإن العدد الكلي للعمليات الحسابية في الخوارزمية 1.6 هو

ضرب/ قسمة

$$\frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6} + \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$$

جمع/ طرح

$$\frac{n^3 - n}{3} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$$

عندما تكون n كبيرة فإن العدد الكلي لعمليات الضرب والقسمة هو $n^3/3$ تقريبًا، كما هو الحال فــي العــدد الكلي لعمليات الجمــع والطرح. وهكذا تزداد كمية الحســاب والوقت اللازم مع n بالتناسب مع n^3 كما في جدول (1.6).

جدول 1.6

ضرب/ قسمة	جمع/ طرح	n
11	17	3
375	430	10
42,875	44,150	50
338,250	343,300	100

EXERCISE SET مجموعة التمارين 1.6

1. أوجــد حــلًّا بالطرائق البيانية إن أمكن لكل من الأنظمة الخطية الآتية، واشــرح النتائج من وجهة نظر هندسية:

أ. $x_1 + 2x_2 = 3$, $x_1 - x_2 = 0$

ب. $x_1 + 2x_2 = 3$, $2x_1 + 4x_2 = 6$

ج. $x_1 + 2x_2 = 0$, $2x_1 + 4x_2 = 0$

د. $2x_1 + x_2 = -1$, $4x_1 + 2x_2 = -2$, $x_1 - 3x_2 = 5$

2. أوجــد حلًّا بالطرائــق البيانية إن أمكن لكل من الأنظمة الخطية الآتية، واشــرح النتائج من وجهة نظر هندسية:

أ. $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$

ب. $x_1 + 2x_2 = 3$, $-2x_1 - 4x_2 = 6$

ج. $2x_1 + x_2 = -1$, $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 - 3x_2 = 5$

د. $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1$

3. اســتخدم طريقة جاوس للحذف باســتخدام التعويض الارتجاعي وحســاب تقريب لعددين فــي حــل الأنظمة الخطية الآتية، ولا تعد ترتيب المعادلات: (إن الحل الصحيح لكل نظام هو $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$.)

أ. $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$, $2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$, $x_1 + x_2 - 3x_3 = -9$

ب. $4x_1 - x_2 + x_3 = 8$, $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$

4. اســتخدم طريقة جاوس للحذف باســتخدام التعويض الارتجاعي وحســاب تقريب لعددين فــي حــل الأنظمة الخطية الآتية، ولا تعد ترتيب المعــادلات: (إن الحل الصحيح لكل نظام هو

($x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$.)

أ.
$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \\ \tfrac{5}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5 \\ \tfrac{1}{9}x_1 + \tfrac{1}{9}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 &= -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

5. اســتخدم خوارزمية الحذف لجاوس لحل الأنظمة الخطية الآتية إذا كان ذلك ممكنًا، وحدّد ما إذا كانت التبادلات في الصفوف ضرورية أو لا:

أ.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 &= 3 \\ x_1 + 1.5x_2 &= 4.5 \\ -3x_2 + 0.5x_3 &= -6.6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

6. اســتخدم خوارزمية الحذف لجاوس لحل الأنظمة الخطية الآتية إذا كان ذلك ممكنًا، وحدّد ما إذا كانت التبادلات في الصفوف ضرورية أو لا:

أ.
$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 2 \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_4 &= 5 \\ x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

7. استخدم الخوارزمية 1.6 ومابل Maple بالأمر DIGITS:=10 لحل الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 &= 9 \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 8 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913 \\ 2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 &= 28.544 \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 &= \tfrac{1}{6} \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 &= \tfrac{1}{7} \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 &= \tfrac{1}{8} \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 + \tfrac{1}{7}x_4 &= \tfrac{1}{9} \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 &= 7 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 &= 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

8. اســتخدم الخوارزمية 1.6 ومابــل Maple بالأمر DIGITS:=10 لحــل الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 - \tfrac{1}{8}x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{1}{9}x_3 &= 1 \\ \tfrac{1}{7}x_1 + \tfrac{1}{7}x_2 + \tfrac{1}{10}x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 2.71x_1 + x_2 + 1032x_3 &= 12 \\ 4.12x_1 - x_2 + 500x_3 &= 11.49 \\ 3.33x_1 + 2x_2 - 200x_3 &= 41 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ ex_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + \sqrt{3}x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 16 \\ 16x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 32 \end{aligned}$$

9. لديك النظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6\alpha x_2 &= 3 \\ 3\alpha x_1 - x_2 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

أ. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث لا يكون هناك حلول للنظام.

ب. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث يكون للنظام ما لانهاية من الحلول.

ج. على فرض وجود حل وحيد لقيمة معطاة للمعامل α، أوجد الحل.

10. لديك النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 - \ \ x_2 + \alpha x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 3 \\ \alpha x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

أ.أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث لا يكون هناك حلول للنظام.
ب.أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث يكون للنظام ما لانهاية من الحلول.
ج. على فرض وجود حل وحيد لقيمة معطاة للمعامل α، أوجد الحل.

11. أن العمليات
أ. $(\lambda E_i) \to (E_i)$ ب. $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$ ج. $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$
لا تغير مجموعة حل النظام الخطي.

12. طريقة جاوس – جوردن **Gauss - Jordan Method**
توصف هذه الطريقة كما يلي:
اســتخدم المعادلة i ليس فقط لحذف x_i من المعادلات $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_n$، كما اســتخدمت في طريقة الحذف لجاوس، بل لحذف x_i من $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. وعند تخفيض [A,b] إلى الصيغة

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right]$$

نحصل على الحل بوضع

$$x_i = \frac{a_{i,n+1}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$
إن هذه الطريقة تتحاشى التعويض الارجاعي في طريقة الحذف لجاوس. ابنِ خوارزمية لطريقة جاوس – جوردان على غرار الخوارزمية (1.6).

13. استخدم طريقة جاوس – جوردان وحساب تقريب لخانتين لحل الأنظمة في التمرين (3).

14. أعد حل التمرين ٧ باستخدام طريقة جاوس – جوردان.

15. برهن أن طريقة جاوس – جوردان تتطلب
$\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2}$ من عمليات الضرب/ القسمة، و $\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$ من عمليات الجمع/ الطرح.
ب. اعمــل جــدولًا لمقارنة عدد العمليــات اللازمة لطريقة جاوس – جــوردان وطريقة الحذف لجاوس للقيم $n = 3, 10, 50, 100$
أي الطريقتين تتطلب عدد عمليات أقل؟

16. افترض الطريقة الآتية الهجين من الطريقتين الحذف لجاوس/ جاوس– جوردان لحل النظام (4.6). أولًا، طبق طريقة الحذف لجاوس لتحويل النظام إلى صيغة مثلثية، ثم اســتخدم المعادلة n لحذف معاملات x_n في كل صف من الصفوف $n - 1$ الأولى.
بعد استكمال ذلك استخدم المعادلة $(n-1)$st لحذف معادلات x_{n-1} من الصفوف $n - 2$ الأولى وهكذا.
سيظهر النظام في النهاية مثل النظام المختزل في التمرين (12).
أ. برهن أن هذه الطريقة تتطلب $\frac{n^3}{3} + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ من عمليات الضرب/ القســمة و $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n$ من عمليات الجمع/ الطرح.
ب. اعمل جدولًا لمقارنة العمليات اللازمة لطريقة الحذف لجاوس، جاوس – جوردان، والطريقة الهجين للقيم $n = 3, 10, 50, 100$.

17. استخدم طريقة جاوس – جوردان وحساب تقريب لخانتين لحل الأنظمة في التمرين (3).

18. أعد حل التمرين (7) باستخدام الطريقة الموصوفة في التمرين (16).

19. افترض أنه في نظام بيولوجي يوجد n نوع من الحيوانات و m مصدر للغذاء.

افترض أن x_j تمثّل مجتمع النوع j لكل $j = 1,\ldots, n$، وافترض b_i تمثّل كمية الغذاء المتاحة يوميًا من الغذاء i، وأن a_{ij} تمثّل كمية الغذاء i المستهلكة من قبل النوع j.

إن النظام الخطي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

يمثّل التوازن، حيث توجد كمية يومية من الغذاء تساوي الكمية المستهلكة من قبل كل نوع يوميًا.

أ. افترض

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و $\mathbf{x} = (x_j) = [1000, 500, 350, 400]^t$

و $\mathbf{b} = (b_i) = [3500, 2700, 900]^t$

هل يوجد غذاء كافٍ لمعدل الاستهلاك اليومي؟

ب. ما أكبر عدد من الحيوانات من كل نوع يمكن إضافته إلى النظام بانفراد على أن يبقى الغذاء كافيًا للاستهلاك؟

ج. إذا انقرض النوع 1، فكم يزداد كل نوع بحيث يكون الغذاء كافيًا؟

د. إذا انقرض النوع 2، فكم يزداد كل نوع بحيث يكون الغذاء كافيًا؟

20. إن معادلة تكامل فردهولم Fredholm من النوع الثاني تكون على الصيغة

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt$$

حيث a،b والدالتان f و K معطاة.

لإيجاد تقريب للدالة u على الفترة $[a,b]$ ؛ نختار التجزئة

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

$$u(x_i) = f(x_i) + \int_a^b K(x_i,t)u(t)\,dt$$

لكل $i = 0,\ldots, m$

ونحل المعادلات لإيجاد $u(x_0), u(x_1),\ldots, u(x_m)$

تقرّب التكاملات باستخدام معادلات التكامل المبنية على النقاط $x_0,\ldots, x_m$

ليكن في مسألتنا $a = 0, b = 1, f(x) = x^2$ و $K(x,t) = e^{|x-t|}$

أ. برهن أنه يجب حل النظام الخطي

$$u(0) = f(0) + \tfrac{1}{2}[K(0,0)u(0) + K(0,1)u(1)], \quad u(1) = f(1) + \tfrac{1}{2}[K(1,0)u(0) + K(1,1)u(1)]$$

عند استخدام قاعدة شبه المنحرف.

ب. كوّن النظام الخطي وحُلّه عند استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة بأخذ $n = 4$.

ج. أعد الفقرة (ب) باستخدام قاعدة سمبسون المركبة.

2.6 استراتيجيات التمحور Pivoting Strategies

وجدنـــا فـــي إثبات الخوارزمية (1.6) الحاجـــة إلى التغيير الصفي عندمـــا يكون أحد عناصر التمحور $a_{kk}^{(k)} = 0$. إن صيغة التغيير الصفي من النوع $(E_p) \longleftrightarrow (E_k)$ حيث p أصغر عدد صحيح يكون أكبر من k. ويحقق $a_{pk}^{(k)} \neq 0$. ولتخفيض خطأ التدوير، غالبًا ما يكون من الضرورة إجراء تغييرات صفية حتى لو كان التمحور غير صفرية.

إذا كان المقدار $a_{kk}^{(k)}$ صغيرًا مقارنة بـ $a_{jk}^{(k)}$ فإن مقدار حد الضرب

$$m_{jk} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

سيكون أكبر من 1 كثيرًا.

إن خطأ تقريب الداخل في حســـاب أحد الحدود $a_{kl}^{(k)}$ ســـيضرب في المقدار m_{jk} عندما نحسب $a_{jl}^{(k+1)}$ مما يزيد من الخطأ الأصلي.

وكذلك عند إجراء التعويض الإرجاعي للمجهول

$$x_k = \frac{a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

الذي فيه $a_{kk}^{(k)}$ قيمة صغيرة، فإن أي خطأ في البســـط يمكن أن يكبر دراماتيكيًا، بســـبب القسمة على $a_{kk}^{(k)}$. وسنرى في مثالنا الآتي أنه في الأنظمة الصغيرة جدًا، يمكن لخطأ تقريب أن يطغى على الحسابات.

مثال 1 إن النظام الخطي

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2: &\quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{aligned}$$

لـــه الحـــل الصحيح $x_2 = 1.000$ و $x_1 = 10.00$. افترض أنه أُجريـــت طريقة الحذف لجاوس على هذا النظام باســـتخدام الحســـاب ذي الخانات الأربع مع التدوير. إن أول عنصر التمحور $a_{11}^{(1)} = 0.003000$ صغير، والمضاعف المرتبط به هو

$$m_{21} = \frac{5.291}{0.003000} = 1763.6\overline{6}$$

ويدوّر إلى العدد الكبير 1764.

وبإجراء $(E_2 - m_{21}E_1) \longrightarrow (E_2)$

واستخدام التقريب المناسب نحصل على

$$0.003000x_1 + 59.14x_2 \approx 59.17 - 104300x_2 \approx -104400$$

بدلًا من القيم الدقيقة

$$0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 - 104309.37\overline{6}x_2 = -104309.37\overline{6}$$

إن الاختلاف في مقادير $m_{21}a_{13}$ و a_{23} قد أدى إلى خطأ تدوير، ولكن لم تجرِ زيادات على خطأ التدويـــر، إن التعويـــض الإرجاعي يعطي $x_2 \approx 1.001$ الذي هو تقريب قريب من القيمة الفعلية $x_2 = 1.000$، وعلى كل حال فبسبب صغر عنصر التمحور $a_{11} = 0.003000$ ، فإن

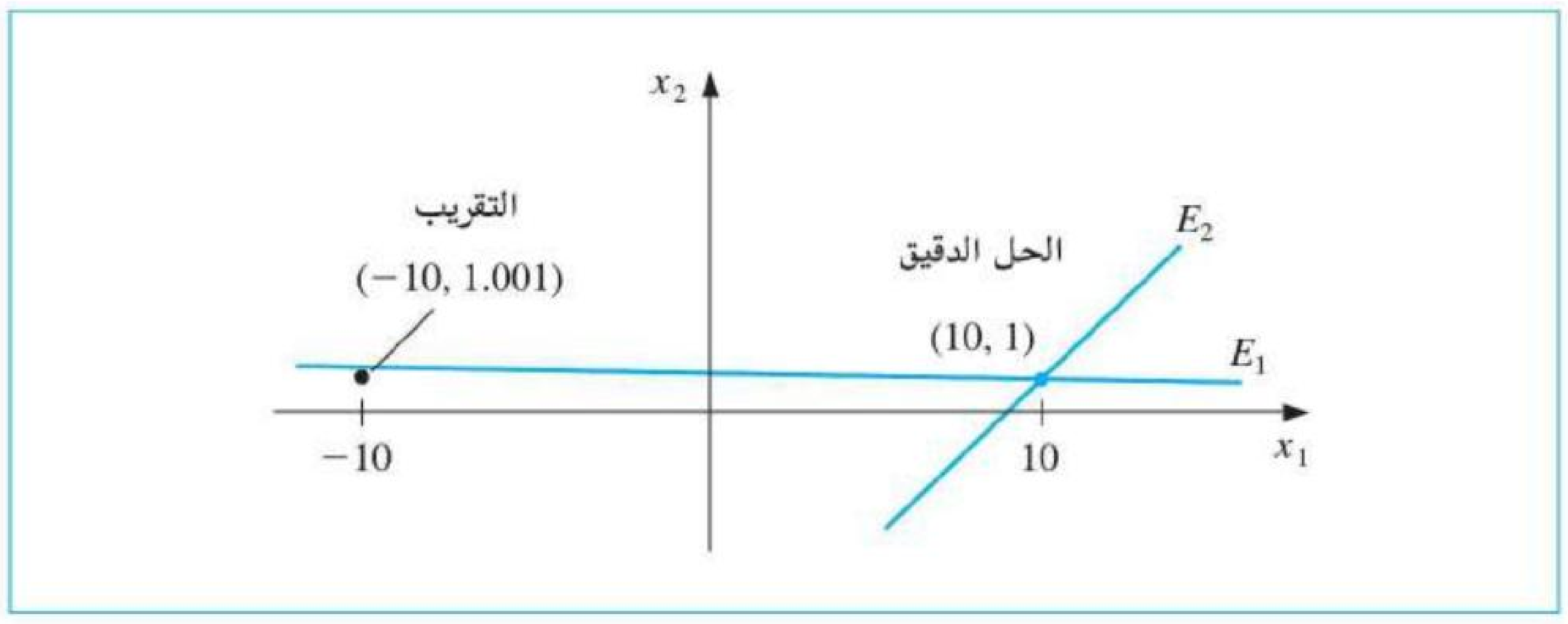
$$x_1 \approx \frac{59.17 - (59.14)(1.001)}{0.003000} = -10.00$$

يحتوي على خطأ صغير قيمته 0.001 مضروب في العدد

$$\frac{59.14}{0.003000} \approx 20000$$

إن هـذا يهدم تقريب القيمة الفعلية $x_1 = 10.00$ ، ومـن الواضح أن هذا مثال مصطنع، ويُظهر الرسـم في شكل (1.6) كيف يمكن حدوث الخطأ بسـهولة، ولكن بالنسبة إلى الأنظمة الخطية الأكبر قليلًا فإن التنبؤ مسبقًا بمتى يمكن حدوث خطأ فادح أمر صعب.

شكل 1.6



إن مثال 1 يوضِّح كيفية ظهور الصعوبات عندما يكون عنصر مركز التمحور $a_{kk}^{(k)}$ صغيرًا بالنسـبة إلـى المدخـلات $a_{ij}^{(k)}$ لـكل $k \le i \le n$ و $k \le j \le n$. ولتجنب هذه المشـكلة؛ يجري التمحور باختيـار عنصر $a_{pq}^{(k)}$ كبير القيمة ليكون مركـزًا محوريًّا، وبعد ذلك يحدث تبادل بين الصفين k وp، ونتبع بعد ذلك تبادل العمودين k وp إذا كان هناك ضرورة.

إن أبسـط استراتيجية هي أن تختار عنصرًا في العمود نفسه الواقع تحت القطر، وله أكبر قيمة مطلقة، وبالتحديد نعيِّن أصغر عدد p، بحيث يحقق $p \ge k$

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$$

ثم نجري $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$

ولا حاجة إلى تبادل الأعمدة في هذه الحالة.

مثال 2 افترض ثانية النظام

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2: &\quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{aligned}$$

إن عملية التمحور التي شرِحت تؤدي أولًا إلى إيجاد

$$\max\left\{|a_{11}^{(1)}|, |a_{21}^{(1)}|\right\} = \max\{|0.003000|, |5.291|\} = |5.291| = |a_{21}^{(1)}|$$

تنفّذ بعدئذ العملية $(E_2) \leftrightarrow (E_1)$ لتعطي النظام

$$E_1: \quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$
$$E_2: \quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17$$

إن المضاعف (العدد الذي نضرب فيه) لهذا النظام هو

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0.0005670$$

والعملية $(E_2 - m_{21}E_1) \rightarrow (E_2)$ تختزل النظام إلى

$$5.291x_1 - 6.130x_2 \approx 46.78$$
$$59.14x_2 \approx 59.14$$

وتكـون الإجابـات ذات الخانت الأربع الناتجة من التعويـض الإرجاعي هي القيم الصحيحة $x_1 = 10.00$ و $x_2 = 1.000$. ■

إن الطريقة التي شـرحت تسـمى التمحـور الجزئـي **Partial Pivoting** أو تمحور العمود الأعظم **maximal column pivoting** وتُفصّـل في الخوارزمية (2.6). إن التبادل الصفي الفعلي قد حوكِيَ في الخوارزمية بتبادل القيم في الأمر **NROW** في الخطوة 5.

ALGORITHM
الخوارزمية
2.6

طريقة الحذف لجاوس بالتمحور الجزئي
Gaussian Elimination with Partial Pivoting

لحل النظام الخطي $n \times n$

$$E_1: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}$$
$$E_2: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$E_n: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}$$

المدخلات: عدد من المجاهيل والمعادلات n، المصفوفة المزيدة $A = [a_{ij}]$ حيث $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le n+1$.

المخرجات: حل المجاهيل $x_1, \ldots, x_n$ أو رسالة تقول: إن النظام الخطي ليس له حل وحيد.

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1, \ldots, n$ ضع $NROW(i) = i$ (حدد مؤشر الصف الابتدائي).
2	لكل $i = 1, \ldots, n-1$ نفّذ الخطوات 3-6. (عملية الحذف)
3	اجعل p أصغر عدد صحيح بحيث $i \le p \le n$ و $\lvert a(NROW(p), i)\rvert = \max_{i \le j \le n} \lvert a(NROW(j), i)\rvert$ (Notation: $a(NROW(i), j) \equiv a_{NROW_i, j}$.)
4	إذا كان $a(NROW(p), i) = 0$ تنتج المخرجات (لا يوجد حل وحيد). توقف.
5	إذا كان $NROW(i) \ne NROW(p)$ فضع $NCOPY = NROW(i)$ $NROW(i) = NROW(p)$ $NROW(p) = NCOPY$ (التبادل الصفي المحاكى)



6	لكل $j = i + 1, \ldots, n$ نفّذ الخطوتين 7 و8.
7	ضع $m(NROW(j), i) = a(NROW(j), i)/a(NROW(i), i)$.
8	نفّذ $(E_{NROW(j)} - m(NROW(j), i) \cdot E_{NROW(i)}) \rightarrow (E_{NROW(j)})$.
9	إذا كان $a(NROW(n), n) = 0$ فضع المخرجات (لا يوجد حل وحيد). توقف.
10	ضع $x_n = a(NROW(n), n + 1)/a(NROW(n), n)$ (ابدأ بالتعويض التراجعي.)
11	لكل $i = n - 1, \ldots, 1$ ضع $x_i = \dfrac{a(NROW(i), n + 1) - \sum_{j=i+1}^{n} a(NROW(i), j) \cdot x_j}{a(NROW(i), i)}$
12	المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$ (نجحت العملية). توقف.

■

كل مضاعف m_{ji} في خوارزمية التمحور الجزئي له قيمة تساوي أو أقل من 1. وعلى الرغم من أن هذه الاستراتيجية كافية لمعظم النظم الخطية، إلا أنه تظهر حالات لا تكون الاستراتيجية فيها ناجحة.

مثال 3 النظـام الخطي الآتي هو ذاتـه في مثالين 1 و2، إلا أن المدخلات في المعادلة الأولى قد ضربت في العدد 10^4.

$$E_1: \quad 30.00x_1 + 591400x_2 = 591700$$
$$E_2: \quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

إن العملية الموصوفة في الخوارزمية (2.6) بالحساب ذي الخانات الأربع تؤدي إلى النتائج نفسها كما في مثال (1).

إن أكبر قيمة في العمود الأول هي 30.00 والمضاعف

$$m_{21} = \frac{5.291}{30.00} = 0.1764$$

يؤدي إلى النظام

$$30.00x_1 + 591400x_2 \approx 591700$$
$$-104300x_2 \approx -104400$$

الـذي يعطـي الحلـول غيـر الدقيقة كما فـي مثال 1 وهـي $x_2 \approx 1.001$ و $x_1 \approx -10.00$.

■

التمحور الجزئي الموزون Scaled Partial Pivoting الذي يُسمى أيضًا تمحور العمود الموزون Scaled-column Pivoting هو عملية مناسبة للنظام في مثال (3) بحيث يضع العنصر الأكبر من المدخلات في صفه بوصفه مركزًا للتمحور. إن الخطوة الأولى في هذه العملية تبدأ بتعريف عامل ضربي (وزن) s_i لكل صف كما يلي:

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|$$

إذا حـدث وكان $s_i = 0$ لأي عـدد i، فهذا يعني أنه ليس للنظام حـل وحيد؛ لأن المدخلات جميعها في الصف i هي أصفار.

وعلى فرض أن هذه ليست هي الحالة، فإن التبادل الصفي المناسب لوضع أصفار في العمود الأول يتحدد باختيار أصغر عدد صحيح p بحيث

$$\frac{|a_{p1}|}{s_p} = \max_{1\le k\le n} \frac{|a_{k1}|}{s_k}$$

ومن ثم إجراء التبديل $(E_p) \leftrightarrow (E_1)$.

إن تأثير الوزن يكون لضمان أن العنصر الأكبر في كل صف له قيمة نسبية 1 قبل إجراء المقارنة لتبديل الصفوف، وبطريقة مماثلة وقبل حذف المتغير x_i باستخدام العمليات $E_k - m_{ki}E_i$ لكل $k = i + 1,\dots, n$ نختار أصغر عدد صحيح $p \ge i$ بحيث

$$\frac{|a_{pi}|}{s_p} = \max_{i\le k\le n} \frac{|a_{ki}|}{s_k}$$

وننفِّذ المبادلة الصفية $E_i \leftrightarrow E_p$ إذا كان $p \ne i$. إن العوامل الضربية $s_1,\dots, s_n$ تحسب مرة واحدة فقط عند البدء بالعليا، ويجب مبادلتها عند تنفيذ مبادلة الصفوف.

إن تطبيق التمحور الجزئي الموزون على مثال 3 يعطي

$$s_1 = \max\{|30.00|, |591400|\} = 591400 \quad \text{و} \quad s_2 = \max\{|5.291|, |-6.130|\} = 6.130$$

ومن ثم

$$\frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{30.00}{591400} = 0.5073 \times 10^{-4}, \qquad \frac{|a_{21}|}{s_2} = \frac{5.291}{6.130} = 0.8631$$

وتحدث المبادلة $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$.

وبتطبيق عملية الحذف لجاوس على النظام الجديد

$$5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

$$30.00x_1 + 591400x_2 = 591700$$

نحصل على النتائج الصحيحة $x_1 = 10.00$ و $x_2 = 1.000$.

تنفِّذ الخوارزمية 3.6 عملية التمحور الجزئي الموزون.

ALGORITHM
الخوارزمية
3.6

عملية جاوس بالتمحور الجزئي الموزون

Gaussian Elimination with Scaled Partial Pivoting

الخطوات الوحيدة في هذه الخوارزمية التي تختلف عن الخوارزمية 2.6 هي:

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1,\dots, n$ ضع $s_i = \max_{1\le j\le n} \lvert a_{ij}\rvert$ إذا كان $s_i = 0$ فعندئذ تكون المخرجات (لا يوجد حل وحيد). توقف. ضع $NROW(i) = i$.
2	لكل $i = 1,\dots, n-1$ نفِّذ الخطوات 3-6. (عملية الحذف).
3	افترض p أصغر عدد صحيح حيث $i \le p \le n$ و $\frac{\lvert a(NROW(p), i)\rvert}{s(NROW(p))} = \max_{i\le j\le n} \frac{\lvert a(NROW(j), i)\rvert}{s(NROW(j))}$

■

يشرح المثال الآتي طريقة التمحور الجزئي الموزون باستخدام مابل Mable ومكتبة الجبر الخطي Linear Algebra library ذات الحساب بتقريب بعدد منتهٍ من الخانات.

مثال 4 حُلَّ النظام الخطي باستخدام حساب تقريب لثلاث خانات

$$\begin{aligned} 2.11x_1 - 4.21x_2 + 0.921x_3 &= 2.01 \\ 4.01x_1 + 10.2x_2 - 1.12x_3 &= -3.09 \\ 1.09x_1 + 0.987x_2 + 0.832x_3 &= 4.21 \end{aligned}$$

لكي نحصل على حساب تقريب بثلاث خانات، أدخل

```
>Digits:=3
```

لدينا $s_1 = 4.21, s_2 = 10.2$ و $s_3 = 1.09$

ولذلك يكون

$$\frac{|a_{21}|}{s_1} = \frac{4.01}{10.2} = 0.393, \quad \frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{2.11}{4.21} = 0.501, \quad \text{و} \quad \frac{|a_{31}|}{s_3} = \frac{1.09}{1.09} = 1$$

بعد ذلك نحمّل مكتبة الجبر الخطي بالأمر

```
>with(LinearAlgebra)
```

إن المصفوفة المزيدة AA تكون معرفة بـ

```
>AA:=Matrix([[2.11,-4.21,0.921,2.01],[4.01,10.2,-1.12,-3.09],[1.09
                    0.987,0.832,4.21]])
```

التي تعطي

$$AA := \begin{bmatrix} 2.11 & -4.21 & .921 & 2.01 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \end{bmatrix}$$

وبما أن $|a_{31}|/s_3$ هو الأكبر، نجري $(E_1) \leftrightarrow (E_3)$ باستخدام

```
>AA1:=RowOperation(AA,[1,3])
```

لنحصل على

$$AA := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 2.11 & -4.21 & .921 & 2.01 \end{bmatrix}$$

وحساب المضاعفات يعطي

```
>m21:=AA1[2,1]/AA1[1,1]
```

$$m21 := 3.68$$

```
>m31:=AA1[3,1]/AA1[1,1]
```

$$m31 := 1.94$$

ننفّذ أول عمليتين للحذف باستخدام

```
>AA2:=RowOperation(AA1,[2,1],-m21)
```

و

```
>AA3:=RowOperation(AA2,[3,1],-m31)
```

لنحصل على

$$AA3 := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 0 & 6.57 & -4.18 & -18.6 \\ 0 & -6.12 & -.689 & -6.16 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$\frac{|a_{22}|}{s_2} = \frac{6.57}{10.2} = 0.644 < \frac{|a_{32}|}{s_3} = \frac{6.12}{4.21} = 1.45$$

ننِّفذ

```
>AA4:=RowOperation(AA3,[2,3])
```

التي تعطي

$$AA4 := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 0 & -6.12 & -.689 & -6.16 \\ 0 & 6.57 & -4.18 & -18.6 \end{bmatrix}$$

إن المضاعف m_{32} يُحسب بالأمر

```
>m32:=AA4[3,2]/AA4[2,2]
```

$$m_{32} := -1.07$$

وخطوة الحذف

```
>AA5:=RowOperation(AA4,[3,2],-m32)
```

تعطي

$$AA5 := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 0 & -6.12 & -.689 & -6.16 \\ 0 & .02 & -4.92 & -25.2 \end{bmatrix}$$

ولا نســتطيع استخدام التعويض الإرجاعي **Backward Substitute**؛ لأن المدخل 02. موجود في المكان (3,2). وإن هذا المدخل غير صفري بســبب التدوير، ولكن يمكن أن نصوّب هذه المشــكلة البسيطة باستخدام الأمر

```
>AA5[3,2]:=0
```

التي تعوّض عن 02. بالصفر. ولكي تشاهد ذلك؛ أدخل

```
>AA5
```

الذي يعرض المصفوفة $AA5$.

وأخيرًا

```
>x:=BackwardSubstitute(AA5)
```

يعطي الحل

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.431 \\ 0.430 \\ 5.12 \end{bmatrix}$$

■

إن أول الحســابات الإضافية اللازمة لطريقة التمحور الجزئي الموزون تنتج عن تحديد العوامل الضربية بثوابت؛ هناك $(n-1)$ من المقارنات لكل صف من الصفوف التي عددها n، ومن ثم فيكون $n(n-1)$ مــن المقارنات. لتحديــد أول خطــوة تبادل صحيحة؛ نجري n من عمليات القســمة متبوعة بمقارنات عددها $(n-1)$،

ولذلك فإن أول تحديد للتبادل يضيف n من عمليات القسمة مع $(n-1)$ من المقارنات.

ولــما كانت العوامل الضربية تحســب لمرة واحدة، فإن الخطــوة الثانية تحتاج إلى $(n-1)$ من عمليات قسمة و $(n-2)$ من عمليات مقارنة.

ونستمر بطريقة مماثلة حتى نحصل على أصفار في المدخلات جميعها تحت القطر الرئيس عدا الصف n. إن الخطوة النهائية تتطلب عمليتي قسمة وعملية مقارنة واحدة.

وبالنتيجة فإن عملية التمحور الجزئي الموزون تضيف

$$n(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1) + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3}{2}n(n-1) \tag{7.6}$$

من عمليات المقارنة،

و

$$\sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

من عمليات القسمة إلى طريقة الحذف لجاوس.

إن الوقــت اللازم لإجراء مقارنة يقارب الوقت المطلوب لعمليات الجمع/ الطرح. ولما كان الوقت الكلي اللازم لإجراء عملية الحذف لجاوس هو من الرتبة $O(n^3/3)$ من عمليات الضرب/ القسمة و$O(n^3/3)$ من عمليات الجمع/ الطرح، فإن عملية التمحور الجزئي الموزون لا تحتاج إلى وقت إضافي ذي قيمة مهمة لحل نظام ذي قيم كبيرة لـ n.

ولنؤكد أهمية اختيار عوامل الضرب لمرّة واحدة؛ نفترض كمية الحسابات الإضافية التي ستكون مطلوبــة في حالة تعديل الطريقة، بحيث تحدّد عوامــل ضربية جديدة في كل مرّة يُتخذ فيها قرار تبادل صفي.

في هذه الحالة، فإن الحدّ $n(n-1)$ في المعادلة (7.6) يجب التعويض عنه بالمقدار

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}n(n^2-1)$$

ونتيجــة لذلــك، فــإن طريقــة التمحــور ســتضيف $O(n^3/3)$ مــن المقارنــات، بالإضافة إلى $[n(n+1)/2] - 1$ من عمليات القسمة.

يجــب إذن ضمن نظام ما من نوع التمحور هذا اســتخدام ما يُســمى التمحــور التام (الأعظمي) **Complete** (or *maximal*).

إن التمحور الكامل في الخطوة k يتفحّص استخدام المدخلات a_{ij} جميعها لكل $i = k, k+1, \ldots, n$

و n ، $j = k, k+1, \ldots$ لمحاولــة إيجاد المدخلة ذات القيمــة الأعلى. تُجرى المبادلات الصفية والعمودية كلها لتوصيل هذه المدخلة إلى مركز المحور. إن الخطوة الأولى للتمحور الكلي تتطلب إجراء $n^2 - 1$ من المقارنات، وتتطلب الخطوة الثانية $(n-1)^2 - 1$ من المقارنات، وهكذا.

ولذلك فإن الوقت الإضافي الكلي اللازم لاستكمال التمحور الكامل في عملية الحذف لجاوس هو

$$\sum_{k=2}^{n}(k^2 - 1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

من المقارنات.

إن هــذا العدد قابل للمقارنة بالعدد اللازم لعملية التمحور العمودي الموزون، ولكن لا حاجة إلى عمليات القســمة، ومن ثم فإن التمحور الكامل هو اســتراتيجية محبّذة للأنظمة، حيث إن الدقة مهمة والوقت اللازم لتنفيذ هذه الطريقة مبرر.

مجموعة التمارين 2.6 EXERCISE SET

1. أوجــد المبــادلات الصفية اللازمة لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية باســتخدام الخوارزمية (1.6):

أ.
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 7 \\ 10x_1 + 20x_3 &= 6 \\ 5x_1 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

2. أوجد المبادلات الصفية اللازمة لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية باستخدام الخوارزمية 1.6 :

أ.
$$\begin{aligned} 13x_1 + 17x_2 + x_3 &= 5 \\ x_2 + 19x_3 &= 1 \\ 12x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 12x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 6x_3 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 12x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

3. كرر التمرين (1) باستخدام الخوارزمية (2.6).
4. كرر التمرين (2) باستخدام الخوارزمية (2.6).
5. كرر التمرين (1) باستخدام الخوارزمية (3.6).
6. كرر التمرين (2) باستخدام الخوارزمية (3.6).
7. كرر التمرين (1) باستخدام التمحور الكامل.
8. كرر التمرين (2) باستخدام التمحور الكامل.
9. استخدم طريقة الحذف لجاوس وحساب القطع ذي الخانات الثلاث لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية، وقارن التقريب بالحلِّ الفعلي:

أ.
$$\begin{aligned} 0.03x_1 + 58.9x_2 &= 59.2, \\ 5.31x_1 - 6.10x_2 &= 47.0. \end{aligned}$$

الحل الفعلي $[10, 1]$

ب.
$$\begin{aligned} 3.03x_1 - 12.1x_2 + 14x_3 &= -119, \\ -3.03x_1 + 12.1x_2 - 7x_3 &= 120, \\ 6.11x_1 - 14.2x_2 + 21x_3 &= -139. \end{aligned}$$

لحل الفعلي $[0, 10, \frac{1}{7}]$

ج.

$$\begin{aligned} 1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 &= 1.12 \\ 14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 &= 3.44 \\ 100x_2 - 99.9x_3 + x_4 &= 2.15 \\ 15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 &= 4.16 \end{aligned}$$

الحل الفعلي $[0.176, 0.0126, -0.0206, -1.18]$

د.

$$\begin{aligned} \pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 &= \sqrt{11} \\ \pi^2 x_1 + ex_2 - e^2 x_3 + \tfrac{3}{7}x_4 &= 0 \\ \sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 &= \pi \\ \pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + \tfrac{1}{9}x_4 &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

الحل الفعلي $[0.788, -3.12, 0.167, 4.55]$

10. استخدم طريقة الحذف لجاوس وحساب القطع ذي الخانات الثلاث لحل الأنظمة الخطية الآتية، وقارن التقريب بالحل الفعلي:

أ.

$$\begin{aligned} 58.9x_1 + 0.03x_2 &= 59.2 \\ -6.10x_1 + 5.31x_2 &= 47.0 \end{aligned}$$

الحل الفعلي $[1, 10]$

ب.

$$\begin{aligned} 3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 &= 7953 \\ 2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 &= 0.965 \\ -1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 &= 2.714 \end{aligned}$$

الحل الفعلي $[1, 0.5, -1]$

ج.

$$\begin{aligned} 2.12x_1 - 2.12x_2 + 51.3x_3 + 100x_4 &= \pi \\ 0.333x_1 - 0.333x_2 - 12.2x_3 + 19.7x_4 &= \sqrt{2} \\ 6.19x_1 + 8.20x_2 - 1.00x_3 - 2.01x_4 &= 0 \\ -5.73x_1 + 6.12x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

الحل الفعلي $[0.0998, -0.0683, -0.0363, 0.0465]$

د.

$$\begin{aligned} \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ ex_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3 \end{aligned}$$

الحل الفعلي $[1.35, -4.68, -4.03, -1.66]$

11. كرر التمرين (9) باستخدام حساب التقريب ذي الخانات الثلاث.

12. كرر التمرين (10) باستخدام حساب التقريب ذي الخانات الثلاث.

13. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي.

14. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي.

15. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي وحساب التدوير ذي الثلاث خانات.

16. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي وحساب التدوير ذي الخانات الثلاث.

17. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون.

18. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون.

19. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون وحساب التقريب ذي الخانات الثلاث.

20. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون وحساب التقريب ذي الخانات الثلاث.

21. كرر التمرين (9) باستخدام الخوارزمية (1.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

22. كرر التمرين (10) باستخدام الخوارزمية (1.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

23. كرر التمرين (9) باستخدام الخوارزمية (2.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

24. كرر التمرين (10) باستخدام الخوارزمية (2.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

25. كرر التمرين (9) باستخدام الخوارزمية (3.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

26. كرر التمرين (10) باستخدام الخوارزمية (3.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

27. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل.
28. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل.
29. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل وحساب التقريب ذي الخانات الثلاث.
30. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل وحساب التقريب ذي الثلاث خانات.
31. افترض أن

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$
$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 5$$
$$6x_1 + \alpha x_2 + 10x_3 = 5$$

حيث $|\alpha| < 10$ لأي من قيم α الآتية، فليس هناك ضرورة لمبادلة صفية عند حل هذا النظام باستخدام التمحور الجزئي الموزون.

أ. $\alpha = 6$ ب. $\alpha = 9$ ج. $\alpha = -3$

32. أنشئ خوارزمية لعملية التمحور الكامل التي وصفت في الكتاب.
33. استخدم خوارزمية التمحور الكلي لحل التمرين (9) باستخدام مابل **Maple** ذي DIGITS:= 10.
34. استخدم خوارزمية التمحور الكلي لحل التمرين (10) باستخدام مابل **Maple** ذي DIGITS:= 10.

3.6 الجبر الخطي ومعكوس المصفوفة
Linear Algebra and Matrix Inversion

قدمنا المصفوفات في الفصل (1.6) على أنها طريقة ملائمة للتعبير عن الأنظمة الخطية والتعامل معها. وسنناقش في هذا الفصل بعض المفاهيم الجبرية المرتبطة بالمصفوفات، ثم بينّا كيفية استخدامها في حل المسائل المشتملة على أنظمة خطية.

تعريف 2.6 تكون المصفوفتان A و B متساويتين إذا كان لهما العدد نفسه من الصفوف والأعمدة، وليكن $n \times m$ وكان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$ ■

على سبيل المثال

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

لأنهما يختلفان في البعد (dimension).

هناك عمليتان مهمتان تُجرى على المصفوفات، وهما حاصل جمع مصفوفتين، وضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

تعريف 3.6 إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الشكل $n \times m$ فيعرف مجموعها $A + B$ على أنه مصفوفة $n \times m$ عناصرها $a_{ij} + b_{ij}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

تعريف 4.6 عملية الضرب في ثابت **Scalar multiplication**

إذا كانت A مصفوفة $n \times m$، وكان λ عددًا حقيقيًّا فإن ضرب λ في العدد A المعبّر عنه بالرمز λA هو المصفوفة $n \times m$ التي عناصرها λa_{ij} لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

مثال 1 ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

و $\lambda = -2$ فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+4 & -1+2 & 7-8 \\ 3+0 & 1+1 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

و

$$\lambda A = \begin{bmatrix} -2(2) & -2(-1) & -2(7) \\ -2(3) & -2(1) & -2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -14 \\ -6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ ■

عبّـر بالرمز O عن المصفوفة التـي عناصرها جميعها هي 0 و $-A$ المصفوفة التي عناصرها $-a_{ij}$. ولدينا الخصائص العامة التالية لجمع المصفوفات والضرب في ثابت. وإن هذه الخصائص كافية لتصنيف المصفوفات $n \times m$ التي مدخلاتها (عناصرها) أعداد حقيقية بوصفها فضاء متجهات (أو فضاء خطي) **Vector Space** على حقل **(field)** الأعداد الحقيقية. انظر ([ND, pp. 107–109])

مبرهنة 5.6 لتكن A و B و C مصفوفات $n \times m$، وليكن λ و μ عددين حقيقيين. عندئذ تتحقق الخواص الآتية لعمليات الجمع والضرب في ثابت:

أ. $A + B = B + A$ ب. $(A + B) + C = A + (B + C)$

ج. $A + O = O + A = A$ د. $A + (-A) = -A + A = 0$

هـ. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ و. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

ز. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ ح. $1A = A$

إثبات هذه الخواص مماثل لنظرياتها في الأعداد الحقيقية. ■

تعريف 6.6 ضرب المصفوفات **Matrix product**

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الشـكل $n \times m$، وكانت $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الشـكل $m \times p$ فإن $AB = [c_{ij}]$ مصفوفة من الشكل $n \times p$، حيث c_{ij} هو العنصر الذي نحصل عليه على النحو التالي:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, p$ ■

يمكن النظر إلى حسـاب c_{ij} على أنه حاصل ضرب عناصر الصف i في المصفوفة A في العناصر المقابلة لها في العمود j للمصفوفة B متبوعًا بجمع حاصل الضرب هذا، أي

$$[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} = c_{ij}$$

حيث

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

إن هذا يفسِّـــر ســـبب كون عدد الأعمدة في A مســـاويًا بالضرورة عدد الصفوف في B لكي يكون حاصل الضرب AB معرّفًا.

إن المثال الآتي كافٍ لتوضيح عملية ضرب المصفوفات.

مثال 2 ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 11 & -4 & 11 \\ -13 & 2 & -13 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & -10 \\ 6 & -3 & -12 \end{bmatrix} = DA$$

وبالإضافة إلى ذلك

$$CB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad BC = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 8 & 18 & 8 \end{bmatrix}$$

وهما ليسا من الحجم نفسه.

وأخيرًا

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 20 & 15 \\ -16 & -14 \end{bmatrix}$$

ولكن لا يمكن حساب BA. ■

المصفوفة المربعة A (Square) هي المصفوفة التي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

المصفوفة القطرية (diagonal) $D = [d_{ij}]$ هي مصفوفة مربعة فيها $d_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$.

تعريف 7.6 المصفوفــة المحايدة ذات الرتبــة n $I_n = [\delta_{ij}]$ ، (identity matrix of order n) هي مصفوفة قطرية عناصرها

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1، & i = j \\ 0، & i \neq j \end{cases}$$

وعندما يكون حجم I_n واضحًا في السياق، يعبّر عنه عادة بالرمز I. ■

إن كلمة "قطري" المستعملة في المصفوفة تشــير إلــى عناصــر القطر الــذي يبدأ من أعلى اليســار، وينتهي إلى أســفل اليمين.

فعلى سبيل المثال فإن المصفوفة المحايدة ذات الرتبة 3 هي

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف 8.6 المصفوفة $n \times n$ المثلثية العلوية (upper - triangular) $U = [u_{ij}]$ فيها لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ العناصر $u_{ij} = 0$ لكل $i = j + 1, j + 2, \ldots, n$ والمصفوفة المثلثية السفلية (lower - triangular) $L = [l_{ij}]$ فيها لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ العناصر $l_{ij} = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, j - 1$ لديك المصفوفة الحيادية ذات الرتبة الثالثة

عناصر المصفوفة المثلثية جميعها أصفار، إلا تلك التي على القطر الرئيس أو فوقه (علوية) أو تلك التي على القطر الرئيس أو تحته (سفلية).

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 3 إذا كانت A مصفوفة 3×3 فإن

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A$$

■

إن المصفوفــة الحيادية I_n تبادلية مع أي مصفوفة A بالحجم $n \times n$؛ أي أن الترتيب في عملية الضرب ليس مهمًّا، أي أن $I_nA = A = AI_n$.

يتضــح في مثال 2 أن $AB = BA$ ليس صحيحًا بالنســبة إلــى ضرب المصفوفات. وإن خواص ضرب المصفوفات المحققة ستُعرض في المبرهنة الآتية:

مبرهنة 9.6 لتكــن A مصفوفة $n \times m$، B مصفوفة $m \times k$، C مصفوفة $k \times p$، D مصفوفة $m \times k$ و λ عددًا حقيقيًّا، فإن الخواص الآتية صحيحة:

(أ) $A(BC) = (AB)C$

(ب) $A(B + D) = AB + AD$

(ج) $I_mB = B$ و $BI_k = B$

(د) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

■

البرهان نعطي برهان الخاصية في الفقرة (أ) لشــرح الطريقة المســتخدمة في البرهان، ويمكن برهنة الفروع الأخرى بطريقة مشــابهة. ولبرهنة أن $A(BC) = (AB)C$؛ نحســب العنصر i, j لكل طرف من المعادلة. ومن الواضح أن BC هي مصفوفة $m \times p$، ويكون العنصر i, j فيها هو

$$(BC)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il}c_{lj}$$

وهكذا تكون $A(BC)$ مصفوفة $n \times p$ وعناصرها

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}(BC)_{sj} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}\left(\sum_{l=1}^{k} b_{sl}c_{lj}\right) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} a_{is}b_{sl}c_{lj}$$

وبالمثل، فإن AB تكون مصفوفة $n \times k$ وعناصرها

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj}$$

وعليه $(AB)C$ تكون مصفوفة $n \times p$ وعناصرها

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{l=1}^{k}(AB)_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sl}\right)c_{lj} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sl}c_{lj}$$

وبتبديل ترتيب الجمع في الطرف الأيمن نحصل على

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} a_{is}b_{sl}c_{lj} = [A(BC)]_{ij}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, p$، ولذلك فإن $A(BC) = (AB)C$. ■ ■ ■

ويمكن النظر إلى النظام الخطي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

على أنه معادلة مصفوفات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، حيث

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

هناك مفهوم ذو علاقة بالأنظمة الخطية، ألا وهو معكوس المصفوفة (inverse of a matrix).

تعريف 10.6 تسمى A المصفوفة $n \times n$ غير المنفردة (nonsingular) أو القابلة للعكس (invertible) إذا وجدت مصفوفة $n \times n$ يعبر عنها بالرمز A^{-1}،
حيث $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
تسمى المصفوفة A^{-1} معكوس A أو النظير الضربي للمصفوفة A. وتسمى أي مصفوفة دون معكوس منفردة (singular) أو غير قابلة للعكس (noninvertible). ■

كلمة منفردة تعني أنها تخرج عن المعتاد. ولذلك فالمصفوفة المنفردة ليس لها معكوس.

الخواص الآتية متعلقّة بمعكوس المصفوفة من تعريف (1.6)، وبراهين هذه النتائج مطلوبة في التمرين 5.

مبرهنة 11.6 لكل مصفوفة $n \times n$ غير منفردة A، يتحقق ما يلي:

أ. A^{-1} وحيدة.

ب. A^{-1} غير منفردة ويكون $(A^{-1})^{-1} = A$.

ج. إذا كانت B مصفوفة $n \times n$ غير منفردة فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

مثال 4 ليكن

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

وبطريقة مماثلة $BA = I_3$، ولذلك فإن A و B غير منفردتين ويكون $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

إذا كان لدينا معكوس A فإننا نتمكن من حل النظام الخطي على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

افترض على سبيل مثال أننا نريد حل النظام

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 &= 2 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \qquad\ &= 3 \\ -x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

أولًا: نحوّل النظام إلى معادلة بالمصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ثم نضرب طرفي المعادلة في المعكوس

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

ولذلك فإن

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{3}{9} & \frac{3}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= I_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وهذا يعطي الحل $x_1 = \frac{7}{9}$, $x_2 = \frac{13}{9}$ و $x_3 = \frac{5}{3}$. ■

وعلــى الرغم من أنه من الســهل حل نظام خطي علــى الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ إذا كانت A^{-1} معلومة فإن عملية تحديد A^{-1} لحل النظام ليست ذات فاعلية حسابيًا. (انظر التمرين 8) وعلى الرغم من

هذا كله فإنه من المفيد من وجهة نظر مفاهيمية، شرح طريقة لإيجاد معكوس المصفوفة.

ولإيجاد طريقة لحساب A^{-1} على فرض وجودها، دعنا نتفحص ضرب المصفوفات ثانية.

افترض B_j العمود j للمصفوفة B ذات $n \times n$.

$$B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

إذا كان $AB = C$ فإن العمود j للمصفوفة C يعطى بحاصل الضرب

$$\begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix} = C_j = AB_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kj} \end{bmatrix}$$

افترض أن A^{-1} موجودة، وأن $A^{-1} = B = (b_{ij})$، عندئذ $AB = I$ ويكون

$$AB_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث تظهر القيمة 1 في الصف j.

ولإيجاد B، يجب حل n من الأنظمة الخطية التي يكون فيها العمود j للمعكوس هو حل النظام الخطي الذي يكون الطرف الأيمن له العمود j في I.

ويوضح مثال الآتي هذه الطريقة:

مثال 5 لإيجاد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نجد أولًا حاصل الضرب AB حيث B هي أي مصفوفة 3×3

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{21} - b_{31} & b_{12} + 2b_{22} - b_{32} & b_{13} + 2b_{23} - b_{33} \\ 2b_{11} + b_{21} & 2b_{12} + b_{22} & 2b_{13} + b_{23} \\ -b_{11} + b_{21} + 2b_{31} & -b_{12} + b_{22} + 2b_{32} & -b_{13} + b_{23} + 2b_{33} \end{bmatrix}$$

إذا كانت $B = A^{-1}$ فإن $AB = I$ ولذلك يجب أن يكون لدينا

$$\begin{aligned} b_{11} + 2b_{21} - b_{31} &= 1, & b_{12} + 2b_{22} - b_{32} &= 0, & b_{13} + 2b_{23} - b_{33} &= 0 \\ 2b_{11} + b_{21} &= 0, & 2b_{12} + b_{22} &= 1, & 2b_{13} + b_{23} &= 0 \\ -b_{11} + b_{21} + 2b_{31} &= 0, & -b_{12} + b_{22} + 2b_{32} &= 0, & -b_{13} + b_{23} + 2b_{33} &= 1 \end{aligned}$$

انظر أن المعاملات في كل أنظمة المعادلات هي نفســها؛ والتغير في الأنظمة موجود في الطرف الأيمــن من المعادلات. ونتيجــة لذلك، يمكن إجراء عملية الحذف لجاوس على المصفوفة المزيدة المكوّنة من توليفة المصفوفات لكل نظام من الأنظمة

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

أولًا: إجراء $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$ و $(E_3 + E_1) \to (E_3)$

متبوعًا بالعملية $(E_3 + E_2) \to (E_3)$ ينتج

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ و } \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

إن إجراء التعويض الإرجاعي على كل مصفوفة من المصفوفات المزيدة

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

يعطي في النهاية

$$\begin{aligned} b_{12} &= \tfrac{5}{9}, & b_{11} &= -\tfrac{2}{9}, & b_{13} &= -\tfrac{1}{9}, \\ b_{22} &= -\tfrac{1}{9}, & b_{21} &= \tfrac{4}{9}, \quad \text{و} & b_{23} &= \tfrac{2}{9}, \\ b_{32} &= \tfrac{1}{3}, & b_{31} &= -\tfrac{1}{3}, & b_{32} &= \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

وكما يظهر في المثال (4) هذه هي العناصر في A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

■

لقــد شــرحنا في المثال الأخير حســاب A^{-1}. وكما رأينا في ذلك مثــال، فمن الملائم تكوين مصفوفة موسعة أكبر

$$[\,A \;\vdots\; I\,]$$

وبتنفيذ الحذف بحسب الخوارزمية (1.6)، نحل المصفوفة المزيدة بالصيغة

$$[\,U \;\vdots\; Y\,]$$

حيــث U مصفوفة مثلثية عليا، وY مصفوفة ناتجة من تنفيذ العمليات على المصفوفة الحيادية I التي نُفِّذت لتنقل A إلى U.

وإن عمليــة الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي تتطلب $4n^3/3 - n/3$ من عمليات الضرب/ القسمة و $4n^3/3 - 3n^2/2 + n/6$ من عمليات الجمع/ الطرح لحل الأنظمة الخطية n. (انظر التمرين 8 (أ)). يجب أخذ الحيطة التامة في ملاحظة العمليات التي لا حاجة إلى تنفيذها، فعلى ســبيل المثال في عملية الضرب عندما يكون أحد المضاعفات هو الباب 1، أو في عملية الطرح عندما يكون العــدد المطروح صفرًا، فإن عدد عمليات الضرب/ القســمة اللازمــة يمكن إنقاصه إلى n^3، ويمكن إنقاص عدد عمليات الجمع/ الطرح إلى $n^3 - 2n^2 + n$. (انظر تمرين 8 (د))

وهناك مصفوفة مهمة مرتبطة بأي مصفوفة A وتسمى منقولاً (transpose)، ويعبّر عنها بالرمز A^t.

تعريف 12.6 منقــول المصفوفــة $n \times m$ المعبّــر عنها $A = [a_{ij}]$ هو المصفوفــة $m \times n$ المعبّر عنها $A^t = [a_{ji}]$ حيث لكل i يكون العمود i في المصفوفة A^t هو نفسه الصف i في المصفوفة A، أي أن $A^t = (a_{ji})$ وتسمى المصفوفة المربعة متماثلة (symmetric) إذا كان $A = A^t$. ■

على سبيل المثال المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لها المنقولات

$$A^t = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^t = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة C متماثلة؛ لأن $C^t = C$، ولكن المصفوفات A و B غير متماثلة.

وبرهان النتيجة الآتية يتضح مباشرة من تعريف المنقول.

مبرهنة 13.6 تتحقق العمليات الآتية حول منقول المصفوفة في كل حالة تكون العملية فيها ممكنة

أ. $(A^t)^t = A$　　ب. $(A + B)^t = A^t + B^t$

ج. $(AB)^t = B^t A^t$　　د. إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ ■

يمكن استخدام أي CAS لتنفيذ أي عمليات قابلة للتنفيذ على المصفوفات. ويمكن على سبيل المثال إجراء جمع المصفوفات باستخدام مكتبة الجبر الخطي في **Maple** بـ A+B.

أما الضرب في ثابت فهو معرّف بـ c*A، وضرب المصفوفات AB ينفّذ باستخدام A.B. يوجد منقول المصفوفة باستخدام Transpose(A)، ويوجد معكوس المصفوفة باستخدام MatrixInverse(A).

EXERCISE SET　مجموعة التمارين 3.6

1. حدّد أيًّا من المصفوفات الآتية غير منفردة (قابلة للانعكاس):

أ. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. حدّد أيًّا من المصفوفات الآتية غير منفردة، واحسب المعكوس لكل منها:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

3. لديك مجموعتان من 4×4 من الأنظمة الخطية لهما مصفوفة المعاملات نفسها:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6, \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 5; \end{aligned}$$

أ. حُلَّ الأنظمة الخطية باستخدام طريقة الحذف لجاوس على المصفوفة المزيدة.

$$\left[\begin{array}{cccc:cc} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

ب. حُلَّ الأنظمة الخطية بإيجاد معكوس المصفوفة A ثم الضرب في معكوس هذه المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ج. أي الطريقتين تحتاج إلى عمليات أكثر؟

4. لديك أربعة أنظمة خطية 3×3 ذات مصفوفة معاملات واحدة:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

أ. حُلَّ الأنظمة الخطية باستخدام طريقة الحذف لجاوس على المصفوفة المزيدة.

$$\left[\begin{array}{rrr:rrrr} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

ب. حُلَّ الأنظمة الخطية بإيجاد معكوس المصفوفة A، ثم الضرب في معكوس هذه المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ج. أي الطريقتين تحتاج إلى عمليات أكثر؟

5. العبارات الآتية مطلوبة لبرهان المبرهنة (11.6):

أ. برهن أن A^{-1} موجودة فهي وحيدة.

ب. برهن أنه إذا كانت A غير منفردة فإن $A = (A^{-1})^{-1}$.

ج. إذا كانت A و B مصفوفتين $n \times n$ غير منفردتين فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6. برهن العبارات الآتية أو أعطِ أمثلة مضادة تبرهن أنها غير صحيحة:

أ. حاصل ضرب مصفوفتين متماثلتين مصفوفة متماثلة.

ب. معكوس أي مصفوفة متماثلة غير منفردة هو مصفوفة متماثلة غير منفردة.

ج. إذا كانت A و B مصفوفتين $n \times n$ فإن $(AB)^t = A^tB^t$.

7. أ. برهن أن حاصل ضرب أي مصفوفتين مثلثتين سفليين $n \times n$ هو مصفوفة مثلثية سفلية.

ب. برهن أن حاصل ضرب أي مصفوفتين مثلثتين علويين $n \times n$ هو مصفوفة مثلثية علوية.

ج. برهن أن معكوس أي مصفوفة غير منفردة مثلثية سفلية $n \times n$ هو مصفوفة مثلثية سفلية.

8. افترض أن m من الأنظمة الخطية

$$A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots, m$$

مطلوب حلها، حيث كل منها مصفوفة المعاملات $n \times n$ هي A.

أ. برهن أن تطبيق عملية الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي على المصفوفة المزيدة

$$[\ A : \ \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)}\cdots\mathbf{b}^{(m)}\ ]$$

يتطلب عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n$

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n^2 - mn + \frac{1}{6}n$

ب. برهــن أن تطبيق طريقــة جاوس–جوردان (انظر التمرين 12من الفصــل 1.6) على المصفوفة المزيدة

$$[\ A : \ \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)}\cdots\mathbf{b}^{(m)}\ ]$$

يتطلب عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{2}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n$

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{2}n^3 + (m-1)n^2 + \left(\frac{1}{2} - m\right)n$

ج. بالنظر إلى الحالة الخاصة

$$\mathbf{b}^{(p)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow p \text{ الصف}$$

لكل $p = 1, \ldots, m$ حيث $m = n$ فإن الحل $\mathbf{x}^{(p)}$ هو العمود p في المصفوفة A^{-1}.

برهن أن طريقة الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي تتطلب

عدد عمليات الضرب/ القسمة $\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$

وعدد عمليات الجمع/ الطرح $\frac{4}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

وأن طريقة جاوس – جوردان تتطلب

عدد عمليات الضرب/ القسمة $\frac{3}{2}n^3 - \frac{1}{2}n$

وعدد عمليات الجمع/ الطرح $\frac{3}{2}n^3 - 2n^2 + \frac{1}{2}n$

د. أنشـئ خوارزمية باسـتخدام طريقة الحذف لجاوس لإيجاد A^{-1}، ولكن لا تنفذ عمليات ضرب إذا كان أحد المضاعفات معلومًا أنه 1، ولا تنفذ أي عمليات جمع/ طرح عندما يساوي أحد العناصر صفرًا.

برهن أن الحسابات اللازمة تُنقص إلى n^3 من عمليات الضرب/ القسمة و $n^3 - 2n^2 + n$ من عمليات الجمع/ الطرح.

هـ. برهـن أن حل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ عندما تكون A^{-1} معلومة ما زال يتطلب n^2 من عمليات الضرب/ القسمة و $n^2 - n$ من عمليات الجمع/ الطرح.

و. برهن أن حل m من الأنظمة الخطية $A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}$ للقيم $p = 1, 2, \ldots, m$ بالطريقة $\mathbf{x}^{(p)} = A^{-1}\mathbf{b}^{(p)}$ يتطلب mn^2 من عمليات الضرب و $m(n^2 - n)$ من عمليات الجمع إذا كانت A^{-1} معلومة.

لتكـن A مصفوفـة $n \times n$. قارن عدد العمليات اللازمة لحل n من الأنظمة الخطية المحتوية على A بطريقـة الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي وبطريقة إيجـاد معكوس A أولًا، ثم بضرب طرفي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ في المصفوفة A^{-1} للأعداد $n = 3, 10, 50, 100$.

هل من المفيد على الإطلاق أن تحسب A^{-1} لغرض حل الأنظمة الخطية؟

9. اسـتخدم الخوارزمية التي أُنشئت في التمرين (8) (د) لإيجاد معكوس كل مصفوفة غير منفردة في التمرين (1).

10. غالبًا ما يكون من المفيد تجزئة المصفوفات إلى مجموعة من المصفوفات المصغرة؛ فيمكن على سبيل المثال تجزئة المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

إلى

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & -1 \\ 3 & -4 & \vdots & -3 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 6 & 5 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} \\ \cdots & & \cdots \\ B_{21} & \vdots & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & \vdots & 0 \\ 3 & 0 & 4 & \vdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -2 & 1 & -3 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

أ. برهن أن حاصل ضرب A في B في هذه الحالة هو

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & \vdots & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & \vdots & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

ب. إذا جُزّئ B بدلًا من التجزئة السابقة إلى

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 3 & 0 & 4 & \vdots & 5 \\ -2 & 1 & -3 & \vdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} \\ \cdots & & \cdots \\ B_{21} & \vdots & B_{22} \end{bmatrix}$$

فهل ستبقى النتيجة (أ) متحققة؟

ج. أعط اقتراحًا أو تخمينًا عن الشروط الضرورية لتتحقق النتيجة في الفقرة (أ) في الحالة العامة.

11. ورقــة بحث بعنوان "موجــات المجتمع "Population Waves," Bernadelli [Ber]" (انظر أيضًا [Se])

يضع بيرناديللي فرضية عن نوع مبسط من البيتل طول مدى حياته 3 سنوات. وإن معدل حياة أنثى هذا النوع $\frac{1}{2}$ في الســنة الأولى من الحياة، و$\frac{1}{3}$ في الســنة الثانية إلى السنة الثالثة، وتلد بمعدل 6 إناث جديدة قبل نهاية حياتها في نهاية الســنة الثالثة. ويمكن تمثيل ما تســاهم به أنثى البيتل في مجتمع نوعها بمصفوفة يعبّر عنها بمعنى احتمالي، وذلك بالمصفوفة $A = [a_{ij}]$ حيث تمثّل a_{ij} مساهمة أنثى البيتل الواحدة في العمر j نحو المجتمع الأنثوي ذي العمر j في السنة التالية، أي أن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

أ. إن ما تســاهم به أنثى البيتل في المجتمع بعد ســنتين يتحدد من عناصر A^2 وبعد ثلاث سنوات A^3 وهكذا. احسبA^2 وA^3 وحاول إعطاء عبارة عامة حول مساهمة أنثى البيتل في المجتمع خلال n سنة، حيث n عدد صحيح موجب.

ب. استخدم نتائجك في الفقرة (أ) لتصف ما سيحدث في السنوات القادمة في مجتمع البيتل المكوّن من 6000 أنثى من فئات الأعمار الثلاث.

ج. أوجد A^{-1}، وصف أهميتها لمجتمع هذا النوع.

12. إن دراســة سلاســل الغذاء موضوع مهم في تحديد انتشــار الملوثات البيئية في المادة الحيّة وتراكمهــا. افترض أن لسلســلة غذاء ثلاث روابــط: الرابط الأول يتألف مــن النباتات من الأنواع $v_1, v_2, \ldots, v_n$ التــي تزود الأنــواع جميعها نباتية الغذاء $h_1, h_2, \ldots, h_m$ في الرابــط الثاني بالغذاء المطلــوب. ويتألف الرابط الثالث من الحيوانات آكلة اللحوم $c_1, c_2, \ldots, c_k$ التي تعتمد في غذائها كليًا على الأنواع آكلة النبات في الرابط الثاني. إن العنصر a_{ij} في المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

تمثّل النباتات جميعها من النوع v_i المســتهلكة مــن قبل الحيوانات نباتية الغذاء من النوع h_j،

أما العنصر b_{ij} في المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

فيمثّل عدد الحيوانات النباتية الغذاء من النوع h_j التي تستهلكها الحيوانات من النوع c_j.

أ. وضّــح أن نباتــات النوع v_i التي تنتهي أخيــرًا بحيوانات النوع c_j تعطى بالعنصر في الصف i والعمود j في المصفوفة AB.

ب. ما الأهمية الطبيعية للمصفوفات A^{-1}, B^{-1} و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ؟

13. وجدنا في الفصل 5.3 أن الصيغة البارمترية $(x(t), y(t))$ في كثيرات حدود هرمايت (Hermite) التكعيبية المارة من $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ و$(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$ وبنقاط مؤشرة $(x_0+\alpha_0, y_0+\beta_0)$ و $(x_1-\alpha_1, y_1-\beta_1)$ على التوالي تعطى بالصيغتين

$$x(t) = (2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1))t^3 + (3(x_1 - x_0) - \alpha_1 - 2\alpha_0)t^2 + \alpha_0 t + x_0$$

و

$$y(t) = (2(y_0 - y_1) + (\beta_0 + \beta_1))\, t^3 + (3(y_1 - y_0) - \beta_1 - 2\beta_0)\, t^2 + \beta_0 t + y_0$$

إن كثيرات حدود بيزيه (Be'zier) التكعيبية تعطى بالصيغتين

$$\hat{x}(t) = (2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1))\, t^3 + (3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0))\, t^2 + 3\alpha_0 t + x_0$$

و

$$\hat{y}(t) = (2(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1))\, t^3 + (3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0))\, t^2 + 3\beta_0 t + y_0$$

أ. إن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تحوّل معاملات كثيرات حدود هرمايت إلى معاملات كثيرات حدود بيزيه.

ب. أوجد المصفوفة B التي تحول معاملات كثيرات حدود بيزيه إلى معاملات كثيرات حدود هرمايت.

14. لديك النظام الخطي 2×2 $\quad (A + iB)(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \mathbf{c} + i\mathbf{d}$

بمدخلات مركبة في صيغة المركبات

$$(a_{11} + ib_{11})(x_1 + iy_1) + (a_{12} + ib_{12})(x_2 + iy_2) = c_1 + id_1$$

$$(a_{21} + ib_{21})(x_1 + iy_1) + (a_{22} + ib_{22})(x_2 + iy_2) = c_2 + id_2$$

أ. استخدم خواص الأعداد المركبة لتحويل هذا النظام إلى نظام خطي حقيقي 4×4.

$$A\mathbf{x} - B\mathbf{y} = \mathbf{c},$$

$$B\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{d}.$$

حُلَّ النظام الخطي

$$(1 - 2i)(x_1 + iy_1) + (3 + 2i)(x_2 + iy_2) = 5 + 2i$$

$$(2 + i)(x_1 + iy_1) + (4 + 3i)(x_2 + iy_2) = 4 - i$$

4.6 محددة المصفوفة The Determinant of a matrix

إن محددة المصفوفة تبيّن ما إذا كانت حلول الأنظمة الخطية التي يساوي فيها عدد المجاهيل عدد المعادلات موجودة ووحيدة.

تعريف 14.6 نعبّر عن محددة المصفوفة المربعة A بالرمز $\det A$، علمًا بأن الرمز $|A|$ شائع الاستخدام أيضًا.

أ. إذا كانت $A = [a]$ مصفوفة 1×1 فإن $\det A = a$.

ب. إذا كانت A مصفوفة $n \times n$ فإن المصغر (minor) M_{ij} هو محددة المصفوفة الجزئية $(n-1) \times (n-1)$ من A التي نحصل عليها بحذف الصف i والعمود j في المصفوفة A.

لقد ظهر مفهوم المحدّدة في عام 1683 في كل من اليابان وأوروبا. على الرغم من أن تكاكازو كوا Takakazu (Seki kowa (1642-1708 وليبنتز (Gottfried Leibniz (1646-1716) لم يستخدما عبارة المحددة.

ج. العامل المشارك (cofactor) A_{ij} المقترن بـ M_{ij} يعرّف بالمعادلة $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

د. إن محددة المصفوفة A ذات $n \times n$، حيث $n > 1$ تعطى بإحدى المعادلتين

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

أو

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{لكل} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$ ■

يمكن برهنة (انظر التمرين 9) أنه لحساب محدّدة مصفوفة عامة $n \times n$ في تعريف السابق يلزم $O(n!)$ من عمليات الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح. وحتى إذا كانت قيم n صغيرة نسبيًّا فإن عدد الحسابات يخرج عن السيطرة.

وعلى الرغم من وجود $2n$ من التعاريف المختلفة لـ $\det A$ وفق أي صف أو عمود تختاره، فإن تعريفات جميعها تعطي النتيجة العددية نفسها.

استخدمت مرونة تعريف في حل مثال الآتي.

إن الأكثر ملاءمة في حساب $\det A$ هو استخدام الصف أو العمود ذي عدد الأصفار الأكثر.

مثال 1 لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 5 \\ 6 & -6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

لحساب $\det A$؛ يكون من الأسهل استخدام العمود الرابع.

$$\det A = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} = 5A_{34} = -5M_{34}$$

وبحذف الصف الثالث والعمود الرابع نحصل على

$$\det A = -5 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= -5 \left\{ 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} - (-1) \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \right\} = -30$$ ■

يمكن حساب محددة مصفوفة ما في مابل Maple عن طريق مكتبة الجبر الخطي باستخدام الأمر **determinant (A)**.

وتعد الخواص الآتية مفيدة في ربط الأنظمة الخطية وطريقة الحذف لجاوس بالمحددات.

ويمكن الرجوع إلى أي كتاب في الجبر الخطي لبرهنة هذه الخواص. (انظر على سبيل المثال [ND, pp. 200–201])

مبرهنة 15.6 لتكن A مصفوفة $n \times n$:

أ. إذا كانت عناصر أي صف أو عمود من A أصفارًا فإن $\det A = 0$.

ب. إذا تساوى أي صفين أو عمودين في A فإن $\det A = 0$.

ج. إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A في العملية $(E_j) \leftrightarrow (E_i)$، حيث $i \neq j$ فإن $\det \tilde{A} = -\det A$.

د. إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A في العملية $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$ فإن $\det \tilde{A} = \lambda \det A$.

هـ. إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A في العملية $(E_i + \lambda E_j) \rightarrow (E_i)$، حيث $i \neq j$ فإن $\det \tilde{A} = \det A$

و. إذا كانت B مصفوفة $n \times n$ أيضاً فإن $\det AB = \det A \det B$.

ز. $\det A^t = \det A$.

ح. إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

ط. إذا كانت A مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية سفلى أو قطرية فإن $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. ■

إن المصفوفة في الصيغة المثلثية يسهل حساب محدّدتها، وعليه فإن حساب محددة أي مصفوفة يمكن تبسيطه عن طريق تحويل المصفوفة إلى مصفوفة مثلثية أولاً، ثم نستخدم الفقرة (ط) من المبرهنة لحساب محددة المصفوفة.

مثال 2 احسب محدّدة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

باستخدام الفروع (ب)، (د) و(هـ) في المبرهنة (15.6)، وباستخدام الحسابات في **Maple** من مكتبة الجبر الخطي. وإن المصفوفة A معرّفة بالأمر

```
A:=Matrix([[2,1,-1,1],[1,1,0,3],[-1,2,3,-1],[3,-1,-1,2]]);
```

إن توالي العمليات في الجدول (2.6) يعطينا المصفوفة

$$A8 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

ومن الفقرة (ط) نجد $\det A8 = -39$ ولذلك $\det A = 39$. ■

جدول 2.6

العملية	مابل	الأثر
$\frac{1}{2}E_1 \rightarrow E_1$	A1:= RowOperation(A,1,1/2)	$\det A1 = \frac{1}{2}\det A$
$E_2 - E_1 \rightarrow E_2$	A2:=RowOperation(A1,[2,1],-1)	$\det A2 = \det A1 = \frac{1}{2}\det A$
$E_3 + E_1 \rightarrow E_3$	A3:=RowOperation(A2,[3,1],1)	$\det A3 = \det A2 = \frac{1}{2}\det A$
$E_4 - 3E_1 \rightarrow E_4$	A4:=RowOperation(A3,[4,1],-3)	$\det A4 = \det A3 = \frac{1}{2}\det A$
$2E_2 \rightarrow E_2$	A5:=RowOperation(A4,2,2)	$\det A5 = 2\det A4 = \det A$
$E_3 - \frac{5}{2}E_2 \rightarrow E_3$	A6:=RowOperation(A5,[3,2],-5/2)	$\det A6 = \det A5 = \det A$
$E_4 + \frac{5}{2}E_2 \rightarrow E_4$	A7:=RowOperation(A6,[4,2],5/2)	$\det A7 = \det A6 = \det A$
$E_3 \leftrightarrow E_4$	A8:=RowOperation(A7,[3,4])	$\det A8 = -\det A7 = -\det A$

النتيجة التالية لها أهمية خاصة حيث تربط بين قابلية العكس للمصفوفة وطريقة جاوس للحذف.

مبرهنة 16.6 العبارات الآتية جميعها متكافئة للمصفوفة المربعة A من الدرجة $n \times n$:

(أ) للمعادلة $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ حل وحيد $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ب) للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ حل وحيد لأي متجه $\mathbf{b}$ من البعد n .

(ج) المصفوفة A غير منفردة، أي A^{-1} موجودة.

(د) $\det A \neq 0$.

(هـ) يمكن أن تنفَّذ عملية الحذف لجاوس بالتبديل الصفي على النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ لأي متجه $\mathbf{b}$ من البعد n.

مجموعة التمارين 4.6 EXERCISE SET

1. استخدم تعريف 14.6 لتحسب محدِّدات المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. استخدم تعريف 14.6 لتحسب محدِّدات المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. كرر التمرين 1 باستخدام الطريقة في مثال 2.

4. كرر التمرين 2 باستخدام الطريقة في مثال 2.

5. أوجد قيم α جميعها التي تجعل المصفوفة الآتية منفردة (غير قابلة للانعكاس):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

6. أوجد قيم α جميعها التي تجعل المصفوفة الآتية منفردة (غير قابلة للانعكاس):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

7. أوجد قيم α جميعها بحيث إن النظام الخطي الآتي لا يملك أي حلول:

$$\begin{aligned} 2x_1 - \quad x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

8. أوجد قيم α جميعها بحيث يكون للنظام الخطي الآتي ما لانهاية من الحلول:

$$\begin{aligned} 2x_1 - \quad x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

9. استـخدم الاسـتقراء الرياضي لتثبت أنه إذا كان $n > 1$ فإن حسـاب محددة المصفوفة $n \times n$ باستخدام تعريف يتطلب عددًا من عمليات الضرب/ القسمة يساوي $n!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}$ وعددًا من عمليات الجمع/ الطرح يساوي $n! - 1$.

10. لتكـن A مصفوفـة 3×3. برهن أنه إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A باسـتخدام أي من العمليات، $(E_1) \leftrightarrow (E_3)$, $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$, أو $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$ فإن $\det \tilde{A} = -\det A$

11. برهن أن AB غير منفردة إذا وفقط إذا كان كل من A و B غير منفردتين.

12. حُلَّ النظام الخطي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

بقاعدة كرامر Cramer's rule يعطينا

نشر جبرائيل كرامر Gabriel Cramer (1704-1752) قاعـدة الحل (كما في التمريـن 12) عام 1750 وكانت قد نُشرت من قبل ماكلورين Colin Maclaurin في عام 1748.

$$x_1 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_2}{D}$$

$$x_3 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} \equiv \frac{D_3}{D}, \qquad D = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

أ. أوجد حَلَّ النظام الخطي الآتي باستخدام قاعدة كرامر:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad 3x_2 - \quad x_3 &= 4 \\ x_1 - \quad 2x_2 + \quad x_3 &= 6 \\ x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

ب. أثبت أن النظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad 3x_2 - \quad x_3 &= 4 \\ x_1 - \quad 2x_2 + \quad x_3 &= 6 \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

ليس له حل. احسب D_1, D_2, D_3.

ج. أثبت أن للنظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ 3x_2 - \ \ x_3 &= 4 \\ x_1 - \ \ 2x_2 + \ \ x_3 &= 6 \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

عددًا لانهائيًّا من الحلول. احسب D_1, D_2 و D_3.

د. برهن إذا كان النظام الخطي 3×3 فيه $D = 0$ حلول، وأن $D_1 = D_2 = D_3 = 0$.

هـ. حدّد عدد عمليات الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح اللازمة لاستخدام قاعدة كرامر على النظام الخطي 3×3.

13. أ. عمّم قاعدة كرامر للأنظمة الخطية $n \times n$.

ب. استخدم نتيجة التمرين 9 لحساب عدد عمليات الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح اللازمة لاستخدام قاعدة كرامر على الأنظمة $n \times n$.

5.6 تحليل المصفوفات　Matrix Factorization

إن طريقة الحذف لجاوس هي الأداة الرئيسة في الحل المباشر لأنظمة المعادلات الخطية، ولذلك فليس مدهشًا ظهورها في صور أخرى. وسنرى في هذا الفصل أن الخطوات المستخدمة في حل نظام على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يمكن استخدامها لتحليل المصفوفة إلى العوامل. إن التحليل إلى العوامل مفيد وخصوصًا عندما يأخذ الصيغة $A = LU$، حيث L مثلثية سفلية، وU مثلثية علوية. وعلى الرغم من عدم امتلاك كل المصفوفات لهذا التمثيل، إلا أن كثيرًا منها يمتلكه، وتظهر كثيرًا في دراسة الطرائق العددية. ولقد وجدنا في الفصل 1.6 أن تطبيق طريقة الحذف لجاوس على أي نظام خطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يتطلب $O(n^3/3)$ من العمليات الحسابية لتحديد $\mathbf{x}$. وعلى كل حال فإن حل النظام الخطي الذي يحوي نظامًا مثلثيًّا علويًّا يتطلب التعويض الإرجاعي الذي يحتاج إلى $O(n^2)$ من العمليات. إن وضع الأنظمة المثلثية السفلية مشابه، لذلك إذا حلّل A إلى الصيغة المثلثية $A = LU$ فعندئذ يمكننا حل المتجه $\mathbf{x}$ بسهولة أكبر باستخدام عملية ذات خطوتين. أولًا: نفترض $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$، ونحل $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{y}$، ولما كانت L مثلثية، فإن تحديد $\mathbf{y}$ من هذه المعادلة يحتاج إلى $O(n^2)$ من العمليات. وإذا وجدنا $\mathbf{y}$ فإن النظام المثلثي $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ يتطلب $O(n^2)$ فقط من العمليات الإضافية لإيجاد $\mathbf{x}$. إن هذه الحقيقة تعني أن عدد العمليات اللازمة لحل النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ قد نقص من $O(n^3/3)$ إلى $O(2n^2)$ في الأنظمة الأكبر من 100%، تنقص هذه الطريقة مقدار الحساب بأكثر من 99%؛ لأن $(0.01)(100)^3 = (0.01)(1,000,000) = 10,000 = 100^2$.

إن التخفيض باستخدام التحليل إلى العوامل له ثمن؛ إذ إن تحديد المصفوفتين الخاصتين L وU يتطلب $O(n^3)$ من العمليات. ولكن في حال حدّد التحليل، فإن الأنظمة ذات المصفوفة A يمكن حلها بالطريقة المبسطة هذه لأي عدد من المتجهات $\mathbf{b}$. ولفحص أي المصفوفات تملك التحليل LU ولتحديدها؛ نفترض أولًا أنه يمكن إجراء طريقة الحذف لجاوس على النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دون تبديلات صفية. وباستخدام الرموز في الفصل 1.6، فإن هذا يكافئ وجود مراكز دورانية غير صفرية $a_{ii}^{(i)}$ لكل n ،$i = 1, 2, \ldots$. إن الخطوة الأولى في عملية الحذف لجاوس تتألف من تنفيذ العمليات لكل

$$(E_j - m_{j,1}E_1) \longrightarrow (E_j) \quad \text{حيث} \quad m_{j,1} = \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \tag{8.6}$$

إن هــذه العمليــات تحوّل النظــام إلى نظام آخر تكون فيه مدخــلات العمود الأول تحت القطر أصفارًا.

ويمكــن النظر إلى نظام العمليات في المعادلــة (6.8) بطريقة أخرى، بحيث يمكن تحقيقها آنيًّا بضرب المصفوفة الأصلية A عن اليسار في المصفوفة

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتسمى هذه المصفوفة جاوس التحويلية الأولى **first Gaussian Transformation matrix**.

تحليــل المصفوفــة إلــى عوامــل هو طريقــة أخــرى مهمــة مــن تلــك الطرائــق التــي عرضهــا جــاوس عــام 1809 فــي الطرائــق المبرهنــة Theoria Motus.

ســنعبر عن حاصل ضرب هذه المصفوفة في المصفوفة $A \equiv A^{(1)}$ بالرمز $A^{(2)}$ وحاصل الضرب في المتجه $\mathbf{b}$ بالرمز $\mathbf{b}^{(2)}$، لذلك يكون

$$A^{(2)}\mathbf{x} = M^{(1)}A\mathbf{x} = M^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(2)}$$

ونبني $M^{(2)}$ بطريقة مشابهة، وهي المصفوفة المحايدة بعد وضع سوالب المضاعفات

$$m_{j,2} = \frac{a_{j2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

فــي المدخلات تحت القطــر في العمود الثاني تكــون عناصر حاصل ضرب هــذه المصفوفة في المصفوفة $A^{(2)}$ أصفارًا تحت القطر في العمودين الابتدائيين، ومن ثم نضع

$$A^{(3)}\mathbf{x} = M^{(2)}A^{(2)}\mathbf{x} = M^{(2)}M^{(1)}A\mathbf{x} = M^{(2)}M^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(3)}$$

ويوجد $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$ عمومًا، ونضرب في مصفوفة جاوس التحويلية ذات العدد k

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & -m_{k+1,k} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لنجد

$$A^{(k+1)}\mathbf{x} = M^{(k)}A^{(k)}\mathbf{x} = M^{(k)}\cdots M^{(1)}A\mathbf{x} = M^{(k)}\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k+1)} = M^{(k)}\cdots M^{(1)}\mathbf{b} \quad (9.6)$$

وتنتهي العملية بتكوين $A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$، حيث $A^{(n)}$ هي المصفوفة المثلثية العليا

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

المعطاة بالصيغة $A^{(n)} = M^{(n-1)} M^{(n-2)} \cdots M^{(1)} A$.

تشكل هذه العملية الجزء $U = A^{(n)}$ من تحليل المصفوفة $A = LU$.

ولتحديد المصفوفة المثلثية الســفلى المتممة للتحليل L؛ تذكر أولاً حاصل ضرب $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$ في مصفوفة جاوس التحويلية $M^{(k)}$ المستخدمة في الحصول على المعادلة (9.6)

$$A^{(k+1)}\mathbf{x} = M^{(k)} A^{(k)}\mathbf{x} = M^{(k)}\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k+1)}$$

حيث تولد $M^{(k)}$ عمليات الصف

$$(E_j - m_{j,k}E_k) \to (E_j) \quad \text{لكل} \quad j = k+1, \ldots, n$$

يتطلب عكس تأثيرات هذا التحويل والرجوع إلى $A^{(k)}$ ؛ إجراء العمليات

$(E_j + m_{j,k}E_k) \to (E_j)$ لكل $j = k+1, \ldots, n$.

هذا مكافئ للضرب في معكوس المصفوفة $M^{(k)}$ والمصفوفة هي

$$L^{(k)} = [M^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & m_{k+1,k} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,k} & 0 & \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة المثلثية السفلية L في تحليل A هي حاصل ضرب المصفوفات $L^{(k)}$.

$$L = L^{(1)} L^{(2)} \cdots L^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

ولما كان حاصل ضرب L في المصفوفة المثلثية العليا $U = M^{(n-1)} \cdots M^{(2)} M^{(1)} A$ يعطي

$$LU = L^{(1)} L^{(2)} \cdots L^{(n-3)} L^{(n-2)} L^{(n-1)} \cdot M^{(n-1)} M^{(n-2)} M^{(n-3)} \cdots M^{(2)} M^{(1)} A$$
$$= [M^{(1)}]^{-1}[M^{(2)}]^{-1} \cdots [M^{(n-2)}]^{-1}[M^{(n-1)}]^{-1} \cdot M^{(n-1)} M^{(n-2)} \cdots M^{(2)} M^{(1)} A = A$$

عندها تنتج المبرهنة (17.6) من هذه الخطوات.

مبرهنة 17.6 إذا أمكــن تطبيــق طريقة الحذف لجــاوس على النظام الخطــي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دون تبديل صفي فإن المصفوفة A قابلة للتحليل إلى حاصل ضرب مصفوفة مثلثية سفلى L في مصفوفة مثلثية عليا U

أي $A = LU$، حيث $m_{ji} = a_{ji}^{(i)}/a_{ii}^{(i)}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$ ■

مثال 1 لقد تعاملنا مع النظام الخطي الآتي في الفصل (1.6):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

إن توالي العمليات

$$(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2), (E_3 - 3E_1) \rightarrow (E_3)$$

$$(E_4 - (-1)E_1) \rightarrow (E_4), (E_3 - 4E_2) \rightarrow (E_3), (E_4 - (-3)E_2) \rightarrow (E_4)$$

يحوّل النظام إلى الصيغة المثلثية

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} + 3x_4 &= 4 \\ -x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_3 + 13x_4 &= 13 \\ -13x_4 &= -13 \end{aligned}$$

إن المضاعفات m_{ij} والمصفوفة المثلثية العليا تنتج التحليل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = LU$$

إن هذا التحليل يتيح لنا حل أي نظام يحوي A بسهولة، فعلى سبيل المثال لكي تحل

$$A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

نعوض أولاً $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$، ثم $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ بمعنى أن

$$LU\mathbf{x} = L\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

ويُحلّ هذا النظام لإيجاد $\mathbf{y}$ بعملية تعويض أمامي سهلة

$$y_1 = 8;$$

$2y_1 + y_2 = 7,$ لذا $y_2 = 7 - 2y_1 = -9;$

$3y_1 + 4y_2 + y_3 = 14,$ لذا $y_3 = 14 - 3y_1 - 4y_2 = 26;$

$-y_1 - 3y_2 + y_4 = -7,$ لذا $y_4 = -7 + y_1 + 3y_2 = -26.$

بعد ذلك نحل $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ لإيجاد $\mathbf{x}$ وهو حل النظام الأصلي، أي أن

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 26 \\ -26 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التعويض الإرجاعي نحصل على $x_1 = 3$,$x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$. ■

إن التحليل إلى العوامل المستخدمة في مثال (1) يسمى طريقة دوليتل **Doolittle's method**. ويتطلب أن يكون 1 في عناصر قطر L جميعها الذي يؤدي إلى التحليل الذي شرح في المبرهنة (17.6).

سـنبحث في الفصـل (6.6) في طريقة كـروات **Crout's method** التي تتطلب وجود 1 في عناصر قطـر U جميعها، وسـنبحث في طريقة تشولسـكي **Cholesky's method** التـي تتطلب أن يكون $l_{ii} = u_{ii}$ لكل i.

إن الخوارزميـة (4.6) تعطـي طريقة عامة لتحليل المصفوفات إلى حاصل ضرب مصفوفات مثلثية. وعلى الرغم من إنشاء مصفوفتين جديدتين L وU، فإن القيم الناتجة تحل محل عناصر A المقابلة التي لم تعد هناك حاجة إليها.

تسمح الخوارزمية (4.6) بأن يكون قطر L أو قطر U هو المحدد.



تحليـل LU Factirization LU

لتحليل المصفوفة $n \times n$ المعبر عنها $A = [a_{ij}]$ لحاصل ضرب مصفوفة مثلثية سـفلية $L = [l_{ij}]$ في مصفوفـة مثلثية عليا $U = [u_{ij}]$، أي $A = LU$ حيث كل عنصر (مدخله) في القطر الرئيس في L أو U هو 1 (الوحدة)؛

المدخلات: البعد n، العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، حيث $l_{11} = \cdots = l_{nn} = 1$، القطر $u_{11} = \cdots = u_{nn} = 1$ في المصفوفة L أو القطر U في المصفوفة.

المخرجات: العناصر l_{ij} حيث $1 \le j \le i, 1 \le i \le n$ في المصفوفة L والعناصر u_{ij} حيث $i \le j \le n$, $1 \le i \le n$ في U.

الخطوة	المضمون
1	اختر l_{11} و u_{11} بحيث $l_{11}u_{11} = a_{11}$. إذا كان $l_{11}u_{11} = 0$ فالمخرجات (التحليل مستحيل). توقف.
2	لكل $j = 2, \ldots, n$ ضع $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$ (الصف الأول في U). $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$ (العمود الأول في L).
3	لكل $i = 2, \ldots, n-1$ نفذ الخطوتين 4 و5.
4	اختر l_{ii} و u_{ii} بحيث $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$ إذا كان $l_{ii}u_{ii} = 0$ فإن المخرجات (التحليل مستحيل). توقف.
5	لكل $j = i+1, \ldots, n$ ضع $u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right]$ (الصف i في U). $l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}\right]$ (العمود i في L).



اختر l_{nn} و u_{nn} بحيث إن $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$ (ملحوظة: إذا كان $l_{nn}u_{nn} = 0$ فإن $A = LU$، ولكن A منفردة).	6
المخرجات (l_{ij} لكل $j = 1,\ldots, i$ و $i = 1,\ldots, n$)، المخرجات (u_{ij} لكل $j = i,\ldots, n$ و $i = 1,\ldots, n$) توقف.	7

■

عندمـا يكتمل تحليل المصفوفة، يوجـد حل النظام الخطي على الصيغة $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ عن طريق وضع $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ أولاً، ثم حُلَّ $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{y}$.

بما أن L مثلثية سفلية يكون لدينا $y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}}$

ولكل $i = 2, 3,\ldots, n$ يكون

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j\right]$$

وبعـد إيجاد $\mathbf{y}$ بعمليـة التعويض الأمامي هذه، نحل النظـام المثلثي العلوي $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ لإيجاد $\mathbf{x}$ بعملية التعويض الإرجاعي وباستخدام

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad \text{و} \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right]$$

لقد افترضنا في الشـرح السـابق أن $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ قابلة للحل باسـتخدام طريقة الحذف لجاوس دون مبادلات صفية. ومن وجهة نظر عملية يكون التحليل إلى العوامل مفيداً فقط عندما لا يكون هناك لـزوم للمبادلات الصفية للتحكم في خطأ تقريب الناتج عن اسـتخدام الحسـاب منتهي الأرقام. ولحسن الحظ، فإن كثيراً من الأنظمة التي تقابلنا عند استخدام التقريب هي من هذا النوع، ولكن سـنتعامل الآن مع التعديـلات التي يجب إجراؤها عندما يتطلب الأمر مبادلات صفية. وسـنبدأ الشرح بتقديم مجموعة من المصفوفات التي تستخدم لإعادة ترتيب صفوف مصفوفة ما أو تبديلها.

مصفوفـة التبادل (Permutation Matrix) $n \times n$ هي $P = [\,p_{ij}]$ ناتجة عن تبادل صفوف المصفوفة الحيادية I_n، وإن هذا يعطي مصفوفة في كل صف فيها مدخلة واحدة فقط غير صفرية، وفي كل عمود فيها مدخلة واحدة فقط غير صفرية، وكل قيمة غير صفرية هي 1.

مثال 2 المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

هـي مصفوفـة التبادل 3×3 لأي مصفوفة A بحجم 3×3، الضرب من اليسـار في المصفوفة P ينتج أثر تبادل الصفين الثاني والثالث للمصفوفة A:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

وبالمثل فالضرب من اليمين في المصفوفة A ينتج P عند تبادل العمودين الثاني والثالث للمصفوفة A. ■

تتعلق طريقة الحذف لجاوس بخاصيتين مفيدتين للمصفوفات التبادلية، وضّحت الأولى في مثال السابق. افترض أن $k_1,\ldots,\ k_n$ هي تبادل للأعداد الصحيحة $1,\ldots,\ n$، وأن مصفوفة التبادل $P=(p_{ij})$ معرّفة بما يلي:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1، & j = k_i \text{ إذا كان} \\ 0، & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ملحوظة: ينتج ضرب المصفوفة من جهة اليمين، أي PA تبديل أعمدة A.

فإن (i) PA تنتج تبديل صفوف A

أي أن

$$PA = \begin{bmatrix} a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \cdots & a_{k_1 n} \\ a_{k_2 1} & a_{k_2 2} & \cdots & a_{k_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_n 1} & a_{k_n 2} & \cdots & a_{k_n n} \end{bmatrix}$$

(ii) P^{-1} موجودة ويكون $P^{-1} = P^t$

رأينا في نهاية الفصل 4.6 أنه يمكن لكل مصفوفة غير منفردة A حل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بطريقة الحذف لجاوس مع إمكانية استخدام مبادلة الصفوف. إذا ما علمنا مبادلات الصيغة اللازمة لحل النظام بطريقة الحذف لجاوس، أمكننا ترتيب المعادلات الأصلية في ترتيب يضمن عدم الحاجة إلى مبادلة صفوف.

يُعاد إذن ترتيب المعادلات في النظام، بحيث يسمح لطريقة الحذف لجاوس بالاستمرار دون مبادلات صفية. وإن هذا يحتم وجود مصفوفة تبديل P لكل مصفوفة غير منفردة، بحيث يمكن حل النظام $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ دون مبادلة صفية. ولكن يمكن تحليل هذه المصفوفة PA إلى P $LU{=}A$، حيث L مثلثية سفلية، وU مثلثية علوية. بما أن $P^{-1} = P^t$، يكون لدينا التحليل

$$A = P^{-1}LU = (P^tL)U$$

لا تزال المصفوفة U مثلثية علوية، أما P^tL فليست مثلثية سفلية إلا إذا كان $P = I$.

مثال 3 بما أن $a_{11} = 0$، فإن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

لا تملك تحليلاً LU.

على كل حال، فإن استخدام المبادلة الصفية $(E_2) \leftrightarrow (E_1)$ متبوعًا بالعمليات $(E_3 + E_1) \rightarrow E_3$ ثم $(E_4 - E_1) \rightarrow E_4$ ينتج

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بعد ذلك يعطي $(E_4) \leftrightarrow (E_3)$ متبوعًا بالعملية $E_3 \to (E_3 - E_2)$ المصفوفة

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وإن مصفوفة التبديل المقترنة بالمبادلات الصفية $(E_2) \leftrightarrow (E_1)$ و $(E_4) \leftrightarrow (E_3)$ هي

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ويمكن تنفيذ طريقة الحذف لجاوس على PA دون مبادلات صفية لتعطي التحليل UL للمصفوفة PA على الصيغة

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

وعليه ينتج

$$A = P^{-1}(LU) = P^t(LU) = (P^tL)U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

■

إن التحليل على الصيغة $A = PLU$ للمصفوفة A يمكن الحصول عليه باستخدام مكتبة الجبر الخطي في مابل بالأمر LUDecomposition(A)

وعندما تنشأ المصفوفة A، فإن الاستدعاء الدالي

```
>(P, L, U) := LUDecomposition(A)
```

سيعطي التحليل، ويخزّن مصفوفة التبديل بوصفها قيمة للمصفوفة P، والمصفوفة المثلثية السفلية بوصفها قيمة، والمصفوفة L المثلثية العلوية بوصفها قيمة للمصفوفة U.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 5.6

1. حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ب. $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

ب. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

3. لديك المصفوفات الآتية، أوجد مصفوفة التبديل P بحيث تكون PA قابلة للتحليل إلى حاصل الضرب LU، حيث L مثلثية سفلية عناصر قطرها كلها الباب 1، وU مثلثية علوية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

4. لديك المصفوفات الآتية، أوجد مصفوفة التبديل P بحيث تكون PA قابلة للتحليل إلى حاصل الضرب LU، حيث L مثلثية سفلية عناصر قطرها كلها الباب 1، وU مثلثية علوية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

5. حلِّل المصفوفات الآتية إلى التحليل LU باستخدام خوارزمية التحليل LU حيث $l_{ii} = 1$ لكل i مما يلي:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.906 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$

6. حلِّـــل المصفوفات الآتية إلى التحليل LU باســـتخدام خوارزمية التحليل LU حيث $l_{ii} = 1$ لـ i جميعها:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

د. $\begin{bmatrix} 2.121 & -3.460 & 0 & 5.217 \\ 0 & 5.193 & -2.197 & 4.206 \\ 5.132 & 1.414 & 3.141 & 0 \\ -3.111 & -1.732 & 2.718 & 5.212 \end{bmatrix}$

7. عدّل خوارزمية التحليل LU لكي تكون قابلة للاستخدام بوصفها حلًّا لنظام خطي، ثم حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} 1.012x_1 - 2.132x_2 + 3.104x_3 &= 1.984 \\ -2.132x_1 + 4.906x_2 - 7.013x_3 &= -5.049 \\ 3.104x_1 - 7.013x_2 + 0.014x_3 &= -3.895 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ x_1 + 1.5x_2 \qquad\quad &= 4.5 \\ -3x_2 + 0.5x_3 \quad &= -6.6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 2.1756x_1 + 4.0231x_2 - 2.1732x_3 + 5.1967x_4 &= 17.102 \\ -4.0231x_1 + 6.0000x_2 + 1.1973x_4 &= -6.1593 \\ -1.0000x_1 - 5.2107x_2 + 1.1111x_3 &= 3.0004 \\ 6.0235x_1 + 7.0000x_2 - 4.1561x_4 &= 0.0000 \end{aligned}$$

8. عدّل خوارزمية التحليل LU لكي تكون قابلة للاستخدام بوصفها حلًّا لنظام خطي، ثم حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= 1 \\ \tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{3}{8}x_3 &= 2 \\ \tfrac{2}{5}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{5}{8}x_3 &= -3 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \quad &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 2.121x_1 - 3.460x_2 + 5.217x_4 &= 1.909 \\ 5.193x_2 - 2.197x_3 + 4.206x_4 &= 0 \\ 5.132x_1 + 1.414x_2 + 3.141x_3 &= -2.101 \\ -3.111x_1 - 1.732x_2 + 2.718x_3 + 5.212x_4 &= 6.824 \end{aligned}$$

9. أوجد التحليل بالصيغة $A = P^tLU$ للمصفوفات الآتية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ب. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

د. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

10. افترض أن $A = P^tLU$ حيث P مصفوفة تبديل، L مصفوفة مثلثية سفلية حيث كل عنصر على القطر هو 1، وU مصفوفة مثلثية علوية.

أ. احسب عدد العمليات اللازمة لحساب P^tLU لمصفوفة معطاة.

ب. برهن أنه إذا احتوت P مبادلات صفية عددها k فإن

$$\det P = \det P^t = (-1)^k$$

ج. استخدم $\det A = \det P^t \det L \det U = (-1)^k \cdot 1 \cdot \det U$ لإيجاد عدد العمليات لتحديد det A بالتحليل.

د. احسب det A، وأوجد عدد العمليات عندما

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

11. أ. برهن أن خوارزمية التحليل LU تتطلب

عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$.

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

ب. برهن أن حل $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$، حيث L مصفوفة مثلثية سفلية في العناصر $l_{ii} = 1$ لكل i يتطلب:

عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

ج. برهن أن حلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ عن طريق تحليل A إلى $A = LU$ أولًا، وأن حلّ $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ و $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ يتطلب عدد العمليات نفسه التي تتطلبه خوارزمية الحذف لجاوس (1.6).

د. أوجد عدد العمليات اللازمة لحل m من الأنظمة الخطية على الصيغة $A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}$ لكل $k = 1, \ldots, m$ عن طريق تحليل A أولًا، ثم استخدام الطريقة في الفقرة (جـ) m من المرات.

6.6 أنماط خاصة من المصفوفات Special Types of Matrices

سنحوّل الآن اهتمامنا إلى فئتين من المصفوفات، ويمكن أن نطبق عليهما طريقة الحذف لجاوس تطبيقًا فعالًا دون مبادلات صفية.

الفئة الأولى توصف من خلال التعريف الآتي:

تعريف 18.6

تُسمى المصفوفة A ذات $n \times n$ مصفوفة ذات قطر سائد بالكامل (Strictly diagonally dominant) إذا كان

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

في كل صف من صفوف المصفوفة ذات القطر السائد بالكامل يكون مقدار كل عنصر في القطر الرئيس أكبر من مجموع مقادير عناصر ذلك الصف. مقدار العنصر هو القيمة المطلقة لذلك العنصر.

مثال 1

لديك المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة غير المتماثلة A هي ذات قطر سائد بالكامل؛ لأن $|7| > |2| + |0|$ و $|5| > |3| + |-1|$ و $|-6| > |0| + |5|$.

أما المصفوفة المتماثلة B فهي ليست ذات قطر سائد بالكامل؛ لأنه في الصف الأول على سبيل المثال $|6| < |4| + |-3| = 7$.

ومما يثير الدهشة أن A^t ليست ذات قطر سائد بالكامل؛ لأن الصف الأوسط للمصفوفة A^t هو [2 5 5]، وكذلك فإن B^t التي تساوي B بدهيًا ليست ذات قطر سائد بالكامل أيضًا. ■

اســتخدمت المبرهنة الآتيــة في الفصل 4.3 لضمان وجود حلول وحيــدة للأنظمة الخطية المطلوبة لتحديد استكمالات الشريحة المكعبة.

مبرهنة 19.6 كل مصفوفة ذات قطر ســائد بالكامل غير منفردة، ويمكن بالإضافة إلى ذلك تنفيذ طريقة الحذف لجاوس على أي نظام خطي على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ للحصول على حله الوحيد دون مبادلات صفية أو عمودية، كما ستكون حسابات نمو أخطاء تقريب مستقرة. ■

البرهان نستخدم البرهان بالتناقض لنثبت أن A غير منفردة. افترض أن النظام الخطي الموصوف بالصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$، وافترض أن حلًّا غير صفري $\mathbf{x} = (x_i)$ لهذا النظام موجود.

افترض k مؤشرًا له

$$0 < |x_k| = \max_{1 \le j \le n} |x_j|$$

بما أن $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

يكون لدينا عندما $i = k$

$$a_{kk} x_k = -\sum_{\substack{j=1, \\ j \ne k}}^{n} a_{kj} x_j$$

إن هذا يتضمن

$$|a_{kk}||x_k| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}||x_j| \quad \text{او} \quad |a_{kk}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}|$$

إن هــذه المتراجحة تناقض خاصية أن A ذات قطر ســائد بالكامــل، ومن ثم فإن الحل الوحيد للنظــام $A\mathbf{x} = 0$ هو $\mathbf{x} = 0$، وهذه الحالة مكافئــة لخاصية A غير المنفردة وفق المبرهنة (16.6) لبرهنــة أن طريقــة الحــذف لجاوس يمكــن تطبيقها دون مبادلــة صفية، ســنثبت أن كلًّا من المصفوفــات $A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots, A^{(n)}$ التي تولَّدت بطريقة الحــذف لجاوس (كما وصفت في الفصل 5.6) هي ذات قطر سائد بالكامل.

بمــا أن A ذات قطــر ســائد بالكامــل، فــإن $a_{11} \ne 0$ و $A^{(2)}$ يمكــن تركيبهــا. وهكذا لكل $i = 2, 3, \ldots, n$ يكون

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad \text{لكل} \quad 2 \le j \le n$$

بما أن $a_{i1}^{(2)} = 0$، فإن

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}^{(2)}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \ne i}}^{n} \left| a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right| \le \sum_{\substack{j=2 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}^{(1)}| + \sum_{\substack{j=2 \\ j \ne i}}^{n} \left| \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right|$$

$$< |a_{ii}^{(1)}| - |a_{i1}^{(1)}| + \frac{|a_{i1}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} \sum_{\substack{j=2 \\ j \ne i}}^{n} |a_{1j}^{(1)}| < |a_{ii}^{(1)}| - |a_{i1}^{(1)}| + \frac{|a_{i1}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} (|a_{11}^{(1)}| - |a_{1i}^{(1)}|)$$

$$= |a_{ii}^{(1)}| - \frac{|a_{i1}^{(1)}||a_{1i}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} \le \left| a_{ii}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)} a_{1i}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right| = |a_{ii}^{(2)}|$$

إن هذا يثبت خاصية القطر السائد بالكامل في الصفوف n ,$2,\ldots$، ولما كان الصف الأول للمصفوفة $A^{(2)}$ هو نفسه للمصفوفة A، فهذا يعني أن $A^{(2)}$ ذات قطر سائد بالكامل.
يستمر تنفيذ هذه العملية بالاستقراء حتى الحصول على المصفوفة المثلثية العلوية ذات القطر السائد بالكامل $A^{(n)}$. ■ ■ ■

ويتضمن هذا أن عناصر القطر جميعها غير صفرية، ومن ثم يمكن تنفيذ عملية الحذف لجاوس دون مبادلات صفية.

إن إثبات استقرار هذه العملية يمكن الرجوع إليه في [We].

الفئة الثانية من المصفوفات الخاصة هي موجبة التحديد.

تعريف 20.6 يقال للمصفوفة A إنها موجبة التحديد (Positive definite) إذا كانت متماثلة، وكان $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ لكل متجه $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. ■

يشير التعبير موجب التحديد إلى حقيقة أن العدد $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ يجب أن يكون موجبًا لكل $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

لا يرى كل المؤلفين ضرورة التماثل لمصفوفة موجبة التحديد. وعلى سبيل المثال فإن Golub و Van Loan[GV]، اللذين يعدان مرجعين رئيسين لطرائق المصفوفات ضرورة $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ لكل $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ وتسمى المصفوفات من نوع موجبة التحديد موجبةَ التحديد المتماثلة في [GV]. خذ هذا التوضيح في الحسبان إذا كنت تستخدم مواد من مصادر أخرى.

ولكي نكون دقيقين؛ فإن تعريف (20.6) يجب أن يحدد بأن المصفوفة 1×1 قد تولَّدت بالعملية $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ التي لها قيمة موجبة لعنصرها الوحيد؛ لأن العملية تنفَّذ بشكل الآتي:

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j \right]$$

مثال 2 تكون المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

موجبة التحديد عند افتراضنا أن $\mathbf{x}$ عبارة عن أي متجه عمودي بالبعد الثالث. لذلك

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2$$
$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$$

و

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0,$$

إلا إذا كان $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ■

ويجـــب أن يكون واضحًا من مثال 2 أن اســـتخدام تعريف لتقريـــر ما إذا كانت المصفوفة موجبة التحديد Positive definite قد يؤدي إلى صعوبات. ولحسن الحظ، توجد معايير أسهل ستناقش في الباب 9، لتحديد أفراد هذه الفئة المهمة.

تبين النتيجة الآتية بعض الشروط التي يمكن استخدامها لاستبعاد بعض المصفوفات.

مبرهنة 21.6 إذا كانت A مصفوفة $n \times n$ موجبة التحديد:

أ. يوجد معكوس للمصفوفة A.

ب. إن العناصر $a_{ii} > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

ج. $\max_{1\le k,j\le n} |a_{kj}| \le \max_{1\le i\le n} |a_{ii}|$.

د. $(a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}$ لكل $i \neq j$. ■

البرهان أ. إذا كان $\mathbf{x}$ يحقق $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ فإن $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 0$. ولما كانت A موجبة التحديد فإن $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ لها الحل الصفري فقط، ومن ثم A غير منفردة (لها معكوس).

ب. لأي i، ضع $\mathbf{x} = (x_j)$ وعرّفها كما يلي:

$x_i = 1$ و $x_j = 0$ إذا كان $j \neq i$.

بما أن $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = a_{ii}$$

ج. لكل $k \neq j$ عرّف $\mathbf{x} = (x_i)$ كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} 0، & \text{إذا كان } i \neq k \text{ و } i \neq j \\ 1، & \text{إذا كان } i = j \\ -1، & \text{إذا كان } i = k \end{cases}$$

بما أن $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$، فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = a_{jj} + a_{kk} - a_{jk} - a_{kj}$$

ولكن $A^t = A$ لذا فإن $a_{jk} = a_{kj}$

و

$$2a_{kj} < a_{jj} + a_{kk}. \tag{10.6}$$

والآن عرّف $\mathbf{z} = (z_i)$ كما يلي:

$$z_i = \begin{cases} 0، & \text{إذا كان } i \neq k \text{ و } i \neq j \\ 1، & \text{إذا كان } i = k \text{ أو } i = j \end{cases}$$

عندئذ $\mathbf{z}^t A\mathbf{z} > 0$ لذلك

$$-2a_{kj} < a_{kk} + a_{jj} \qquad \textbf{(11.6)}$$

إن المعادلتين (10.6) و (11.6) تتضمنان لكل $k \neq j$،

$$|a_{kj}| < \frac{a_{kk} + a_{jj}}{2} \le \max_{1\le i\le n} |a_{ii}| \quad \text{لذلك} \quad \max_{1\le k,j\le n} |a_{kj}| \le \max_{1\le i\le n} |a_{ii}|$$

د. لكل $i \neq j$، عرّف $\mathbf{x} = (x_k)$ كما يلي:

$$x_k = \begin{cases} 0، & k \neq j \text{ إذا كان } \text{ و } k \neq i \\ \alpha، & k = i \text{ إذا كان } \\ 1، & k = j \text{ إذا كان } \end{cases}$$

حيث تمثل α عددًا حقيقيًّا مهما اتفق.

بما أن $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$، فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = a_{ii}\alpha^2 + 2a_{ij}\alpha + a_{jj}$$

وبالنظــر إلى $P(\alpha) = a_{ii}\alpha^2 + 2a_{ij}\alpha + a_{jj}$ بافتراض كثيرة حدود تربيعية في α ذي الجذور غير الحقيقية، فإن المميزة لـ $P(\alpha)$ يجب أن تكون سالبة.

وهكذا فإن $\quad 4a_{ij}^2 - 4a_{ii}a_{jj} < 0 \quad$ و $\quad a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$ ■ ■ ■

ومع أن المبرهنة (21.6) تعطي بعض الشروط المهمة التي يجب أن تتحقق في المصفوفات الموجبة التحديد، إلا أنها لا تضمن للمصفوفة التي تحقق هذه الشروط أن تكون موجبة التحديد.

إن المفهوم الآتي سيستخدم استخدام الشرط الضروري والكافي:

تعريف 22.6 تعرّف المصفوفة الجزئية المتقدمة الرئيسة A (leading principal submatrix) على أنها مصفوفة من النوع

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

لعدد ما $1 \le k \le n$. ■

إن برهان النتيجة الآتية موجود في [stew 2,p.250].

تمهيدية 23.6 تكون المصفوفة المتماثلة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا كانت مصفوفاتها جميعها جزئية متقدمة رئيسة ذات محددات موجبة. ■

مثال 3 استخدمنا في مثال (2) تعريف لبرهنة أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

موجبة التحديد.

ولكي نؤكد هذا باستخدام المبرهنة 23.6، انظر أن

$$\det A_1 = \det[2] = 2 > 0$$

$$\det A_2 = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

و

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - (-1)\det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2(4-1) + (-2+0) = 4 > 0$$ ■

إن أمر مابل **Maple** في مكتبة الجبر الخطي

```
>IsDefinite(A, query = 'positive_definite')
```

يعطي "صحيحة" **true** إذا كانت المصفوفة A المدخلات الحقيقية جميعها موجبة التحديد، فيما عدا ذلك يعطي "خطأ" **false** بوصفها إشارة للتحديد الموجب.

وبالتلاؤم مع تعريفنا فإن التماثل مطلوب للحصول على نتيجة صحيحة **true**.

تعطي النتيجة الآتية تعميمًا للفقرة (أ) للمبرهنة (21.6)، وتوازي النتائج الخاصة بالقطر السائد المعطاة في المبرهنة (14.6)، ولن نعطي برهانًا لهذه المبرهنة؛ لأنها تتطلب تقديم مصطلحات ونتائج غير ضرورية لأي غرض آخر.

إن تطوير هذه المبرهنة وبرهانها موجودان في [We,p.120ff].

مبرهنة 24.6 المصفوفة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا أمكن إجراء عملية الحذف لجاوس دون مبادلات صفية على النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ حيث التمحور موجب. ■

وفي هذه الحالة، وبالإضافة إلى ذلك فإن الحسابات الخاصة بأخطاء تقريب مستقرة.

وإن بعض الحقائق الممتعة التي لا يكشف عنها برهان المبرهنة (24.6) تُعرض في النتائج الآتية:

تمهيدية 25.6 المصفوفة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا أمكن تحليل A على الصيغة LDL^t، حيث L مصفوفة مثلثية سفلية بعناصر القطر كلها 1، و D مصفوفة قطرية بعناصر القطر الموجبة. ■

تمهيدية 26.6 تكون المصفوفة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا أمكن تحليلها على الصيغة LL^t، حيث L مثلثية سفلية بعناصر القطر كلها غير الصفرية. ■

إن المصفوفة L في النتيجة (26.6) ليست هي نفسها في النتيجة (25.6). وهناك علاقة بينهما تعرض في التمرين (32). إن الخوارزمية (5.6) مبنية على خوارزمية التحليل LU (4.6)، وتنتج التحليل LDL^t الموصوف في النتيجة (25.6).

ALGORITHM
الخوارزمية
5.6

التحليل LDL^t LDL^t Factorization

لتحليل المصفوفة $n \times n$ موجبة التحديد A بالصيغة LDL^t، حيث L مصفوفة مثلثية سفلية بعناصر القطر كلها 1، و D مصفوفة قطرية بعناصر القطر كلها الموجبة:

المدخلات: البعد n، العناصر المدخلة a_{ij} ، لكل $1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A.

المخرجات: العناصر المدخلة l_{ij}، لكل $1 \le j < i$ و $1 \le i \le n$ للمصفوفة L و d_i لكل $1 \le i \le n$ للمصفوفة L، و d_i لكل $1 \le i \le n$ للمصفوفة D.

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1,\dots, n$، نفّذ الخطوات 2-4.
2	لكل $j = 1,\dots, i-1$ ضع $v_j = l_{ij}d_j$.
3	ضع $d_i = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}v_j$.
4	لكل $j = i+1,\dots, n$ ضع $l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}v_k)/d_i$
5	المخرجات (l_{ij} لكل $i = 1,\dots, n$ و $j = 1,\dots, i-1$) المخرجات (d_i لكل $i = 1,\dots, n$) توقف.

■

للنتيجة 25.6 نتيجة مقابلة عندما تكون A متماثلة، ولكنها ليست بالضرورة موجبة التحديد. إن هذه النتيجة واسعة التطبيق؛ لأن المصفوفات المتماثلة شائعة، ويمكن تعرفها بسهولة.

تمهيدية 27.6

لتكن A مصفوفة متماثلة $n \times n$ يمكن أن نطبق عليها عملية الحذف لجاوس دون مبادلات صفية، ويمكن تحليل A إلى LDL^t، حيث L مثلثية سفلية كل عناصر قطرها 1، و D المصفوفة القطرية عناصر قطرها $a_{11}^{(1)},\dots, a_{nn}^{(n)}$. ■

آندريه – لويس تشولسكي كان قائدًا عسكريًا فرنسيًا. وكان مسؤولًا عن المساحة. وفي عام 1900 [Andre - Louis Cholesky(1875 - 1918)]–طوّر طريقة التحليل لحساب حلول مسائل المربعات الصغرى.

يمكن تعديل الخوارزمية (5.6) لتحليل المصفوفات في النتيجة (27.6). وإنها تتطلب بكل سهولة فحصًا إضافيًّا لضمان أن العناصر القطرية غير صفرية. إن خوارزمية تشولسكي (6.6) تنتج التحليل LL^t الموصوف في النتيجة (26.6).

ALGORITHM
الخوارزمية
6.6

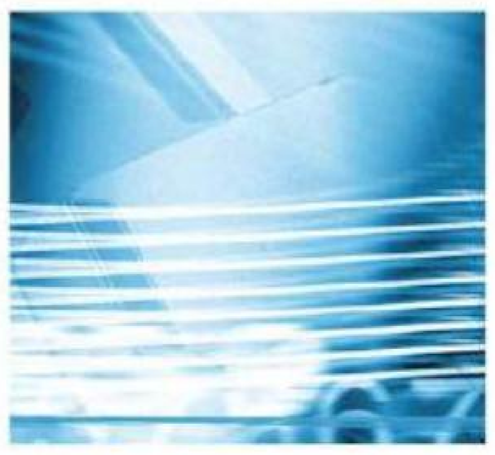
تشولسكي Cholesky

لتحليل المصفوفة موجبة التحديد A من نوع $n \times n$ لـ LL^t حيث L مثلثية سفلية:

المدخلات: البعد n، العناصر المدخلة a_{ij} لكل $1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A.

المخرجات: العناصر المدخلة l_{ij}، لكل $1 \le j \le i$ و $1 \le i \le n$ للمصفوفة L (مدخلات $U = L^t$ هي $u_{ij} = l_{ji}$ لكل $i \le j \le n$ و $1 \le i \le n$).

الخطوة	المضمون
1	ضع $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$.
2	لكل $j = 2,\dots, n$ ضع $l_{j1} = a_{j1}/l_{11}$.
3	لكل $i = 2,\dots, n-1$ نفّذ الخطوتين 4 و 5.
4	ضع $l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2}$.



5	لكل $j = i+1,\ldots,n$ ضع $l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}l_{ik}\right) / l_{ii}$
6	ضع $l_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2\right)^{1/2}$
7	المخرجات (l_{ij} لكل $i = 1,\ldots,n$ و $j = 1,\ldots,i$) توقف.

■

إن تحليل تشولسكي للمصفوفة A يحسب من مكتبة الجبر الخطي باستخدام عبارة **Maple**

```
>L:=LUDecomposition(A, method='Cholesky')
```

ويعطي المصفوفة المثلثية السفلية L بوصفها مخرجًا.

مثال 4 المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}$$

موجبة التحديد. إن التحليل LDL^t للمصفوفة A المعطى في الخوارزمية (5.6) هو

$$A = LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وخوارزمية تشولسكي (6.6) تعطي التحليل

$$A = LL^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

إن التحليل LDL^t الموصوف في الخوارزمية (5.6) يتطلب عمليات ضرب/قسمة عددها $n^3/6 + n^2 - 7n/6$ وعمليات جمع/طرح عددها $n^3/6 - n/6$.

ويتطلب تحليل تشولسكي LL^t للمصفوفة موجبة التحديد عمليات ضرب/قسمة عددها $n^3/6 + n^2/2 - 2n/3$، وعمليات جمع/ طرح عددها $n^3/6 - n/6$.

لكن المزية الحسابية لتحليل تشولسكي مضللة؛ لأنها تتطلب إجراء n من الجذور التربيعية. لكن عدد العمليات اللازمة لحساب n، من الجذور التربيعية هو عامل خطي في n وسيتناقص بشدة مع زيادة n.

توفر الخوارزمية (5.6) طريقة مستقرة لتحليل المصفوفة موجبة التحديد بالصيغة $A = LDL^t$، ولكن يجب تعديلها لحل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ولعمل ذلك؛ نحذف عبارة توقف STOP من الخطوة 5 في الخوارزمية، ونضيف الخطوات الآتية لحلّ النظام المثلثي السفلي $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

6	ضع $y_1 = b_1$.
7	لكل $i = 2,\ldots,n$ ضع $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j$

بعد ذلك يمكن حل النظام الخطي $D\mathbf{z} = \mathbf{y}$.

8	لكل $i = 1,\ldots, n$ ضع $z_i = y_i/d_i$.

أخيرًا يُحلُّ النظام المثلثي العلوي $L^t\mathbf{x} = \mathbf{z}$ بالخطوات:

9	ضع $x_n = z_n$.
10	لكل $i = n-1,\ldots, 1$ ضع $x_i = z_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji}x_j$.
11	المخرجات (x_i لكل $i = 1,\ldots, n$). توقف.

يظهر جدول (3.6) العمليات الإضافية اللازمة لحل النظام الخطي.

جدول 3.6

الخطوة	الضرب/القسمة	الجمع/الطرح
6	0	0
7	$n(n-1)/2$	$n(n-1)/2$
8	n	0
9	0	0
10	$n(n-1)/2$	$n(n-1)/2$
المجموع	n^2	$n^2 - n$

إذا فضِّل تحليل تشولسكي المعطى في الخوارزمية 6.6 فإن الخطوات الإضافية المطلوبة لحل النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ هي كما يلي: أولًا: احذف عبارة توقف STOP من الخطوة 7، ثم أضف:

8	ضع $y_1 = b_1/l_{11}$.
9	لكل $i = 2,\ldots, n$ ضع $y_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j\right)\Big/ l_{ii}$.
10	ضع $x_n = y_n/l_{nn}$.
11	لكل $i = n-1,\ldots, 1$ ضع $x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji}x_j\right)\Big/ l_{ii}$.
12	المخرجات (x_i لكل $i = 1,\ldots, n$). توقف.

تحتاج الخطوات 8-12 إلى عمليات ضرب/ قسمة عددها $n^2 + n$ وعمليات جمع / طرح عددها $n^2 - n$.

إن فئةَ المصفوفات التي افتُرضت تسمى مصفوفات طوقية (band matrices) في معظم التطبيقات وهي أيضًا مصفوفات قطرية حتمًا أو موجبة التحديد.

تسمى المصفوفة $n \times n$ مصفوفة طوقية إذا وجد عددان صحيحان q و p، حيث $1 < p, q < n$ في الخاصية $a_{ij} = 0$ عندما $p \le j - i$ أو $q \le i - j$.

تعريف 28.6 تسمى المصفوفة $n \times n$ مصفوفة طوقية إذا وجد عددان صحيحان q و p، حيث $1 < p, q < n$ في الخاصية $a_{ij} = 0$ عندما $p \le j - i$ أو $q \le i - j$. إن طول طوق (bandwidth) المصفوفة الطوقية هو $w = p + q - 1$. ■

يأتي اسم مصفوفة طوقية من حقيقة أن العناصر غير الصفرية جميعها تقع في طوق يتمركز حول القطر الرئيس.

إن العدد p يصف عدد الأقطار أعلى القطر الرئيس ومتضمنًا إياه، بحيث تقع العناصر غير الصفرية عليها، والعدد q يصف عدد الأقطار تحت القطر الرئيس ومتضمنا إياه، بحيث تقع العناصر غير الصفرية عليها. فعلى سبيل المثال المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة طوقية فيها $p = q = 2$ وطول الطوق $3 = 1 - 2 + 2$.

إن تعريف المصفوفة الطوقية تجبر تلك المصفوفات على تركيز عناصرها غير الصفرية جميعها حول القطر. وهناك حالتان خاصتان من المصفوفات الطوقية المتكررة، وهما اللتان يكون فيهما $p = q = 2$ و $p = q = 4$.

إن المصفوفات التي فيها طول الطوق 3 والتي تحدث عندما $p = q = 2$ تُسمى ثلاثية الأقطار (tridiagonal)؛ لأنها تكون على الصيغة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ستُعالَج المصفوفات الثلاثية الأقطار في الباب **11**، بربطها بدراسة التقريب الخطي المنقطع لمسائل القيم الحدودية. ستستخدم حالة $p = q = 4$ لحل مسائل القيم الحدودية عندما تتخذ الدالة التقريبية صيغ الشريحة التكعيبية.

من المكن تبسيط خوارزميات التحليل على نحو كبير في حالة المصفوفات الطوقية؛ لأن عددًا كبيرًا من الأصفار يظهر في هذه المصفوفات في صيغها المنتظمة. وعليك أن تناظر الصيغة التي تتخذها عملية كراوت Crout أو دوليتل Doolittle في هذه الحالة.

ولشرح هذه الحالة؛ افترض أن المصفوفة الثلاثية القطر A قابلة للتحليل إلى المصفوفات المثلثية L و U، وبما أن A فيها $(3n - 2)$ من المدخلات غير الصفرية فقط، فإن هناك $(3n - 2)$ فقط من الحالات اللازم تطبيقها لتحديد مدخلات L و U، على شرط الحصول على المدخلات الصفرية في A. افترض إمكانية الحصول على المصفوفات بالصيغة:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

يوجد $(2n - 1)$ من المدخلات غير المحددة في L و $(n - 1)$ من المدخلات غير المحددة في U التي مجموعها عدد الحالات $(3n - 2)$.

فنحصل على المدخلات الصفرية في A تلقائيًا.

إن عملية الضرب المتضمنة في $A = LU$ تعطينا بالإضافة إلى المدخلات الصفرية المدخلات الآتية:

$$a_{11} = l_{11}$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1} \quad \text{لكل} \quad i = 2, 3, \ldots, n \tag{12.6}$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii} \quad \text{لكل} \quad i = 2, 3, \ldots, n \tag{13.6}$$

و

$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{14.6}$$

ويمكن إيجاد حل لهذا النظام باستخدام المعادلة (12.6) أولاً للحصول على الحدود غير الصفرية جميعها خارج القطر في L، ثم باستخدام المعادلتين (13.6) و (14.6) للحصول على المدخلات المتبقية في L و U على نحو متبادل.
ويمكن تخزين هذه المدخلات في مدخلات A المقابلة.

إن الخوارزمية (7.6) تحل نظام المعادلات $n \times n$ ذي مصفوفة معاملات مثلثية. إن هذه الخوارزمية تتطلب $(5n - 4)$ فقط من عمليات الضرب/ القسمة و $(3n - 3)$ من عمليات الجمع/ الطرح، ومن ثم فإن لها مزية حسابية في الطرائق الأخرى التي لا تستخدم الخاصية المثلثية للمصفوفة.

ALGORITHM
الخوارزمية
7.6

طريقة كراوت لتحليل الأنظمة الخطية ثلاثية الأقطار

Crout Factorization for Tridiagonal Linear Systems

لحلِّ النظام الخطي $n \times n$

$$\begin{aligned}
E_1: &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &&= a_{1,n+1}\\
E_2: &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &&= a_{2,n+1}\\
\vdots &\quad \vdots &&\ \ \vdots\\
E_{n-1}: &\quad a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &&= a_{n-1,n+1}\\
E_n: &\quad a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n &&= a_{n,n+1}
\end{aligned}$$

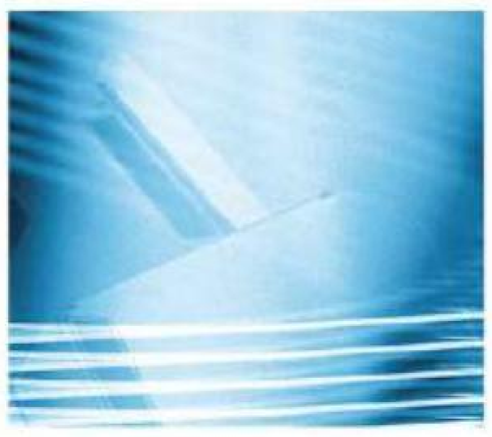
ومن المفترض أن له حلًّا وحيدًا.

المدخلات: **البعد** n، **مدخلات** A

المخرجات: **الحل** $x_1, \ldots, x_n$.

(الخطوات 1-3 وحل $Lz = \boldsymbol{b}$.)

الخطوة	المضمون
1	ضع $l_{11} = a_{11}$ $u_{12} = a_{12}/l_{11}$ $z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}$
2	لكل $i = 2, \ldots, n-1$ ضع $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$ (الصف i في L) $l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$ $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}$ (العمود i $(i+1)$ في U) $z_i = (a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1})/l_{ii}$
3	ضع $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$ (الصف n في L) $l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$ $z_n = (a_{n,n+1} - l_{n,n-1}z_{n-1})/l_{nn}$ (تنفذ الخطوتان 4 و5 $Ux = z$.)



4	ضع $x_n = z_n$.
5	لكل $i = n - 1, \dots, 1$ ضع $x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$
6	المخرجات $(x_1, \dots, x_n)$ توقف.

■

مثال 5 لتوضيح عملية المصفوفات الثلاثية الأقطار، لديك نظام ثلاثي الأقطار ذو المعادلات

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad\quad\quad &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \quad &= 0 \\ - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

الذي له المصفوفة الممتدة (الموسعة)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

إن خوارزمية كراوت للتحليل تعطي التحليل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

إن حلّ النظام $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$ يعطي $\mathbf{z} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\right)^t$، وحلّ النظام $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ هو $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^t$. ■

يمكن تطبيق خوارزمية كراوت للتحليل عندما $l_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$.

إن أيًّا من الحالتين الآتيتين تضمن صحة هذا، فإما أن تكون مصفوفة المعادلات للنظام موجبة التحديد، وإما أنها ذات قطر سائد حتمًا.

هناك حالة ثالثة تضمن إمكانية تطبيق هذه الخوارزمية وترد في المبرهنة الآتية، ويرد برهانها في التمرين (28).

مبرهنة 29.6 افترض أن $A = [a_{ij}]$ ثلاثية الأقطار وفيها $a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0$ لكل $i = 2, 3, \dots, n-1$ إذا كان $|a_{11}| > |a_{12}|, |a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|$ لكل $i = 2, 3, \dots, n-1$ و $|a_{nn}| > |a_{n,n-1}|$ فإن A تكون غير منفردة، وقيم l_{ii} المصفوفة في خوارزمية كراوت للتحليل غير صفرية لكل $i = 1, 2, \dots, n$.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 6.6

1. حدّد أيًّ من المصفوفات الآتية تكون (i) متماثلة، (ii) منفردة، (iii) ذات قطر سائد حتمًا، (iv) موجبة التحديد:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. حدّد أيَّ من المصفوفات الآتية تكون (i) متماثلة، (ii) منفردة، (iii) ذات قطر سائد حتمًا، (iv) موجبة التحديد:

أ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 1.5 & 1 \\ 6 & -9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

3. استخدم خوارزمية التحليل LDL^t لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LDL^t$ للمصفوفات الآتية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. استخدم خوارزمية التحليل LDL^t لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LDL^t$ للمصفوفات الآتية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. استخدم خوارزمية تشولسكي لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LL^t$ للمصفوفات في التمرين (3).

6. استخدم خوارزمية تشولسكي لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LL^t$ للمصفوفات في التمرين (4).

7. طوّر خوارزمية التحليل LDL^t كما اقتُرح في الكتاب؛ لكي تكون صالحة للاستخدام لحل الأنظمة الخطية. استخدم الخوارزمية المطورة لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0.65 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0.05 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &= 0.5 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 \qquad &= 7 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 8 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad &= 7 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 \qquad - x_3 + 3x_4 &= -2 \end{aligned}$$

8. استخدم الخوارزمية المطوّرة في التمرين (7) لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -2 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

9. طـوّر خوارزمية تشولســكي كما اقتُرح في الكتاب؛ لكــي تكون صالحة لحل أنظمة خطية، واستخدم الخوارزمية المطورة لحل الأنظمة الخطية الواردة في التمرين (7).

10. استخدم الخوارزمية المطوّرة الواردة في التمرين (9) لحل الأنظمة الخطية في التمرين (8).

11. استخدم تحليل كراوت للأنظمة الثلاثية الأقطار لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1.5 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.25x_2 &= 0.35 \\ 0.35x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 &= 0.77 \\ 0.25x_2 + x_3 + 0.5x_4 &= -0.5 \\ x_3 - 2x_4 &= -2.25 \end{aligned}$$

12. استخدم تحليل كراوت للأنظمة ثلاثية الأقطار لحلِّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_4 - x_5 &= -2 \\ x_4 + 2x_5 &= -1 \end{aligned}$$

13. لتكن A المصفوفة 10×10 ثلاثية الأقطار، حيث $a_{ii} = 2, a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = -1$ لكل $i = 2, \ldots, 9$ و $a_{11} = a_{10,10} = 2, a_{12} = a_{10,9} = -1$. ليكن **b** المتجــه العمودي ذا 10 أبعاد المعطى بالعناصر $b_1 = b_{10} = 1$ ، و $b_i = 0$ لكل $i = 2, 3, \ldots, 9$،
حُلَّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ باستخدام تحليل كراوت للأنظمة ثلاثية الأقطار.

14. طوّر التحليل LDL^t للتمكن من تحليل المصفوفة المتماثلة A.
[ملحوظــة: ليــس مضموناً أن يكــون التحليل ممكنــاً دائمًا]. طبّق الخوارزميــة الجديدة على المصفوفات الآتية:

أ.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & -7 \\ 6 & -7 & 13 \end{bmatrix}$$

ب.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 14 & -20 \\ 9 & -20 & 29 \end{bmatrix}$$

ج.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

د.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 4 & -4 & 10 & -10 \\ -4 & 5 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

15. أي المصفوفات في التمرين (14) موجبة التحديد؟

16. أوجد α بحيث تكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ موجبة التحديد.

17. أوجد α بحيث تكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ موجبة التحديد.

18. أوجد α و $\beta > 0$ لكي تكون $A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ 2\beta & 5 & 4 \\ \beta & 2 & \alpha \end{bmatrix}$

ذات قطر سائد حتمًا.

19. أوجد $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ لكي تكون المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \beta \\ \alpha & 5 & \beta \\ 2 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

ذات قطر سائد حتمًا.

20. لتكن كل من A و B مصفوفة $n \times n$ ذات قطر سائد حتمًا.

أ. هل $-A$ ذات قطر سائد حتمًا؟

ب. هل A^t ذات قطر سائد حتمًا؟

ج. هل $A + B$ ذات قطر سائد حتمًا؟

د. هل A^2 ذات قطر سائد حتمًا؟

هـ. هل $A - B$ ذات قطر سائد حتمًا؟

21. لتكن A و B مصفوفتين، $n \times n$ موجبتي التحديد:

أ. هل $-A$ موجبة التحديد؟

ب. هل A^t موجبة التحديد؟

ج. هل $A + B$ موجبة التحديد؟

د. هل A^2 موجبة التحديد؟

هـ. هل $A - B$ موجبة التحديد؟

22. لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$

أوجد قيم α جميعها التي تجعل A:

أ. منفردة. ب. ذات قطر سائد حتمًا.

ج. متماثلة. د. موجبة التحديد.

23. لتكن $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد قيم α و β جميعها التي تجعل A:

أ. منفردة. ب. ذات قطر سائد حتمًا.

ج. متماثلة. د. موجبة التحديد.

24. افتــرض أن A و B تحققــان خاصية التبديــل أي $AB = BA$، فهل تحقق A^t و B^t خاصية التبديل أيضًا؟

25. أنشيء مصفوفة غير متماثلة A بحيث يكون $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ لـ $\mathbf{x} \neq 0$ جميعها.

26. أثبت أن عملية الحذف لجاوس يمكن تطبيقها على أي مصفوفة A دون مبادلات صفية إذا وفقط إذا كانت المصفوفات المصغرة الرئيسة جميعها المتقدمة للمصفوفة A غير منفردة.
[ملحوظة: جزّئت كل مصفوفة في المعادلة $A^{(k)} = M^{(k-1)} M^{(k-2)} \cdots M^{(1)} A$ عموديًا بين العمودين عدد k وعدد $(k+1)$ وأفقيًا بين الصفين عدد k وعدد $(k+1)$. (انظر التمرين 10 الفصل 3.6) برهن أن المصفوفة المصغرة الرئيسة المتقدمة للمصفوفة A تكافئ $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$

27. عادة ما يعبر عن المصفوفات الثلاثية الأقطار بالصيغة:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

وذلك للتأكيد على عدم الحاجة إلى التعبير عن مدخلات المصفوفة جميعها. اكتب مرة أخرى خوارزمية كراوت للتحليل باستخدام هذا التعبير، وغيّر التعبير l_{ij} و u_{ij} بطريقة مماثلة].

28. برهن المبرهنة (29.6).
[ملحوظة: برهن أن $|u_{i,i+1}| < 1$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$، وأن $|l_{ii}| > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. واستنتج أن $\det A = \det L \cdot \det U \neq 0$].

29. افترض أن $V = 5.5$ فولت في مثال في مقدمة هذا الفصل، وبإعادة ترتيب المعادلات يمكنك تكوين نظام خطي ثلاثي الأقطار. استخدم خوارزمية كراوت للتحليل لإيجاد حلّ النظام المعدّل.

30. أنشئ طريقة لعد العمليات لحلّ نظام خطي $n \times n$ باستخدام خوارزمية كراوت للتحليل.

31. في بحث قام به دورن وبردك Dorn and Burdick [DoB] استنتجا منه أنه يمكن التعبير عن معدل طول جناح ذبابة الفاكهة (Drosophila melanogaster) المهجنة من تزاوج ثلاثة أنواع من ذباب الفاكهة، بصيغة المصفوفة المتماثلة

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix}$$

حيث تمثّل a_{ij} معدل طول جناح الجيل الناتج من تزاوج الذكور من نوع i مع الأنثى من نوع j.

أ. ما الأهمية في الطبيعة التي يمكن ربطها بتماثل هذه المصفوفة؟

ب. هل هذه المصفوفة موجبة التحديد؟
إذا كان الأمر كذلك فبرهنه، وإذا كان غير ذلك، فأوجد متجهًا x بحيث $x^t A x \leq 0$.

32. افترض أن المصفوفة موجبة التحديد A قابلة لتحليل تشولسكي $A = LL^t$ وكذلك التحليل $A = \hat{L} D \hat{L}^t$، حيث D المصفوفة القطرية بمدخلات قطرية موجبة $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$. لتكن $D^{1/2}$ المصفوفة القطرية بمدخلات قطرية $\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}}$.

أ. أثبت أن $D = D^{1/2} D^{1/2}$. ب. أثبت أن $L = \hat{L} D^{1/2}$.

7.6 مسح الطرائق والبرمجيات Survey of Methods and Software

لقد درسنا في هذا الفصل طرائق مباشرة لحل الأنظمة الخطية. ويتألف النظام الخطي من n من المعادلات التي تحتوي على n من المجاهيل، والتي يعبر عنها بالمصفوفات على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. تستخدم هذه الطرائق متتالية منتهية من العمليات الحسابية للتوصل إلى الحل الصحيح للنظام

مــع الخضــوع لخطأ تقريــب فقط. لقد وجدنــا أن النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يملــك حلًّا وحيدًا إذا وفقــط إذا كانــت A^{-1} موجــودة، أي ما يكافئ $\det A \neq 0$. إن حلَّ هــذا النظام الخطي هو $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. لقــد اســتُخدمت طرائق التمحــور لتقليل آثار خطأ التقريــب الذي يمكن أن يطغى على الحل باستخدام الطرائق المباشرة. لقد درسنا التمحور الجزئي، والتمحور الجزئي الموزون، والتمحور الكلي. وإننا ننصح باستخدام طرائق التمحور الجزئي أو التمحور الجزئي الموزون، في معظم المســائل؛ لأن هذه الطرائق حســابية زائدة. ويجب استخدام التمحور الكلي إذا كان هناك شك في وجود خطأ تدوير كبير.

سنتعرف في الفصل 4.7 بعض الطرائق لتقدير خطأ تقريب هذا. لقد ثبت أن طريقة الحذف لجــاوس بتعديلات بســيطة تعطي تحليــلًا للمصفوفة A بالصيغة LU، حيث L مثلثية ســفلية بمدخلات 1 على القطر، وU مثلثية علوية. وتســمى هذه العملية بتحليل دوليتل Doolittle. ولا تخضــع المصفوفات غير المنفردة جميعها للتحليل بهذه الطريقــة، ولكن تبديل الصفوف يعطي دائمًــا تحليلًا على الصيغة $PA = LU$، حيث P مصفوفة التباديل المســتخدمة لإعادة ترتيب صفــوف A. إن مزية التحليل تتجلى في تقليــل العمل عند حلِّ الأنظمة الخطية $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ذات مصفوفة المعاملات A نفسها ومتجهات مختلفة $\mathbf{b}$.

إن التحليل يأخذ صيغة أســهل عندما تكون A موجبة التحديد. وعلى ســبيل المثال فإن تحليل تشولســكي يكون علــى الصيغة $A = LL^t$، حيث L مثلثية ســفلية، وإن المصفوفــة المتماثلة ذات التحليل LU يمكن تحليلها أيضًا على الصيغة $A = LDL^t$، حيث D قطرية، و L مثلثية ســفلية بمدخلات قطرية 1. ومن المكن تبســيط العمليات حول A ثلاثية الأقطار، وإن التحليل UL يأخذ صيغة بســيطة خاصة، حيث إن مدخلات القطر الرئيــس وباقي المدخلات أصفار ما عدا مدخلات القطر الذي يعلو القطر الأساس مباشرة. وبالإضافة إلى ذلك فإن المدخلات غير الصفرية في L تكون علــى القطر الرئيس والقطر تحته. إن الطرائق المباشــرة هي الطرائق المختارة لمعظم الأنظمة الخطية. وفي حالات المصفوفات الثلاثية الأقطار، الطوقية، وموجبة التحديد، فإنه ينصح باستخدام الطرائق الخاصــة. أمــا في الحالة العامة فــإن طريقة الحذف لجاوس أو طريقــة التحليل على الصيغة LU التي تسمح بالتمحور تكون المفضلة. ويجب في هذه الحالات مناقشة تقدير الأخطاء في الطرائق المباشرة.

إن الأنظمــة الخطيــة الكبيرة التي تكون مدخلاتها الصفرية أساسًــا واقعةً في أنماط منتظمة قابلةٍ للحل على نحو فعّال باستخدام طريقة ارتجاع مثل تلك المعطاة في الباب 7. وإن أنظمة من هذا النوع تظهر طبيعيًا على ســبيل مثال، عند اســتخدام طرائق الفرق المنتهي لحل مســائل القيمة الحدودية التــي هي تطبيق مألوف في الحل العــددي للمعادلات التفاضلية الجزئية. ومن المكن أن تكون هناك صعوبة في حل نظام خطي كبير، بحيث لا تدفع مدخلاته غير الصفرية أساسًا أو مدخلاته الصفرية نمطًــا متنبأً به. ويمكن أن نضع المصفوفــة المقابلة للنظام في مخزن ثانوي بصيغة مجزأة وبأجزاء تُقرأ في الذاكرة الرئيسة كلما احتجنا إليها للحساب. إن الطرائق التي تحتاج إلى تخزين ثانوي يمكن أن تكــون متراجعة أو مباشــرة، ولكنها عادة ما تحتاج إلــى طرائق من حقول هيكلية البيانات أو مبرهنة الرســم. نوجّه عناية القارئ إلى المرجعين [BuR] و [RW] لمناقشــة هذه الطرائق. إن برمجيات عمليات المصفوفات والحل المباشــر للأنظمة الخطية المســتخدمة في IMSL وNAG مبنية على LAPACK، وهي حقيبــة برمجيــات في الحقــل العام، ويوجد توثيق متميــز متاح معها والكتب التــي كتبت حولها.

سنركز على برمجيات متعددة متاحة في المصادر الثلاثة. يصاحب LAPACK مجموعة من العمليات منخفضة المستوى المسماة Basic Linear Algebra Subprograms (BLAS) يتكون المستوى 1 من BLAS عمومًا من عمليات متجه – متجه مع بيانات الإدخال وعدد العمليات برتبة $O(n)$. يتكون المستوى 2 من عمليات مصفوفة – متجه مع بيانات الإدخال وعدد العمليات برتبة $O(n^2)$. يتكون المستوى 3 من عمليات مصفوفة – مصفوفة مع بيانات الإدخال وعدد العمليات برتبة $O(n^3)$. فعلى سبيل المثال في المستوى 1، تكتب البرمجية SCOPY المتجه $\mathbf{y}$ مع المتجه $\mathbf{x}$، وتحسب SSCAL العدد الثابت a مضروبًا في المتجه $\mathbf{x}$، وتجمع SAXPY العدد الثابت a مضروبًا في المتجه $\mathbf{x}$ مع المتجه $\mathbf{y}$ أي $\mathbf{y}$ $(\mathbf{y} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y})$، وأن SDOT تحسب الضرب الداخلي لمتجهين، وكذلك الضرب في ثابت، وتحسب SNRM2 القياس الإقليدي للمتجه بطريقة مماثلة لتلك التي شُرحت في الفصل (1.4)، وأن ISAMAX تحسب مؤشر (index) مركبة المتجه التي تعطي أعظم قيمة مطلقة للمركبات جميعها. في المستوى 2 تحسب SGEMV حاصل ضرب مصفوفة في متجه، وفي المستوى 3 تحسب SGEMM حاصل ضرب مصفوفة في مصفوفة. إن البرمجيات في LAPACK لحل الأنظمة الخطية تحلل المصفوفة A إلى العوامل أولًا. ويعتمد التحليل على نوع المصفوفة بالطرائق الآتية:

1. المصفوفة العامة $PA = LU$
2. المصفوفة موجبة التحديد $A = LL^t$
3. المصفوفة المتماثلة $A = LDL^t$
4. المصفوفة ثلاثية الأقطار $A = LU$ (بصيغة الطوق)

إن البرمجية STRTRS تحل النظام الخطي المثلثي عندما تكون المصفوفة علوية أو سفلية. والبرمجية SGETRF تحلل PA إلى LU بوصفها عملية مبدئية للبرمجية SGETRS، التي تحسب بعد ذلك حَلّ النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. تستخدم البرمجية SGETRI لإيجاد معكوس (النظير الضربي) للمصفوفة A ، وتستخدم لحساب محددة A عندما تكون A قد حلّلت عن طريق SGETRF. ويوجد تحليل تشولسكي للمصفوفة موجبة التحديد A عن طريق البرمجية SPOTRF. يمكن بعدئذ حل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ باستخدام البرمجية SPOTRS. ويمكن إيجاد المعكوس والمحدّدة للمصفوفة الموجبة التحديد، إذا ما أُعطي تحليل تشولسكي لها باستخدام SPOTRI. إذا كانت A متماثلة فإنه يمكن إيجاد التحليل LDL^t باستخدام SSYTRF. عندئذ يمكن حل الأنظمة الخطية باستخدام SSYTRS. وإذا ما رغبت في إيجاد المعكوس أو المحددة فاستخدم SSYTRI. إن الكثير من البرمجيات في LINPACK و LAPACK التي تلتها يمكن تنفيذها باستخدام MATLAB. باستخدام الأمر

$$[L, U, P] = lu(A)$$

يمكن تحليل المصفوفة غير المنفردة A إلى الصيغة $PA = LU$، حيث P هي مصفوفة التبديل المعرّفة عن طريق تنفيذ التمحور الجزئي لحل النظام الخطي المنطوي على A.

إذا ما عُرِّفت المصفوفة غير المنفردة A والمتجه $\mathbf{b}$ في MATLAB فإن الأمر

$$x = A\backslash b$$

يحلُّ النظام الخطي باستخدام أمر التحليل $PA = LU$ أولًا. وبعدئذ يحلُّ النظام المثلثي السفلي $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$ للمتجه $\mathbf{z}$ باستخدام الأمر

$$z = L\backslash b$$

ويتبع هذا حلّ النظام المثلثي العلوي $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ باستخدام الأمر

$$x = U\backslash z$$

وتوجــد أوامر أخرى في MATLAB، منها ما يســتخدم لحســاب المعكــوس، المنقول، والمحددة للمصفوفة A عن طريق الأوامر $\text{inv}(A)$، A' و $\det(A)$ على التوالي. تحتوي مكتبة IMSL برمجيات مقابلة لمعظم برمجيات LAPACK، بالإضافة إلى بعض الزيادات.

وتُسمى وفق المهمات التي تؤديها بما يلي:

1. الحروف الثلاثة الأولى للاسم بالإنجليزية:
   - أ. LSL: تحلُّ النظام الخطي.
   - ب. LFT: تحلّل مصفوفة معاملات.
   - ج. LFS: تحلُّ نظامًا خطيًّا إذا أعطيت العوامل من LFT.
   - د. LFD: تحسب محددات العوامل المعطاة.
   - هـ. LIN: تحسب معكوس العوامل المعطاة.
2. يحدد الحرفان الأخيران نوع المصفوفة المعطاة:
   - أ. RG: حقيقية عامة
   - ب. RT: حقيقية مثلثية
   - ج. DS: حقيقية موجبة التحديد
   - د. SF: حقيقية متماثلة
   - هـ. RB: حقيقية طوقية

فعلى سبيل المثال تحلّل البرمجية LFTDS المصفوفة الحقيقية موجبة التحديد. إن مكتبة NAG تحوي كثيرًا من البرمجيات الخاصة بالطرائق المباشرة لحل الأنظمة الخطية المماثلة لتلك في LA-PACK و IMSL. فعلى سبيل المثال يحلُّ البرنامج F04AEF أنظمة خطية باستخدام تحليل كراوت. ويحلُّ البرنامج F04ATF نظامًا خطيًّا واحدًا باستخدام تحليل كراوت كما في F04AEF. يحلُّ البرنامج F04EAF نظامًا خطيًّا واحدًا، حيث المصفوفة حقيقية والثلاثية الأقطار، ويحلُّ F04ASF النظام الذي مصفوفته حقيقية وموجبة التحديد. ويمكن حساب معكوس المصفوفات بالبرنامج F07AJF بعد استخدام F07ADF لأي مصفوفة حقيقية، وبعد استخدام F01ABF إذا كانت المحددة باستخدام F03AAF. ويمكن إيجاد التحليل باستخدام F07ADF لتحليل LU للمصفوفة الحقيقية، وباستخدام F01LEF لتحليل المصفوفة ثلاثية الأقطار. بعد ذلك يمكن حَلُّ الأنظمة الخطية باستخدام F07AEF. ويمكن إيجاد تحليل تشولسكي للمصفوفة موجبة التحديد باستخدام F07FDF، ثم حل النظام الخطي باستخدام F07FEF. إن مكتبة NAG تحوي أيضًا عمليات المصفوفة – المتجه من المستوى الأدنى. للمزيد من المعلومات عن الحلول العددية للأنظمة الخطية والمصفوفات؛ يمكنك الرجوع إلى Van Loan [GV] و Golub، Forsythe and Moler [FM] وStewart [Stew1]. ويمكن الرجوع إلى George and Liu [GL] و Pissanetzky [Pi] اللذين بحثا موضوع الطرائق المباشرة لحلِّ الأنظمة الكبيرة بالتفصيل. أما Coleman and Van Loan [CV] فقد بحثا استخدام LINPACK، BLAS و MATLAB.

الباب

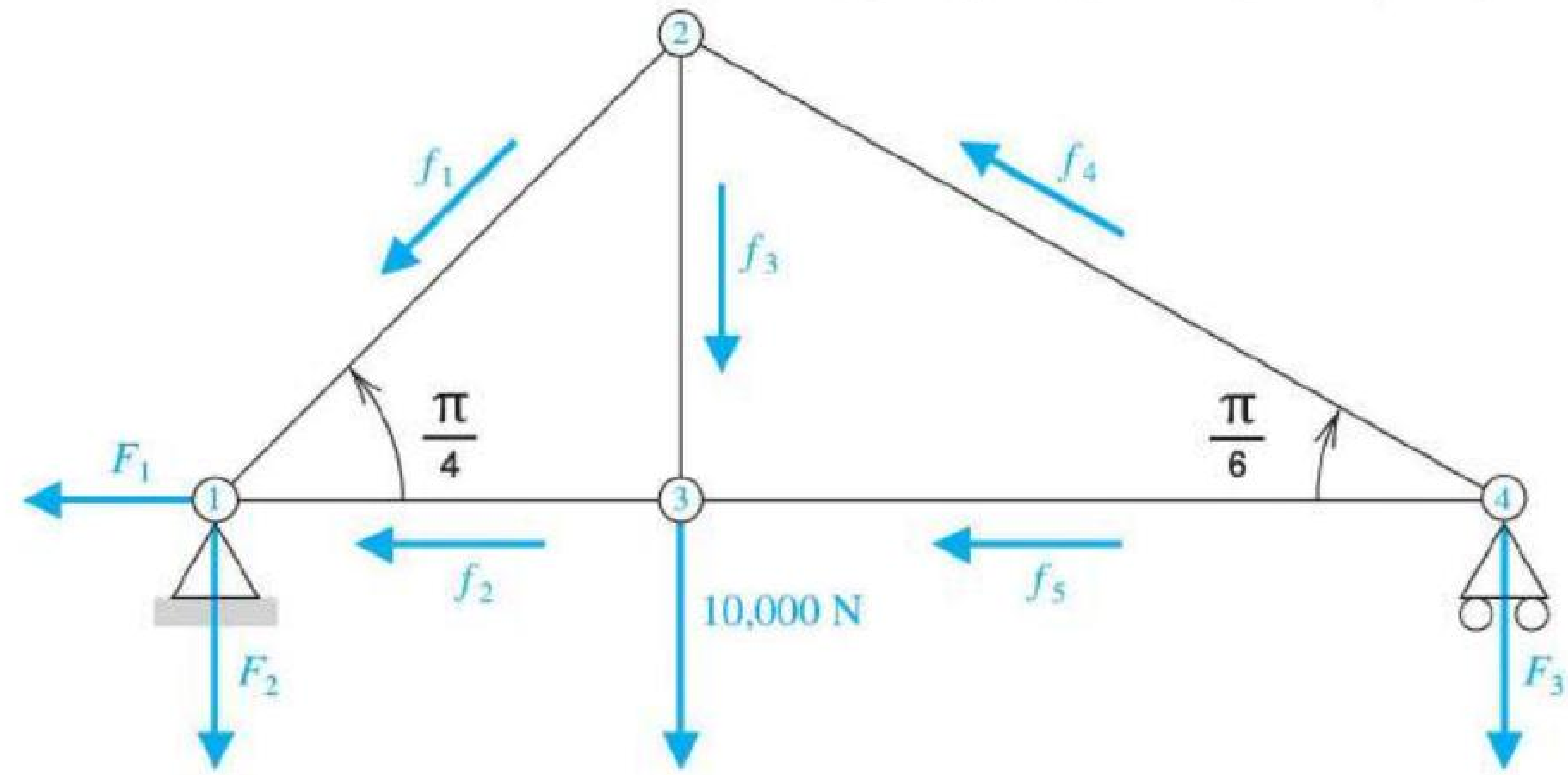
7

أساليب التكرار في جبر المصفوفات
Iterative Techniques in Matrix Algebra

مقدمة

الدعامات عبارة عن إنشاءات قادرة على حمل أحمال ثقيلة. وعند تصميم الجسر تُربَط هذه الدعامات فيما بينها بوصلات مسمارية قابلة للدوران تسمح بتحويل القوى المؤثرة من دعامة إلى أخرى. ويرينا الشكل أدناه دعامة وُضِعت مستقرة عند النقطة الطرفية اليسرى السفلى ①، ويسمح لها بالتحرك أفقيًّا عند النقطة الطرفية اليمنى السفلى ④، ولها وصلات مسمارية عند ④ ③ ② ①. وقد وُضع ثقل زنته 10,000 نيوتن (N) عند المفصل ③ والقوى الناتجة على المفاصل ممثَّلة في f_1، f_2، f_3، f_4 و f_5 كما يبيِّنه الشكل. وتعني الإشارة الموجبة لهذه القوى شدًّا لأجزاء الوصلة المسمارية، أما الإشارة السالبة فتعني ضغطًا عليها.

إن عنصر الدعم المستقر يمكن أن يكون له مركبة قوة أفقية F_1 ومركبة قوة عمودية F_2، حيث إن عنصر الدعم المتحرك له مركبة قوة عمودية F_3 فقط.



إذا كانت الدعامة في حالة توازن مستقر فإن القوى عند أي مفصل يجب إضافتها إلى المتجه الصفري، بحيث يكون مجموع المركبات العمودية والأفقية عند كل مفصل يساوي صفرًا. وهذا ينتج لنا نظام المعادلات المبين في جدول صفحة (418). إن مصفوفة بأبعاد 8×8 توضح هذا النظام بحيث يكون فيها 47 من القيم صفرًا و17 منها فقط ليست صفرًا. وتسمى المصفوفات ذات النسبة العالية من الأصفار متناثرة sparse، ويكون حلُّها غالبًا باستخدام أساليب التكرار بدلًا من المباشرة. وقد تناولنا حلَّ التكرار لهذا النظام في تمرين (28) من فصل (3.7).

المفصل	المركبة الأفقية	المركبة العمودية
①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - f_3 - \frac{1}{2}f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10,000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2}f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2}f_4 - F_3 = 0$

الطرائق التي تناولها الباب السادس استخدمت الأساليب المباشرة في حلّ نظام بحجم $n \times n$ من المعادلات الخطية بصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، وفي هذا الفصل سنتناول طرائق التكرار لحلّ نظام من هذا النوع.

1.7 معايير المتجهات والمصفوفات

Norms of Vectors and Matrices

الثابت عبارة عن عدد حقيقي (أو مركب) ويعبَّر عنه عموما باستخدام حروف إغريقية أو مائلة. المتجهات يعبر عنها باستخدام حروف بارزة (غامقة).

أوضحنا في الباب الثاني أساليب التكرار لإيجاد جذور المعادلات من النوع $f(x) = 0$. ووجدنا تقريبًا أو (تقريبات) ابتدائية، بعدئذ تُحدّد تقريبات جديدة استنادًا إلى جودة التقريب السابق للمعادلة. ولمناقشة طرائق التكرار لحلّ الأنظمة الخطية، فإننا نحتاج أولًا إلى قياس المسافة ما بين متجهات عمود ذات البعد n لتحديد ما إذا كانت متتالية المتجهات تتقارب إلى حل النظام. وفي الواقع تكون الحاجة إلى هذا المعيار عندما يُستخرَج الحل بالطرائق المباشرة المذكورة في الفصل السادس. تتطلب تلك الطرائق الكثير من العمليات الحسابية، وتستخدم حسابات منتهية المواقع بحيث تؤدي إلى تقريب حل حقيقي للنظام فقط. ليمثّل $\mathbb{R}^n$ مجموعة جميع متجهات العمود ذات البعد n مع معاملات بأعداد حقيقية. ولتعريف مسافة ما في $\mathbb{R}^n$ نستخدم تعبير معيار.

تعريف 1.7 إن متجه المعيار على $\mathbb{R}^n$ هو دالة، $\|\cdot\|$، من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ يحقق الخواص الآتية:

أ. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ لـ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ جميعًا.

ب. $\|\mathbf{x}\| = 0$ إذا وفقط إذا $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

ج. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ لـ $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ جميعًا.

د. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ لـ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ جميعًا.

سنحتاج إلى اثنين فقط من المعايير منتهية على $\mathbb{R}^n$ على الرغم من أن معيارًا ثالثًا $\mathbb{R}^n$ عُرِض في تمرين (2). ولما كانت المتجهات في $\mathbb{R}^n$ هي متجهات عمود فإنه من المناسب استخدام صيغة المنقول transpose التي وردت في الفصل (3.6) حينما عُبِّر عن المتجه بدلالة مكوناته. وعلى سبيل المثال فإن المتجه

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

سيُكتَبُ بالصيغة $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

بحذف المعيارين l_2 و l_∞ للمتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ على النحو الآتي

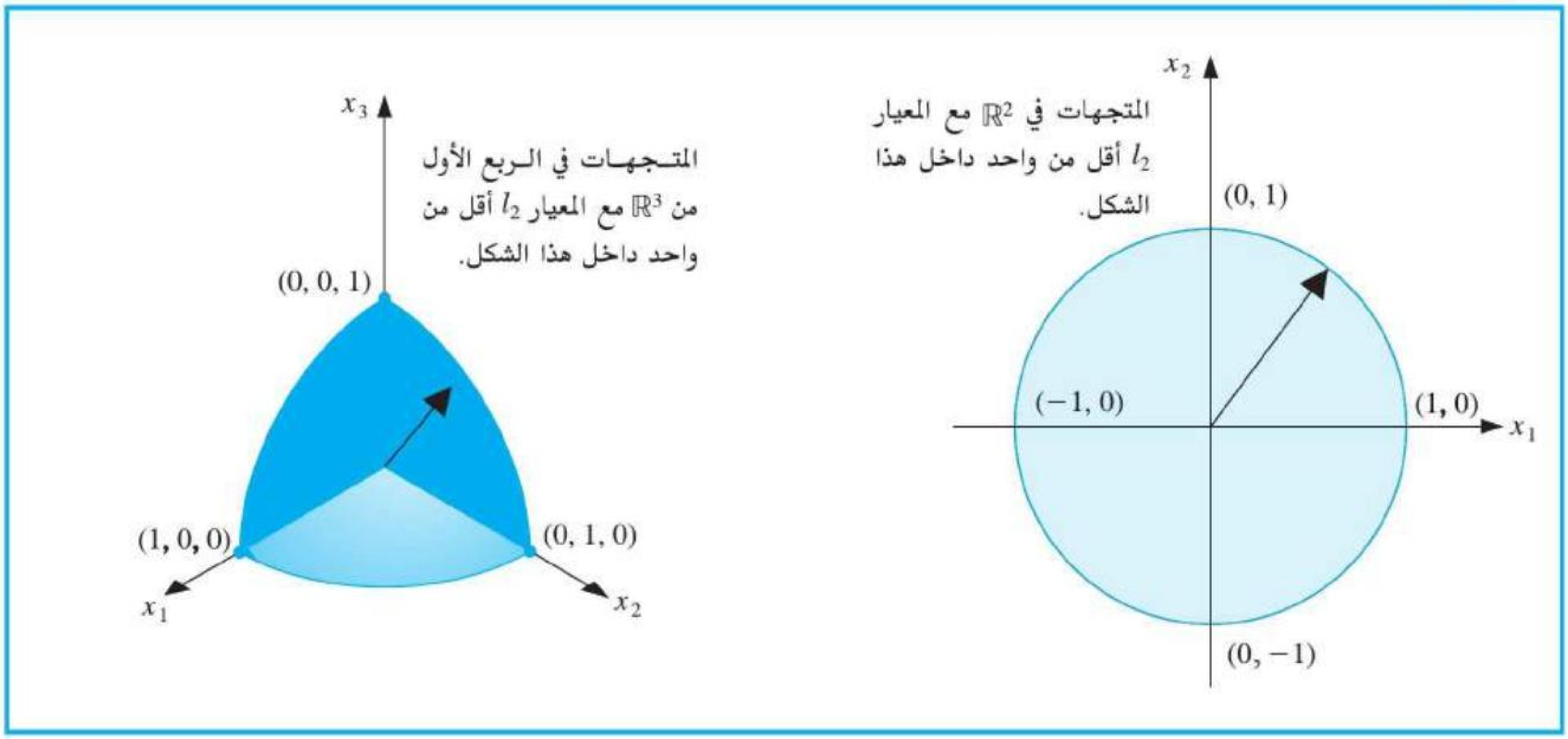
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \quad \text{و} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$ ■

تعريف 2.7

في المسافة المعيارية يعتبر الخط المستقيم أقصر مسافة ما بين نقطتين. وتسمى بالمسافة الإقليدية؛ لأنها تعطينا هندسة إقليدية.

يسمى المعيار l_2 معيارًا إقليديًّا Euclidean norm للمتجه $\mathbf{x}$؛ لأنه يمثّل مفهوم المسافة من نقطة الأصل في حالة كون $\mathbf{x}$ في $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$، $\mathbb{R}^2$، أو $\mathbb{R}^3$. وعلى سبيل المثال فإن معيار l_2 للمتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ يعطي طول الخط المستقيم الواصل ما بين النقطتين $(0, 0, 0)$ و (x_1, x_2, x_3). ويبيّن شكل (1.7) حدود المتجهات في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ التي لها معيار l_2 أقل من 1. وشكل (2.7) هو توضيح مماثل للمعيار l_∞. ■

شكل 1.7



مثال 1

للمتجه $\mathbf{x} = (-1, 1, -2)^t$ في $\mathbb{R}^3$ معايير

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \quad \text{و} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|-1|, |1|, |-2|\} = 2.$$

ومن السهل أن نرى تحقق خصائص تعريف (1.7) لمعيار l_∞؛ لأنها تنبع من نفس النتائج لقيم مطلقة. وعلى سبيل المثال فإذا كان $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ و $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ فإن

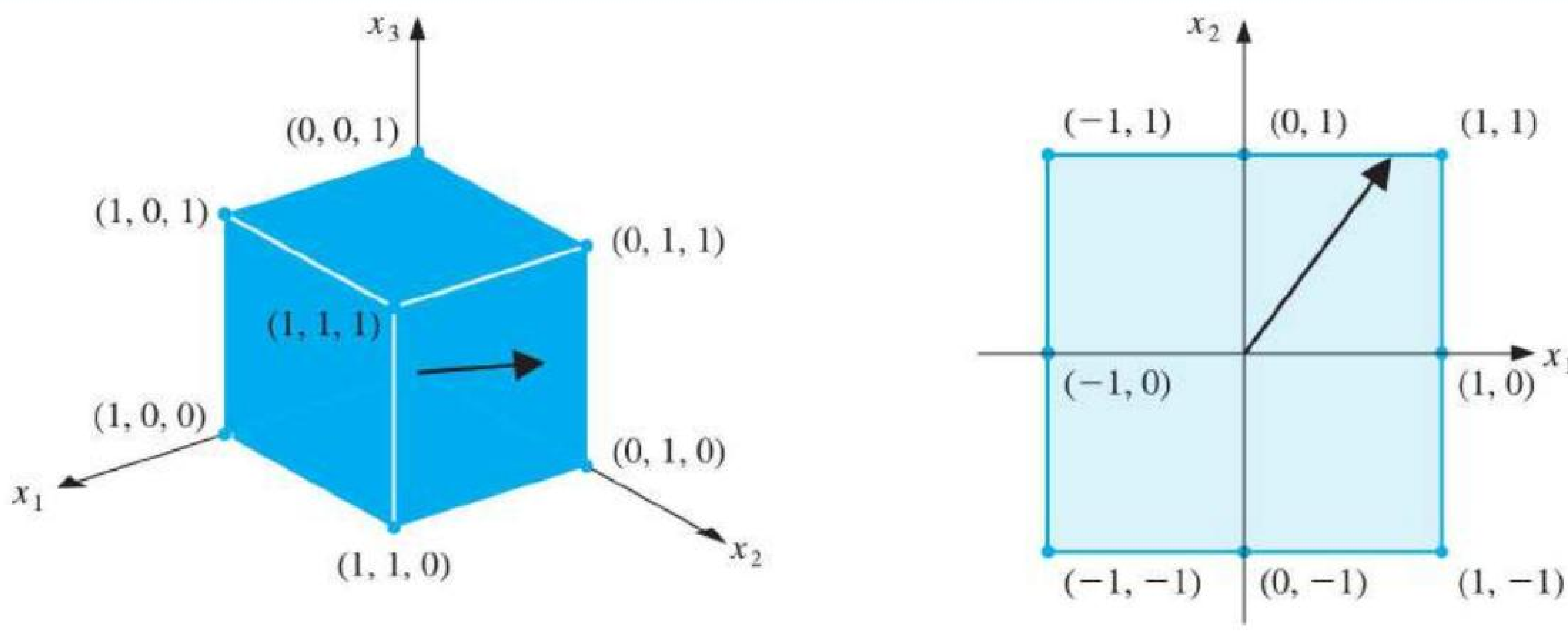
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i + y_i| \le \max_{1\le i\le n} (|x_i| + |y_i|) \le \max_{1\le i\le n} |x_i| + \max_{1\le i\le n} |y_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$$

ولكي نثبت أن

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2 \quad \text{لكلٍّ من} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

فإننا نحتاج إلى المتباينة المشهورة التي تقدمها المبرهنة الآتية.

شكل 2.7



المتجهات في الربع الأول من $\mathbb{R}^3$ مع المعيار l_2 أقل من واحد داخل هذا الشكل.

المتجهات في $\mathbb{R}^2$ مع المعيار l_2 أقل من واحد داخل هذا الشكل.

مبرهنة 3.7 متباينة كوشي – بنياكوفسكي – شيوارتز لعمليات الجمع

Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Inequality for Sums

لكلٍّ من $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ و $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ في $\mathbb{R}^n$، فإن

$$\mathbf{x}^t\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{y}\|_2 \tag{1.7}$$

■

هنالك العديد من الصيغ لهذه المتباينة، ومن ثم العديد من المكتشفين. أوجستيناوس كوشي (1789 – 1857) Augustin Louis Cauchy أوضح هذه المتباينة عام 1821 في *Cours d'Analyse Algébrique* أو كتاب دقيق لحساب التفاضل والتكامل. الصيغة التكاملية للمتباينة ظهرت في عمل فيكتور ياكوفليج بنياكوفسكي (1804 – 1889) Viktor Yakovlevich Bunyakovsky عام 1859. وأن هرمن أماندوس شوارتز (1921 – 1843) Hermann Amandus Schwarz استخدم صيغة تكامل مضاعف لهذه المتباينة عام 1885 بتفاصيل أخرى عن التاريخ يمكن إيجادها في [Stee].

البرهان إذا كان $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ أو $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ فإن النتيجة فورية؛ لأن جانبي المتباينة هما صفر.

افترض $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

و

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{y}\|_2^2$$

ولكون $\|\mathbf{x}\|_2 > 0$ و $\|\mathbf{y}\|_2 > 0$؛ نفترض $\lambda = \|\mathbf{x}\|_2/\|\mathbf{y}\|_2$ لإعطاء

$$\left(2\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{y}\|_2^2}\|\mathbf{y}\|_2^2 = 2\|\mathbf{x}\|_2^2$$

وبذلك

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le 2\|\mathbf{x}\|_2^2 \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = 2\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2$$

ونتيجة لذلك فإن

$$\mathbf{x}^t\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{1/2}$$

■ ■ ■

ويمكن مع هذه النتيجة أن نرى بأنه لكل $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ فإن

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \|\mathbf{x}\|_2^2 + 2\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2^2$$

التي تعطي خاصية المعيار الأخيرة

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_2 \le \left(\|\mathbf{x}\|_2^2 + 2\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2^2\right)^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2$$

ولما كان معيار المتجه يعطي قياسًا للمسافة بين متجه عشوائي والمتجه الصفري، فإن المسافة بين متجهين تعرف بأنها معيار الفرق بين المتجهين.

تعريف 4.7 إذا كان $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ و $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ متجهات في $\mathbb{R}^n$ فإن المسافتين l_2 و l_∞ بين x و y تعرفان على النحو التالي:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i| \quad \text{و} \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right\}^{1/2}$$ ■

مثال 2 للنظام الخطي

$$3.3330x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 = 15913$$
$$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 28.544$$
$$1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 = 8.4254$$

حلّ $(x_1, x_2, x_3)^t = (1, 1, 1)^t$. فإذا طُبّق حذف جاوس Gaussian elimination في حساب تقريب لخمس خانات مستخدمين تمحور العمود الأعظم maximal column pivoting وفقًا للخوارزمية (2.6) فإن الحل سيكون

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^t = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t$$

ومقاييس $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ معطاة من خلال

$$\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = \max\{|1 - 1.2001|, |1 - 0.99991|, |1 - 0.92538|\}$$
$$= \max\{0.2001, 0.00009, 0.07462\} = 0.2001$$

و

$$\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_2 = \left[(1 - 1.2001)^2 + (1 - 0.99991)^2 + (1 - 0.92538)^2\right]^{1/2}$$
$$= [(0.2001)^2 + (0.00009)^2 + (0.07462)^2]^{1/2} = 0.21356$$

وعلى الرغم من كون $\tilde{x}_2$ و $\tilde{x}_3$ تقريبين جيدين لـ x_2 و x_3، فإن المركبة $\tilde{x}_1$ هي تقريب ضعيف لـ x_1 وإن $|x_1 - \tilde{x}_1|$ تهيمن على المعايير. ■

إن مفهوم المسافة في $\mathbb{R}^n$ يستخدم أيضًا في تعريف محدودية متتالية متجهات في هذا الفضاء.

تعريف 5.7 نقول: إن المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ حيث $\mathbf{x}^{(k)}$ متجهات على $\mathbb{R}^n$ تقاربية، وتقترب إلى $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى المعيار $\|\cdot\|$. إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح $N(\varepsilon)$ يحقق

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad k \geq N(\varepsilon)$$ ■

مبرهنة 6.7 نقول: إن المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ حيث متجهات على $\mathbb{R}^n$ تقاربية، وتقارب إلى $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

البرهان افترض أن $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$. إذا كان لأي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح $N(\varepsilon)$ بحيث إن لقيم $k \geq N(\varepsilon)$ جميعها

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i^{(k)} - x_i| = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty < \varepsilon$$

وتؤدي هذه النتيجة إلى أن $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، وبذلك فإن $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل i.

وبالعكس افترض أن $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ عند $\varepsilon > 0$ معلومة، ليمثل $N_i(\varepsilon)$ لكل i عددًا صحيحًا مع خاصية كون $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ متى كان $k \geq N_i(\varepsilon)$.

دعنا نعرف $N(\varepsilon) = \max_{i=1,2,\ldots,n} N_i(\varepsilon)$. فإذا كان $k \geq N(\varepsilon)$ فإن

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i^{(k)} - x_i| = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty < \varepsilon$$

وهذا يؤدي إلى أن $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$. ■ ■ ■

مثال 3 ليكن $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^4$ معرفًا من خلال

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)})^t = \left(1, 2 + \frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k}\sin k\right)^t$$

ولكون

$\lim_{k\to\infty} 1 = 1$، $\lim_{k\to\infty} (2 + 1/k) = 2$، $\lim_{k\to\infty} 3/k^2 = 0$ و $\lim_{k\to\infty} e^{-k}\sin k = 0$ فإن المبرهنة (6.7) تؤدي إلى أن المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى $(1, 2, 0, 0)^t$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$.

وإن المبرهنة المباشرة بأن المتتالية في التمرين (3) تتقارب إلى $(1, 2, 0, 0)^t$ بالنسبة إلى معيار l_2 صعب إلى حد ما، والأسهل من ذلك هو برهنة النتيجة (المبرهنة) التالية وتطبيقها على هذه الحالة الخاصة.

مبرهنة 7.7 لكل $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، يكون

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty$$ ■

البرهان

ليكن x_j عبارة عن إحداثي لـ x بحيث $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| = |x_j|$. وبذلك فإن

$$\|\mathbf{x}\|_\infty^2 = |x_j|^2 = x_j^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2$$

ومن ثم فإن

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \quad \text{و} \quad \|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_j^2 = n x_j^2 = n\|\mathbf{x}\|_\infty^2$$

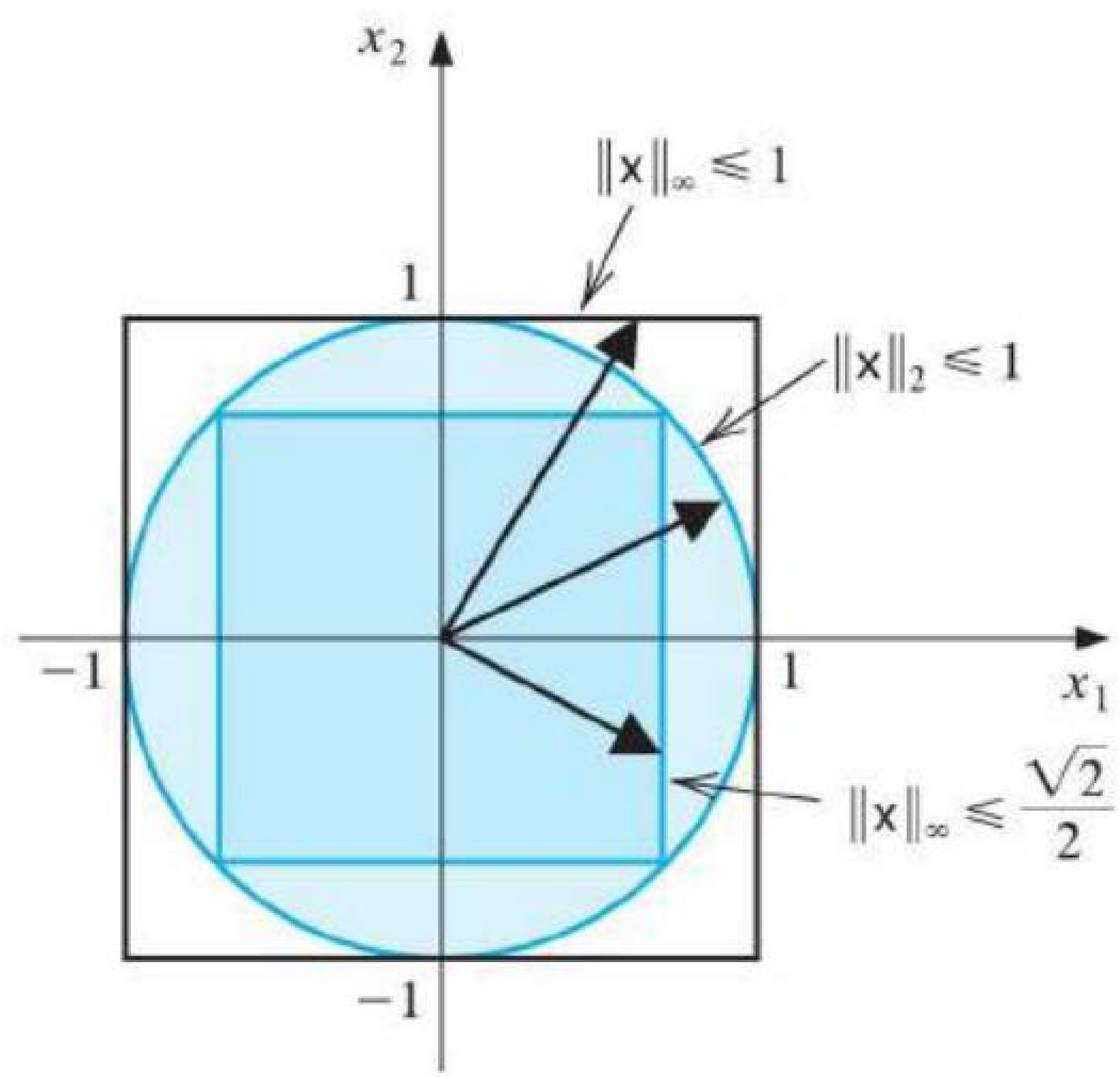
ولذلك يكون

$$\|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty$$

■ ■ ■

ويوضِّح شكل (3.7) هذه النتيجة عندما $n = 2$.

شكل 3.7



مثال 4 وجدنا في مثال (3) أن المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ المعرفة من خلال

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left(1, 2+\frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k}\sin k\right)^t$$

تتقارب إلى $\mathbf{x} = (1, 2, 0, 0)^t$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$. وعند أي $0 < \varepsilon$، نجد عددًا صحيحًا $N(\varepsilon/2)$ مع الخاصية

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

متى كان $k \ge N(\varepsilon/2)$. ومن خلال المبرهنة (7.7) نحصل على

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_2 < \sqrt{4}\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

عندما $k \ge N(\varepsilon/2)$. وبذلك فإن $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى x بالنسبة إلى $\|\cdot\|_2$ أيضًا. ■

ومن الممكن إثبات أن المعايير جميعها على $\mathbb{R}^n$ متكافئة بالنسبة إلى التقارب، بمعنى أنه إذا كان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|'$ يمثِّلان أي اثنين من المعايير على $\mathbb{R}^n$ وأن $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ لها حدود x بالنسبة إلى $\|\cdot\|$ فإن $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ أيضًا لها حدود x بالنسبة إلى $\|\cdot\|'$. ويمكن برهنة هذه الحقيقة للحالة العامة في [Or2.p.8]. وتُستنتج حالة المعيارين $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ من المبرهنة (7.7).

سنحتاج في البنود اللاحقة من هذا الباب والأبواب الأخيرة إلى طرائق لتحديد المسافة بين مصفوفات بحجم $n \times n$. ويتطلب هذا مرة أخرى استخدامًا لمعيار ما.

تعريف 8.7 إن معيار المصفوفة matrix norm على مجموعة من المصفوفات بحجم $n \times n$ عبارة عن دالة بقيمة حقيقية $\|\cdot\|$ معرفة على هذه المجموعة، وهو يحقق لكل من المصفوفتين A و B بحجم $n \times n$ والأعداد الحقيقية α جميعها الخصائص الآتية:

أ. $\|A\| \geq 0$.

ب. $\|A\| = 0$ (إذا وفقط إذا كانت A كانت O، أي مصفوفة مدخلاتها جميعًا أصفار).

ج. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.

د. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

هـ. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. ■

المسافة بين المصفوفتين A و B بحجم $n \times n$ بالنسبة إلى معيار المصفوفة هذا هي $\|A - B\|$.

وعلى الرغم من أن معايير المصفوفة يمكن إيجادها بطرائق مختلفة، إلا أن المعايير الوحيدة التي تهمنا هنا هي تلك التي تكون نتائج طبيعية لمعايير المتجهين l_2 و l_∞. وليس من الصعب إثبات المبرهنة التالية، وقد تركنا برهانها للتمرين (13).

مبرهنة 9.7 إذا كان $\|\cdot\|$ معيارًا متجهًا على $\mathbb{R}^n$ تكون

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

معيار مصفوفة. ■

كل معيار متجه ينتج معيار مصفوفة طبيعيًا يقابله.

ويُسمى هذا معيار مصفوفة طبيعيًا (أو مستحثًّا) natural , or *induced*, matrix norm ومرتبطًا بمعيار متجه. وسنعرض في هذا الكتاب أن معايير المصفوفة جميعها هي معايير مصفوفة طبيعية ما لم يذكر خلاف ذلك.

لأي $z \neq 0$، لدينا $x = z/\|z\|$ يمثِّل متجه الوحدة. ومن ثم فإن

$$\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{z\neq 0} \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right\| = \max_{z\neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$$

ونستطيع بدلًا من ذلك كتابتها

$$\|A\| = \max_{\mathbf{z}\neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} \qquad (7.2)$$

وتظهر النتيجة المباشرة للمبرهنة (9.7) من هذا التعبير لـ $\|A\|$.

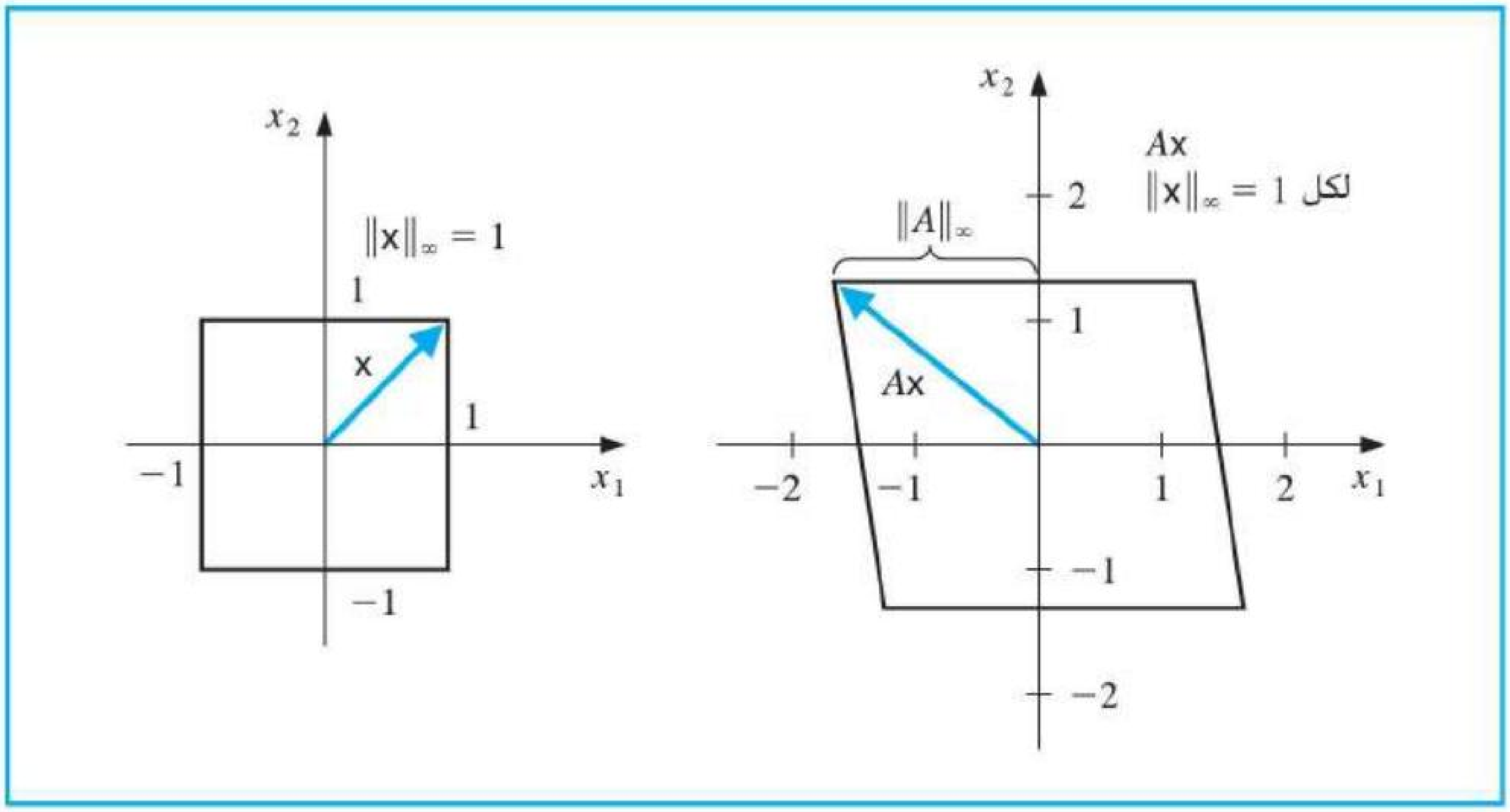
التمهيدية 10.7 لأي متجه $z \neq 0$، مصفوفة A، وأي معيار طبيعي $\|\cdot\|$، يكون لدينا

$$\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$$ ■

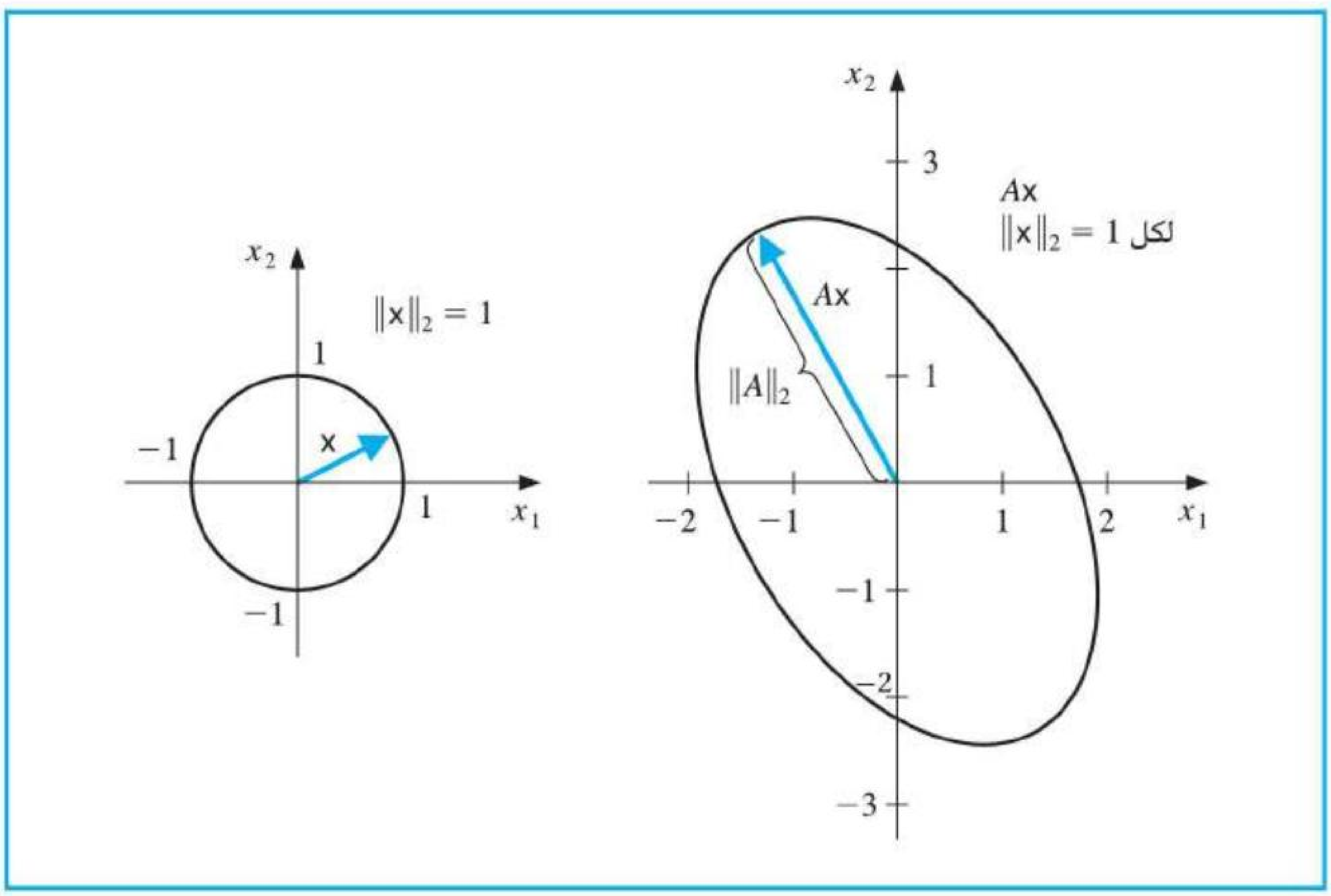
يوضِّح المعيار المعطى لمصفوفة ضمن معيار طبيعي كيف تُوسّع المصفوفة متجهات الباب بالنسبة إلى ذلك المعيار. وتكون التوسعة الكبرى معيارًا للمصفوفة. ومعايير المصفوفة التي نتناولها هنا تكون بالصيغة:

معيار l_∞ هو $\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|A\|_\infty$، ومعيار l_2 هو $\|A\mathbf{x}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\|_2$.

ويوضِّح الشكلان (4.7 و 5.7) هذه المعايير عندما $n = 2$.



شكل 4.7



شكل 5.7

إن معيار l_∞ لمصفوفة ما يمكن حسابه بسهولة من عناصر المصفوفة.

مبرهنة 11.7 إذا كانت $A = (a_{ij})$ عبارة عن مصفوفة بحجم $n \times n$ فإن

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

■

البرهان نثبت أولًا أن $\|A\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. وليكن x متجهًا بحجم n مع $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| = 1$. وبما أن $A\mathbf{x}$ هو أيضًا متجه بحجم n، فإن

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |(A\mathbf{x})_i| = \max_{1\le i\le n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\le j\le n} |x_j|$$

ولكن $\max_{1\le j\le n} |x_j| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 1$، لذا

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

وتكون النتيجة

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (3.7)$$

وسنثبت الآن معكوس المتباينة، أي $\|A\|_\infty \ge \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. ليكن p عددًا صحيحًا مع

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

وأن x متجه بالمكونات

$$x_j = \begin{cases} 1, & a_{pj} \ge 0 \text{ إذا كان} \\ -1, & a_{pj} < 0 \text{ إذا كان} \end{cases}$$

إذن $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ و $a_{pj}x_j = |a_{pj}|$ لكل $j = 1, 2, \ldots, n$، لذا

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \ge \left|\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|\right| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

وتؤدي هذه النتيجة إلى

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \ge \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

التي تعطي مع المتباينة (3.7)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

■ ■ ■

مثال 5 إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |1| + |2| + |-1| = 4, \quad \sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |0| + |3| + |-1| = 4$$

و

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |5| + |-1| + |1| = 7$$

ولذلك $\|A\|_\infty = \max\{4, 4, 7\} = 7$. ■

سنكتشف في الفصل الآتي طريقة بديلة لإيجاد معيار l_2 لمصفوفة ما.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 1.7

1. أوجد $\|\mathbf{x}\|_\infty$ و $\|\mathbf{x}\|_2$ للمتجهات الآتية:

أ. $\mathbf{x} = (3, -4, 0, \frac{3}{2})^t$

ب. $\mathbf{x} = (2, 1, -3, 4)^t$

ج. $\mathbf{x} = (\sin k, \cos k, 2^k)^t$ لقيمة ثابتة للعدد الصحيح الموجب k.

د. $\mathbf{x} = (4/(k+1), 2/k^2, k^2e^{-k})^t$ لقيمة ثابتة للعدد الصحيح الموجب k.

2. أ. تحقَّق من كون الدالة $\|\cdot\|_1$، المعرفة على $\mathbb{R}^n$ من خلال $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ معياراً على $\mathbb{R}^n$.

ب. أوجد $\|\mathbf{x}\|_1$ للمتجه المعطى في التمرين (1).

ج. برهن أنه لـ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، جميعًا يكون $\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_2$.

3. برهن أن المتتاليات الآتية تكون متقاربة، وجد نهاياتها

أ. $\mathbf{x}^{(k)} = (1/k, e^{1-k}, -2/k^2)^t$

ب. $\mathbf{x}^{(k)} = \left(e^{-k}\cos k, k\sin(1/k), 3 + k^{-2}\right)^t$

ج. $\mathbf{x}^{(k)} = (ke^{-k^2}, (\cos k)/k, \sqrt{k^2+k} - k)^t$

د. $\mathbf{x}^{(k)} = (e^{1/k}, (k^2+1)/(1-k^2), (1/k^2)(1+3+5+\cdots+(2k-1)))^t$

4. أوجد $\|\cdot\|_\infty$ للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. في الأنظمة الخطية الآتية $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، حيث يمثِّل $\mathbf{x}$ الحل الحقيقي و $\tilde{\mathbf{x}}$ الحل التقريبي.
احسب $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ و $\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty$.

أ.
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{63}$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{168}$$
$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t$$

ب.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.33, -7.9, 5.8)^t$$

ج.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.2, -7.5, 5.4)^t$$

د.
$$0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06$$
$$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$
$$\mathbf{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t$$

6. إن معيار المصفوفة $\|\cdot\|_1$ المعرف من خلال $\|A\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$، يمكن حسابه باستخدام الصيغة
$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
حيث إن معيار المتجه $\|\cdot\|_1$ معرف في التمرين (2). أوجد $\|\cdot\|_1$ للمصفوفات في التمرين (4).

7. أثبت بمثال أن $\|\cdot\|_{\ominus}$ المعرفة من خلال $\|A\|_{\ominus} = \max_{1\le i,\, j\le n} |a_{ij}|$ لا تعرف معيار مصفوفة.

8. أثبت أن $\|\cdot\|_{①}$ المعرفة من خلال
$$\|A\|_{①} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
هي معيار مصفوفة. أوجد $\|\cdot\|_{①}$ للمصفوفات في التمرين (4).

9. أ. إن معيار Frobenius (وهو ليس معيارًا طبيعيًّا.) يعرف للمصفوفة A بحجم $n \times n$ من خلال
$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$
أثبت أن $\|\cdot\|_F$ هي معيار مصفوفة.

ب. أوجد $\|\cdot\|_F$ للمصفوفات في التمرين (4).

ج. لأي مصفوفة A، أثبت أن $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le n^{1/2}\|A\|_2$.

10. عُرف في التمرين (9) معيار Frobenius للمصفوفة. أثبت أنه لأي مصفوفة بحجم $n \times n$ ومتجه $\mathbf{x}$ في $\mathbb{R}^n$ فإن $\|A\mathbf{x}\|_2 \le \|A\|_F\|\mathbf{x}\|_2$.

11. لتكن S مصفوفة positive definite بحجم $n \times n$. عرف $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}$ لأي $\mathbf{x}$ في $\mathbb{R}^n$، أثبت أن هذا يعرف معيارًا على $\mathbb{R}^n$. [تلميح: استخدم تحليل شولسكي Cholesky factorization لـ S لإثبات أن $\mathbf{x}^t S\mathbf{y} = \mathbf{y}^t S\mathbf{x} \le (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}^t S\mathbf{y})^{1/2}$].

12. لتكن S مصفوفة غير مفردة، وأن $\|\cdot\|$ أي معيار على $\mathbb{R}^n$. عرف $\|\cdot\|'$ من خلال $\|\mathbf{x}\|' = \|S\mathbf{x}\|$. وأثبت أن $\|\cdot\|'$ هو معيار على $\mathbb{R}^n$ أيضًا.

13. برهن أنه إذا كان $\|\cdot\|$ معيارًا متجهًا على $\mathbb{R}^n$ فإن $\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$ هو معيار مصفوفة.

14. الاقتباس الآتي من مجلة الرياضيات *Mathematics Magazine* [Sz] يعطي اتجاهًا بديلًا لبرهنة متباينة Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz Inequality.

أ. أثبت أنه عندما $\mathbf{x} \ne 0$ و $\mathbf{y} \ne 0$ يكون لدينا

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}} - \frac{y_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2}}\right]^2$$

ب.استخدم النتيجة للفقرة (أ) لإثبات أن

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

2.7 القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues And Eingenvectors

يمكن اعتبار مصفوفة من الشكل $n \times m$ على أنها دالة تستخدم عملية ضرب المصفوفات لتحويل المتجهات بحجم m لمتجهات بحجم n. تأخذ المصفوفة التربيعية A متجهات بحجم n لنفسها. وفي هذه الحالة ثمة متجهات غير صفرية معينة x تكون موازية لـAx، الذي يعني وجود ثابت λ مع $A\mathrm{x} = \lambda\,\mathrm{x}$. ولهذه المتجهات يكون لدينا $(A - \lambda I)\mathrm{x} = 0$. وهناك صلة قوية بين هذه الأعداد λ وأرجحية التقارب لطريقة تكرار. وسنأخذ في الحسبان هذه الصلة ضمن هذا الفصل.

تعريف 12.7 إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن كثيرة الحدود المميزة characteristic polynomial لـ A تعرف على النحو الآتي:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$ ■

ليس من الصعب إثبات أن p كثيرة حدود برتبة n (انظر التمرين 11)، ومن ثم فله n من الأصفار المختلفة على الأكثر، وبعضها قد يكون مركبًا complex. فإذا كانت λ صفرًا لـp، فإن $\det(A - \lambda I) = 0$، وتفيد المبرهنة (16.6) بأن النظام الخطي المعرف من خلال $(A - \lambda I)\mathrm{x} = 0$ له حلٌّ مع $\mathrm{x} \neq 0$. نرغب هنا في دراسة الأصفار لـ p والحلول غير الصفرية المقابلة لتلك النظم.

كثيرة حدود التميز هذه لا تصف تماما حالة القيمة المميزة للمصفوفة. وكما سنلاحظ ذلك في مثال (2) من الفصل (2.9).

تعريف 13.7 إذا كانت p كثيرة حدود المميزة للمصفوفة A فإن أصفار p هي القيم المميزة للمصفوفة A، وإذا كانت λ قيمة مميزة لـ A، وأن $\mathrm{x} \neq 0$ يتحقق $(A - \lambda I)\mathrm{x} = 0$، فإن x هي متجه مميز لـ A مقابلة للقيمة المميزة λ. ■

إذا كانت x متجهًا مميزًا مرتبطًا بالقيمة المميزة فإن $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$، ومن ثم فإن المصفوفة A تأخذ المتجه x إلى قيمة مضاعفة لنفسه. فإذا كانت λ حقيقية و $\lambda > 1$ فإن A لها تأثير في توسعة x بعامل λ ، كما يتضح من شكل 6.7 (أ). وإذا كان $0 < \lambda < 1$ فإن A تقلص x بعامل λ. (انظر شكل 7.6 (ب)) وعندما $\lambda < 0$ فإن التأثيرات تكون متشابهة (انظر الشكلين 6.7 (ج)،(د)) على الرغم من أن اتجاه Ax قد عُكِس.

التعبير eigen هو من معنى كلمة ألمانية "to own" والتي تماثل (السمة المميزة) باللغة الإنجليزية كل مصفوفة لها ميزة أو معادلة تميز مع قيم ومتجهات مميزة أو سماتية.

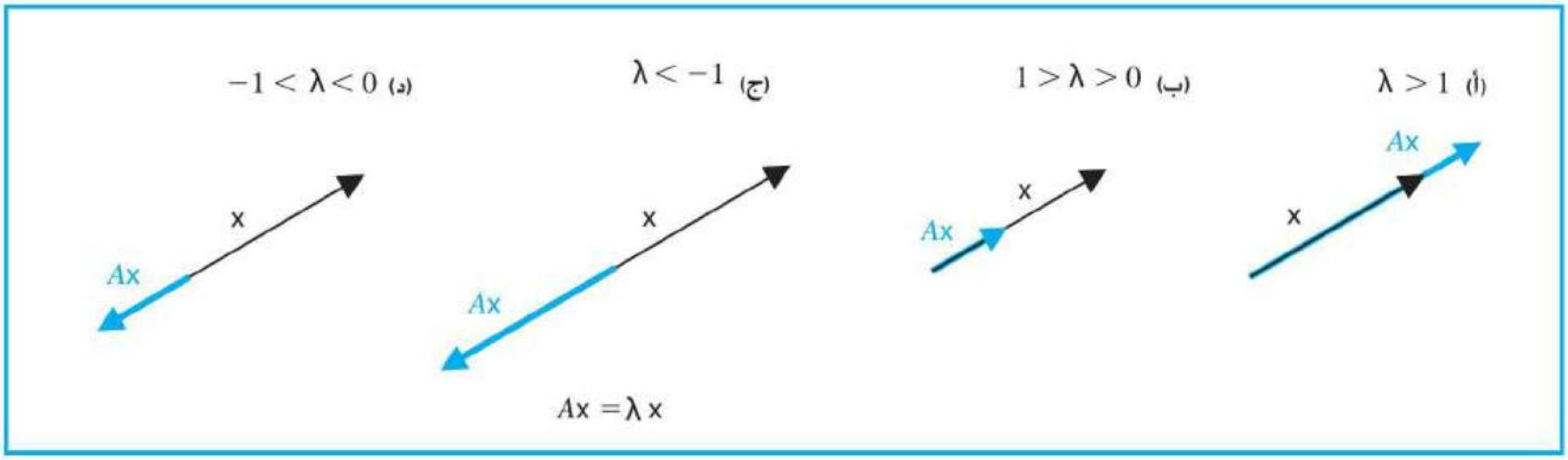
انظر كذلك أنه إذا كان x متجهًا مميزًا لـ A ومرتبطًا بالقيمة المميزة λ، وأن α أي ثابت ليس صفرًا، فإن $\alpha\mathbf{x}$ متجه مميّز أيضًا، لأن

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}) = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}).$$

مثال 1 إن كثيرة حدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

شكل 6.7



هو

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$

ولذلك فإن القيم المميزة لـ A هي $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 2$.

والمتجه المميز $\mathbf{x}_1$ المقابل للقيمة المميزة $\lambda_1 = 3$ عبارة عن حلٍّ للمعادلة $(A - 3 \cdot I)\mathbf{x}_1 = 0$، ومن ثم فإن

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

التي تؤدي إلى $x_1 = 0$ و $x_2 = x_3$.

إن أي قيمة غير الصفر لِـ x_3 تعطي متجهًا مميزًا للقيمة المميزة $\lambda_1 = 3$. وعلى سبيل المثال عندما $x_3 = 1$ يكون لدينا المتجه المميز $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1)^t$. أي متجه مميز لـِ A مقابل $\lambda = 3$ هو مضروب لاصفري لـِ $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1)^t$.

وبالمثل فأي متجه مميز $\mathbf{x} \neq 0$ لـِ A مرتبط مع $\lambda_2 = 2$ هو حلٌّ للنظام $(A - 2 \cdot I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ومن ثم

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وفي هذه الحالة لا بد لمتجه المميز أن يحقِّق المعادلة $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ فقط التي يمكن عملها بطرائق مختلفة. وعلى سبيل المثال عندما $x_1 = 0$ يكون لدينا $x_2 = 2x_3$ ومن ثم فإن أحد الخيارات سيكون $\mathbf{x}_2 = (0, 2, 1)^t$. وبإمكاننا اختيار $x_2 = 0$ أيضًا الذي يتطلب كون $x_1 = -2x_3$. لذلك فإن $\mathbf{x}_3 = (-2, 0, 1)^t$ يعطي المتجه المميز الثاني للقيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ التي لا تكون من مضاعفات $\mathbf{x}_2$. المتجهات المميزة لـِ A والمقترنة بالقيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ تولد سطحًا بالكامل موضحًا من خلال المتجهات جميعها ذات الصيغة

$$\alpha \mathbf{x}_2 + \beta \mathbf{x}_3 = (-2\beta, 2\alpha, \alpha + \beta)^t$$

للثابتين العشوائيين α و β، على ألا يكون أحدهما صفرًا على الأقل. ■

ولما كانت القيم المميزة للمصفوفة عبارة عن أصفار كثيرة حدود، فإنها غالبًا أعداد معقدة complex حتى عندما تكون عناصر المصفوفة كافة أعدادًا حقيقية. وعند حدوث ذلك فإن المتجهات المميزة تتضمن أعدادًا معقدة في بعض مكوناتها أيضًا. ويعطي المثال التالي توضيحًا لذلك.

مثال 2

إن كثيرة حدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هي

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 6\lambda - 4 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$$

القيم المميزة لِـ A هي الحلول لـِ $p(\lambda) = 0$، وهي

$$\lambda_1 = 1 \text{، } \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ و } \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$$

المتجه المميز x_1 لِـ A المقترن مع $\lambda_1 = 1$ هو حل للمعادلة $(A - \lambda_1 I)\mathrm{x} = 0$، وبذلك

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ومن ثم $2x_3 = 0$، $-x_3 = 0$ و $-x_1 + x_2 = 0$

التي تؤدي إلى أن

$x_3 = 0$، $x_2 = x_1$ و x_1 عشوائيًّا.

إن اختيار $x_1 = 1$ يعطي المتجه المميز $\mathrm{x}_1 = (1, 1, 0)^t$ مقترنًا بالقيمة المميزة $\lambda_1 = 1$. ووفقًا لهذا الاختيار، يكون لدينا $\|(1, 1, 0)^t\|_\infty = 1$. فإذا أردنا متجهًا مميزًا بقيمة منتهة في معيار ما آخر، فما علينا سوى الضرب في ثابت مناسب. وعلى سبيل المثال عند ضرب x_1 في المقدار $\sqrt{2}/2$ يعطي المتجه المميز $\hat{\mathrm{x}}_1$ مع معيار l_2 مساوٍ لـِ **1**:

$$\|\hat{\mathrm{x}}_1\|_2 = \left\| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^t \right\|_2 = 1$$

ولما كان λ_2 و λ_3 عددين معقَّدين، فإن المتجهات المميزة المقترنة بها تكون كذلك. ولإيجاد متجه مميز لـِ λ_2، نحلُّ النظام

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-(1+\sqrt{3}i) & 0 & 2 \\ 0 & 1-(1+\sqrt{3}i) & -1 \\ -1 & 1 & 1-(1+\sqrt{3}i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وَحلٌّ واحد لهذا النظام هو المتجه المميز

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i, 1\right)^t$$

وبالمثل فإن المتجه

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}i, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, 1\right)^t$$

هو متجه مميز مقترن بالقيمة المميزة $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$. ■

إنّ الحزمة LinearAlgebra في **Maple** توفر الدالة Eigenvalues لحساب القيم المميزة. الدالة تعطي كلًّا من القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة لها. ولاستخراج نتائج للمصفوفة في مثال (2) ندخل

```
>with(LinearAlgebra);
>A:=Matrix([[1,0,2],[0,1,-1],[-1,1,1]]);
>evalf(Eigenvectors(A));
```

الذي ينتج

$$\begin{bmatrix} 1. + 1.732050808I \\ 1. - 1.732050808I \\ 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. \\ -0.5000000000 & -0.5000000000 & 1. \\ 0.8660254040I & -0.8660254040I & 0. \end{bmatrix}$$

الذي يعطي القيم المميزة

$1 + 1.732050808i$ ، $1 - 1.732050808i$ و 1

مع ما يقابلها من متجهات مميزة معطاة من خلال أعمدة مثل:

$(1, -0.5, 0.8660254040i)^t$ ، $(1, -0.5, 0.8660254040i)^t$ و $(1, 1, 0)^t$

إن مفاهيم القيم المميزة والمتجهات المميزة قُدّمت هنا من أجل حسابات ملائمة خاصة، ولكن هذه المفاهيم تظهر غالبًا في دراسة الأنظمة الفيزيائية. وفي الحقيقة إنها مهمة لرتبة تكفي لتخصيص الباب التاسع لتقريباتها العددية.

تعريف 14.7

نصف القطر الطيفي **spectral radius** $\rho(A)$ للمصفوفة A يُعرف على النحو التالي:

$\rho(A) = \max|\lambda|$ حيث إن λ قيمة مميزة لـ A.

(تذكر أنه عند $\lambda = \alpha + \beta i$ المركبة، يكون لدينا $|\lambda| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$). ■

ونجد أن المصفوفة في مثال (2)

$$\rho(A) = \max\{1, |1 + \sqrt{3}i|, |1 - \sqrt{3}i|\} = \max\{1, 2, 2\} = 2$$

يرتبط نصف القطر الطيفي spectral radius عن قرب بمعيار المصفوفة، كما يظهر في المبرهنة الآتية:

مبرهنة 15.7

إذا كانت A مصفوفة بحجم $n \times n$ فإن

أ. $\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{1/2}$

ب. $\rho(A) \le \|A\|$، لأي معيار طبيعي $\|\cdot\|$. ■

البرهان إن برهان الفقرة (أ) يتطلب معلومات تتعلق بالقيم المميزة أكثر مما هو متوفر لدينا حاليًا. أما التفصيلات المتعلقة بالبرهان فانظر [Or2, p. 21].

ولبرهنة الفقرة (ب)؛ افترض λ قيمة مميزة لـِ A مع متجه مميز x، وأن $\|\mathbf{x}\| = 1$.
(يضمن التمرين (10) وجود مثل هذا المتجه المميز). وبما أن $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ فإن

$$|\lambda| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| = \|\lambda \mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| \le \|A\|\|\mathbf{x}\| = \|A\|$$

ومن ثم فإن

$$\rho(A) = \max |\lambda| \le \|A\|$$ ■ ■ ■

إن الفقرة (أ) من المبرهنة (15.7) تؤدي إلى أنه إذا كان A متماثلاً، فإن $\rho(A) = \|A\|_2$.
(انظر التمرين 14).

ثمة نتيجة مهمة ومفيدة مماثلة للفقرة (ب) من المبرهنة (15.7)، وهي أنه لأي مصفوفة A وأي $\varepsilon > 0$، يوجد معيار طبيعي $\|\cdot\|$ في الخاصية $\rho(A) < \|A\| < \rho(A) + \varepsilon$، ونتيجة لذلك فإن $\rho(A)$ هي أعظم حدٍّ سفلي للمعايير الطبيعية على A، وإن برهان هذه النتيجة يمكن إيجاده في [Or2, p. 23].

مثال 3 إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ولحساب $\rho(A^t A)$، نحتاج إلى القيم المميزة لـِ $A^t A$. وإذا كان

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A^t A - \lambda I) \\ &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 42\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 42) \end{aligned}$$

فإن

$\lambda = 0$ أو $\lambda = 7 \pm \sqrt{7}$

ومن ثم

$$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} = \sqrt{\max\{0, 7-\sqrt{7}, 7+\sqrt{7}\}} = \sqrt{7+\sqrt{7}} \approx 3.106$$ ■

ويمكن تطبيق العمليات في مثال (2) أيضًا باستخدام مكتبة LinearAlgebra في **Maple** مع

```
>with(LinearAlgebra);
>A:=Matrix([[1,1,0],[1,2,1],[-1,1,2]]);
>B:=Transpose(A);
>C:=A.B;
>evalf(Eigenvalues(C));
```

التي تعطي المتجه

$$[0.109767846510^{-8}, 4.354248690, 9.645751311]^t$$

ولأن $\sqrt{\rho(C)} = \sqrt{\rho(A^tA)} = \|A\|_2$، يكون لدينا

$$\|A\|_2 = \sqrt{9.645751311} = 3.105760987$$

وكذلك تحسب مابل **Maple** هذه القيمة مباشرةً بالأمر

```
>evalf(Norm(A,2));
```

ولتحديد المعيار l_∞ لـ A، استبدل الأمر الأخير بـِ

```
>evalf(Norm(A,infinity));
```

في دراسة أساليب المصفوفة التكرارية، يكون مهمًّا معرفة متى تصبح قوة المصفوفة صغيرة (بمعنى متى تقترب العناصر جميعها من الصفر؟). يقال لمصفوفات من هذا النوع"متقاربة *convergent*"

تعريف 16.7 نقول: إن المصفوفة A بحجم $n \times n$ متقاربة إذا كان

$$\lim_{k\to\infty} (A^k)_{ij} = 0 \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{و} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$ ■

مثال 4

ليكن

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ولحساب قوى A، نستخرج

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}، \quad A^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}، \quad A^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

وعمومًا

$$A^k = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^k & 0 \\ \frac{k}{2^{k+1}} & (\frac{1}{2})^k \end{bmatrix}$$

ولأن

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = 0$$

فإن A مصفوفة متقاربة. ■

انظر: المصفوفة المتقاربة A في مثال (3) لها $\rho(A) = \frac{1}{2}$، لكون $\frac{1}{2}$ هي القيمة المميزة الوحيدة لـ A.

هذا يوضح أهمية الربط بين spectral radius للمصفوفة وتقارب المصفوفة، كما هو مفصل في نتيجة المبرهنة الآتية.

مبرهنة 17.7 العبارات الآتية متكافئة:

أ. A عبارة عن مصفوفة متقاربة.

ب. $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ لمعيار طبيعي معين.

ج. $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ للمعاير الطبيعية جميعها.

د. $\rho(A) < 1$

هـ. $\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{x} = 0$ لكل $\mathbf{x}$. ■

يمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في [IK, p. 14].

مجموعة التمارين 2.7 EXERCISE SET

1. احسب القيم المميزة للمصفوفات الآتية والمتجهات المميزة المقترنة بها:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ و. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. احسب القيم المميزة للمصفوفات الآتية والمتجهات المميزة المقترنة بها:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ و. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. أوجد spectral radius لكل مصفوفة في التمرين (1).

4. أوجد spectral radius لكل مصفوفة في التمرين (2).

5. أي من المصفوفات في التمرين (1) متقاربة؟

6. أي من المصفوفات في التمرين (2) متقاربة؟

7. أوجد المعيار $\|\cdot\|_2$ للمصفوفات في التمرين (1).

8. أوجد المعيار $\|\cdot\|_2$ للمصفوفات في التمرين (2).

9. ليكن $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$، أثبت أن A_1 غير متقاربة، ولكن A_2 متقاربة.

10. أثبت أنه إذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A، وأن $\|\cdot\|$ معيار طبيعي، فإن متجهًا مميزًا $\mathbf{x}$ مقترن بـ λ وموجود مع $\|\mathbf{x}\| = 1$.

11. أثبت أن كثيرة حدود المميزة $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ للمصفوفة A بحجم $n \times n$ هي كثيرة حدود من الرتبة n. [إرشاد: وسِّع $\det(A - \lambda I)$ على طول الصف الأول، واستخدم الاستنتاج الرياضي على n.]

12. أ. أثبت أنه إذا كان A مصفوفة بحجم $n \times n$ فإن $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$، حيث إن $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ هي القيم المميزة لـ A. [إرشاد: خذ $p(0)$ في الحسبان].

ب. أثبت أن A مفردة إذا وفقط إذا كانت $\lambda = 0$ هي قيمة مميزة لـ A.

13. لتكن λ قيمة مميزة للمصفوفة A بحجم $n \times n$، وأن $\mathbf{x} \neq 0$ هو المتجه المميز المقابل لها:

أ . أثبت أن λ هي قيمة مميزة لـ A^t أيضًا.

ب. أثبت أن λ^k هي قيمة مميزة لـ A^k مع متجه مميز $\mathbf{x}$ لأي عدد صحيح $k \geq 1$.

ج . أثبت أنه إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $1/\lambda$ قيمة مميزة لـ A^{-1} مع متجه مميز $\mathbf{x}$.

د . ضع تعميمًا للفقرتين (ب) و(ج) لـ $(A^{-1})^k$ ولعدد صحيح $k \geq 2$.

هـ. لنفترض وجود كثيرة حدود $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k$، وتعريف $q(A)$ بأنها المصفوفة $q(A) = q_0 I + q_1 A + \cdots + q_k A^k$. أثبت أن $q(\lambda)$ هي قيمة مميزة لـ $q(A)$ مع متجه مميز $\mathbf{x}$.

و. افترض وجود $\alpha \neq \lambda$. أثبت أنه إذا كانت $A - \alpha I$ غير مفردة، فإن $1/(\lambda - \alpha)$ قيمة مميزة لـ $(A - \alpha I)^{-1}$ مع متجه مميز $\mathbf{x}$.

14. أثبت أنه إذا كانت A متماثلة، فإن $\|A\|_2 = \rho(A)$.

15. افترضنا في التمرين (11) من الفصل (3.6) أن مساهمة أنثى الخنفساء من نوع معين للسنوات المستقبلية يمكن وضعها بصيغة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

حيث يمثِّل العنصر في الصف i، والعمود j المساهمة المحتملة للخنفساء في عمر j في تعداد مجتمع إناث الخنافس في عمر i في السنة التالية.

أ. هل هناك أي قيم مميزة حقيقية للمصفوفة A؟ إذا كانت كذلك فحدِّدها مع ما يقابلها من متجهات مميزة.

ب. إذا احتجنا إلى عينة من هذا النوع لأغراض فحوصات مخبرية تتضمن نسبة ثابتة في كل فئة عمرية من سنة إلى أخرى، فما المعيار الذي يمكن استخدامه مع المجتمع الابتدائي لضمان تحقق هذه المتطلبات؟

16. أوجد مصفوفتين A و B بحيث $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$. (هذا يثبت أن $\rho(A)$ لا يمكن أن يكون معيار مصفوفة.)

17. أثبت أنه إذا كان $\|\cdot\|$ أي معيار طبيعي فإن $(1/\|A^{-1}\|) \leq |\lambda| \leq \|A\|$ لأي قيمة مميزة λ لمصفوفة غير مفردة A.

3.7 استخدام الطرق التكرارية لحلِّ أنظمة خطية

Itreative Techniques For Solving Linear Systems

سنوضِّح في هذا الفصل طرائق Jacobi و Gauss–Seidel للتكرار، وهي طرائق كلاسيكية تعود إلى القرن الثامن عشر. ومن النادر استخدام أساليب التكرر في حلِّ أنظمة خطية صغيرة الأبعاد؛ لأن الوقت المستغرق للحصول على الدقة المطلوبة يفوق ما تتطلبه أساليب أخرى مثل أسلوب تقليص (حذف) Gaussian. وفي الأنظمة الكبيرة مع نسبة عالية من العناصر الصفرية، فهذه الأساليب

كافية من حيث تخزين الحاسوب والحسابات. وتبرز أنظمة من هذا النوع غالبًا في تحليل الدوائر، وفي الحل العددي لمسائل قيمة الحدود والمعادلات التفاضلية الجزئية.

إن أسلوب التكرار لحلِّ نظام خطي $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ بحجم $n \times n$ يبدأ مع تقريب ابتدائي $\mathrm{x}^{(0)}$ للحل x وتوليد متتالية المتجهات $\{\mathrm{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ التي تتقارب إلى x. وتتضمن أساليب التكرار عملية تحويل النظام $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ إلى نظام يعادله بالصيغة $\mathrm{x} = T\mathrm{x} + \mathrm{c}$ لمصفوفة ثابتة T ومتجه c.

وبعد اختيار المتجه الابتدائي $\mathrm{x}^{(0)}$ تتولّد متتالية متجهات الحل التقريبي من خلال حساب

$$\mathrm{x}^{(k)} = T\mathrm{x}^{(k-1)} + \mathrm{c} \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

وتذكرنا النتيجة هذه بتكرار النقطة الثابتة التي دُرست في الباب الثاني.

مثال 1 النظام الخطي $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6\\
E_2 &: \quad -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25\\
E_3 &: \quad 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11\\
E_4 &: \quad 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15
\end{aligned}$$

له حلٌّ وحيد، وهو $\mathrm{x} = (1, 2, -1, 1)^t$. ولقلب $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ إلى الصيغة $\mathrm{x} = T\mathrm{x} + \mathrm{c}$، حُلَّ المعادلة E_i لـ x_i ولكل $i = 1, 2, 3, 4$ لإيجاد

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{10}x_2 - \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{3}{5}\\
x_2 &= \tfrac{1}{11}x_1 + \tfrac{1}{11}x_3 - \tfrac{3}{11}x_4 + \tfrac{25}{11}\\
x_3 &= -\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{10}x_2 + \tfrac{1}{10}x_4 - \tfrac{11}{10}\\
x_4 &= -\tfrac{3}{8}x_2 + \tfrac{1}{8}x_3 + \tfrac{15}{8}
\end{aligned}$$

ولذلك يمكن تكرار كتابة $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ بالصيغة $\mathrm{x} = T\mathrm{x} + \mathrm{c}$ مع

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0\\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10}\\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\\ \frac{25}{11}\\ -\frac{11}{10}\\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

ولتقريب ابتدائي، نضع $\mathrm{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$. ومن ثم فإن $\mathrm{x}^{(1)}$ يُعطى من خلال

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \tfrac{1}{10}x_2^{(0)} - \tfrac{1}{5}x_3^{(0)} + \tfrac{3}{5} = 0.6000\\
x_2^{(1)} &= \tfrac{1}{11}x_1^{(0)} + \tfrac{1}{11}x_3^{(0)} - \tfrac{3}{11}x_4^{(0)} + \tfrac{25}{11} = 2.2727\\
x_3^{(1)} &= -\tfrac{1}{5}x_1^{(0)} + \tfrac{1}{10}x_2^{(0)} + \tfrac{1}{10}x_4^{(0)} - \tfrac{11}{10} = -1.1000\\
x_4^{(1)} &= -\tfrac{3}{8}x_2^{(0)} + \tfrac{1}{8}x_3^{(0)} + \tfrac{15}{8} = 1.8750
\end{aligned}$$

تتولّد تكرارات إضافية مثل $\mathrm{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)})^t$ بالأسلوب نفسه، وهي معروضة في جدول (1.7).

جدول 1.7

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{(k)}$	0.0000	0.6000	1.0473	0.9326	1.0152	0.9890	1.0032	0.9981	1.0006	0.9997	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0000	2.2727	1.7159	2.053	1.9537	2.0114	1.9922	2.0023	1.9987	2.0004	1.9998
$x_3^{(k)}$	0.0000	−1.1000	−0.8052	−1.0493	−0.9681	−1.0103	−0.9945	−1.0020	−0.9990	−1.0004	−0.9998
$x_4^{(k)}$	0.0000	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214	0.9944	1.0036	0.9989	1.0006	0.9998

وقد كان القرار بالتوقف بعد عشر إعادات مبنيًّا على المعيار

$$\frac{\|\mathrm{x}^{(10)} - \mathrm{x}^{(9)}\|_\infty}{\|\mathrm{x}^{(10)}\|_\infty} = \frac{8.0 \times 10^{-4}}{1.9998} < 10^{-3}$$

في الواقع $\|\mathrm{x}^{(10)} - \mathrm{x}\|_\infty = 0.0002$. ■

تسمى طريقة مثال (1) بطريقة جاكوبي للتكرار Jacobi iterative method. وتتضمن حلُّ المعادلة (i) في $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ لـ x_i (بشرط $a_{ii} \neq 0$) لإيجاد

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij} x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

كان كارول جوستاف جاكوب جاكوبي (1804-1851) Carl Gustav Jacob Jacobi قد اشتهر في البداية بعمله في المبرهنة الأعداد ودوال بيضاوية ولكن اهتمامه وقابلياته الرياضية كانت واسعة. وكان لشخصيته القوية تأثير في تأسيس اتجاهات كثيرة كانت بمثابة النواة لتطور الرياضيات في الجامعات الألمانية في القرن التاسع عشر.

وتوليد كل $x_i^{(k)}$ من مركبات $\mathrm{x}^{(k-1)}$ لـ $k \geq 1$ من خلال

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) + b_i}{a_{ii}} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.7)$$

الطريقة مكتوبة بصيغة $\mathrm{x}^{(k)} = T\mathrm{x}^{(k-1)} + \mathrm{c}$ بشطر A إلى جزئيها القطري وخارجه. ولكي نرى ذلك؛ افترض المصفوفة القطرية D، وعناصرها القطرية تلك التي في A، ويمثِّل $-L$ جزء مثلث العناصر السفلي من A، أما $-U$ فيمثِّل جزء مثلث العناصر العلوي من A. ووفقًا لذلك فإن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

تنشطر إلى

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= D - L - U$$

والمعادلة $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ أو $(D - L - U)\mathrm{x} = \mathrm{b}$ بعدئذٍ تتحول إلى

$$D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

وإذا كان D^{-1} موجودًا، بمعنى أنه إذا كان $a_{ii} \neq 0$ لكل i فإن

$$\mathrm{x} = D^{-1}(L + U)\mathrm{x} + D^{-1}\mathrm{b}$$

إن هذه النتائج التي بصيغة مصفوفات أسلوب تكرار جاكوبي هي

$$\mathrm{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\mathrm{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathrm{b}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (5.7)$$

وبوضع $T_j = D^{-1}(L+U)$ و $\mathbf{c}_j = D^{-1}\mathbf{b}$، فإن أسلوب جاكوبي له الصيغة

$$\mathbf{x}^{(k)} = T_j\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}_j \qquad (6.7)$$

وتستخدم المعادلة (4.7) عند تطبيق الحسابات، والمعادلة (6.7) لأغراض المبرهنة.

تنفذ خوارزمية (1.7) أسلوب تكرار جاكوبي.



تكرار جاكوبي Jacobi Iterative

لحلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بوجود تقريب ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$.

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر $1 \le i\ j \le n$ a_{ij} للمصفوفة A، العناصر $b_i, 1 \le i \le n$ لِـ $\mathbf{b}$، العناصر $XO_i, 1 \le i \le n$ لِـ $\mathbf{XO} = \mathbf{x}^{(0)}$، حد السماح TOL، وأكبر عدد من التكرار N.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1,\ldots,\ x_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$.
2	ما دام $(k \le N)$ فطبق الخطوات 3 − 6.
3	عند $i = 1,\ldots,\ n$ ضع $x_i = \dfrac{-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}(a_{ij}XO_j) + b_i}{a_{ii}}$
4	إذا كان $\lVert\mathbf{x} - \mathbf{XO}\rVert < TOL$ فإن المخرجات $(x_1,\ldots,\ x_n)$. (العملية كانت ناجحة.) توقف.
5	ضع $k = k + 1$.
6	عند $i = 1,\ldots,\ n$ ضع $XO_i = x_i$.
7	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

تتطلب الخطوة (3) من الخوارزمية كون $a_{ii} \ne 0$ لكل $i = 1, 2,\ldots,\ n$. وإذا كان واحد من العناصر a_{ii} صفرًا، والنظام ليس مفردًا، فإنه بالإمكان تكرار ترتيب المعادلات بحيث لا نجد فيها $a_{ii} = 0$. ولتعجيل التقارب؛ يجب ترتيب المعادلات بحيث تكون a_{ii} أكبر ما يمكن. سيُناقَش هذا الموضوع بتفاصيل أكثر في آخر هذا الفصل.

وهناك معيار آخر محتمل للتوقف في الخطوة (4)، وذلك باستمرار التكرار حتى يكون

$$\frac{\lVert\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\rVert}{\lVert\mathbf{x}^{(k)}\rVert}$$

أصغر من حدِّ السماح المثبت. ولهذا الغرض؛ يمكن استخدام أي معيار مناسب، وهو عادة معيار l_∞.

ويمكن مشاهدة التطوير الممكن للخوارزمية (1.7) عند تكرار النظر في المعادلة (4.7). إن مركبات $\mathbf{x}^{(k-1)}$ تُستخدم في حساب $x_i^{(k)}$، وحيث إن $x_1^{(k)},\dots,\ x_{i-1}^{(k)}$ عند $i\ >\ 1$ قد حُسبت، وربما توجد تقريبات أحسن للحلول الحقيقية $x_1,\dots,\ x_{i-1}$ مقارنة بـ $x_1^{(k-1)},\dots,\ x_{i-1}^{(k-1)}$، ويبدو لنا أنه من المنطق حساب $x_i^{(k)}$ مستخدمين أحدث هذه القيم المحسوبة، أي أنه يمكننا استخدام

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k-1)}) + b_i}{a_{ii}} \tag{7.7}$$

لكلٍّ من $i = 1, 2,\dots,\ n$ بدلًا من المعادلة (4.7). ويسمى هذا التعديل بأسلوب تكرار جاوس – سيدل Gauss–Seidel iterative technique ويتضح في مثال الآتي:

مثال 2 النظام الخطي المعطى من خلال

$$\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad &= 6\\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25\\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11\\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15
\end{aligned}$$

عمل فيليب لودوك فون سيدل (1821-1896) Philip Ludwig von seidel كمساعد لجاكوبي، يقوم بحلّ مسائل فينظم معادلات خطية ناتجة عن عمل غاوس Gause في المربعات الصغرى. هذه المعادلات عمومًا لها عناصر خارج القطر كانت أصغر كثيرًا من تلك القطرية، وبالتالي كانت طرق التكرار ذات فاعلية بشكل خاص. إن أسلوبي التكرار المعروفين حاليًا بجاكوبي وغاوس – سيدل كانا معروفين بغاوس قبل تطبيقهما على هذه الحالة، ولكن نتائج غاوس لم تكن متداولة بكثرة.

قد حُلّ في مثال (1) بطريقة تكرار جاكوبي. وبدمج المعادلة (7.7) ضمن الخوارزمية (1.7) نحصل على المعادلات التي تُستخدم لكل من $k = 1, 2,\dots$ وهي

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \qquad\qquad \tfrac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \tfrac{1}{5}x_3^{(k-1)} \qquad\qquad + \tfrac{3}{5}\\
x_2^{(k)} &= \tfrac{1}{11}x_1^{(k)} \qquad\qquad + \tfrac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \tfrac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \tfrac{25}{11}\\
x_3^{(k)} &= -\tfrac{1}{5}x_1^{(k)} + \tfrac{1}{10}x_2^{(k)} \qquad\qquad + \tfrac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \tfrac{11}{10}\\
x_4^{(k)} &= \qquad -\tfrac{3}{8}x_2^{(k)} + \tfrac{1}{8}x_3^{(k)} \qquad\qquad + \tfrac{15}{8}
\end{aligned}$$

وبوضع $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$، يمكننا توليد التكرارات في جدول (2.7).

جدول 2.7

5	4	2	3	1	0	k
1.0001	1.0009	1.030	1.0065	0.6000	0.0000	$x_1^{(k)}$
2.0000	2.0003	2.037	2.0036	2.3272	0.0000	$x_2^{(k)}$
− 1.0000	− 1.0003	− 1.014	− 1.0025	− 0.9873	0.0000	$x_3^{(k)}$
1.0000	0.9999	0.9844	0.9983	0.8789	0.0000	$x_4^{(k)}$

ولأن

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(5)}\|_\infty} = \frac{0.0008}{2.000} = 4\times 10^{-4}$$

فإن $\mathbf{x}^{(5)}$ قُبلت بوصفها تقريبًا معقولًا للحل. انظر إلى طريقة جاكوبي في مثال (1) تطلبت ضعف عدد مرات التكرار وبالدقة نفسها. ■

ولكتابة طريقة جاوس – سيدل Gauss–Seidel بصيغة المصفوفة؛ اضرب طرفي المعادلة (7.7) في المقدار a_{ii}، ومن ثم اجمع كل حدود التكرار في الرتبة k لتحصل على

$$a_{i1}x_1^{(k)} + a_{i2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{ii}x_i^{(k)} = - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k-1)} + b_i$$

لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, n$. وبكتابة المعادلات جميعها وعددها n نحصل على

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^{(k)} \qquad\qquad\qquad &= - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1\\
a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} \qquad &= \qquad\qquad - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(k)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_n
\end{aligned}$$

ومع تعريفات D, L, U المعطاة سابقًا، يكون لدينا طريقة Gauss–Seidel الممثَّلة من خلال

أو

$$(D - L)\mathrm{x}^{(k)} = U\mathrm{x}^{(k-1)} + \mathrm{b}$$

$$\mathrm{x}^{(k)} = (D - L)^{-1}U\mathrm{x}^{(k-1)} + (D - L)^{-1}\mathrm{b} \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (8.7)$$

وبوضع $T_g = (D - L)^{-1}U$ و $\mathrm{c}_g = (D - L)^{-1}\mathrm{b}$، فإن صيغة أسلوب Gauss–Seidel تصبح

$$\mathrm{x}^{(k)} = T_g\mathrm{x}^{(k-1)} + \mathrm{c}_g \qquad (9.7)$$

وكي لا تكون مصفوفة المثلث الأدني $D - L$ ($D - L$ **lower-triangle**) مفردة؛ يتحتم بالضرورة كون $a_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

تنفذ خوارزمية (2.7) طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel.



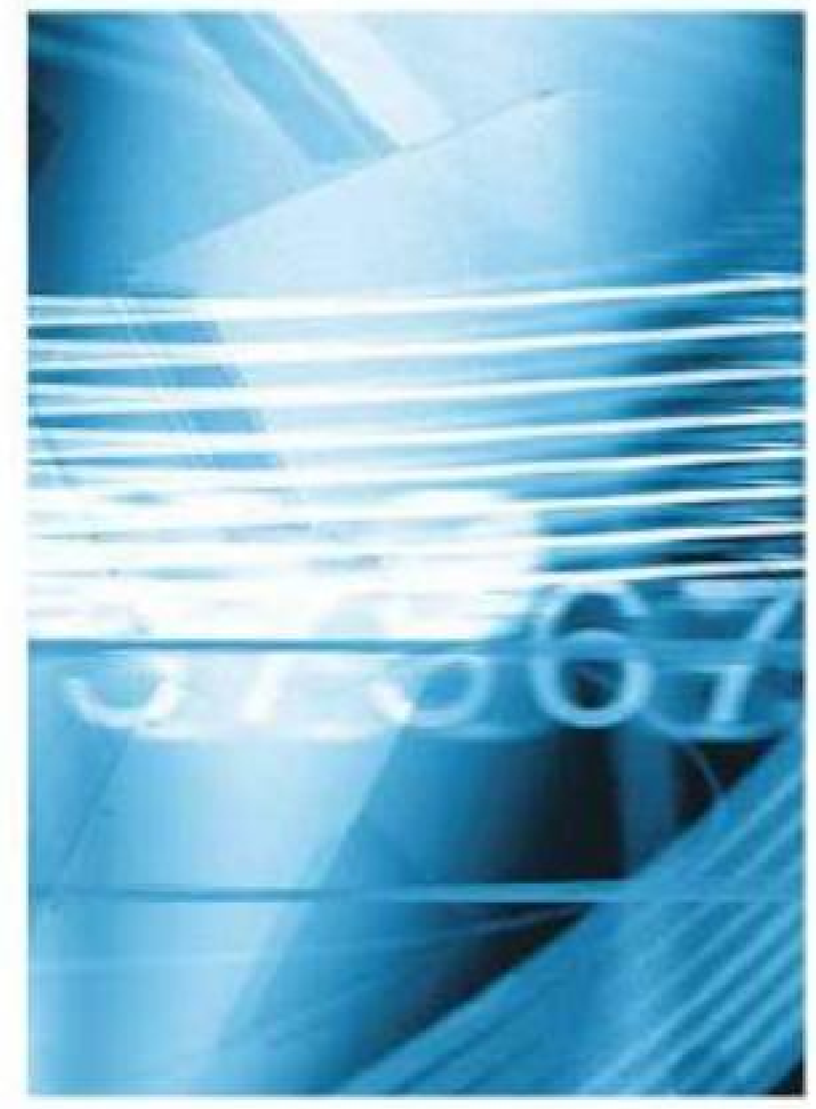
تكرار جاوس – سيدل **Gauss–Seidel Iterative**

لحلِّ $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ بوجود تقريب ابتدائي $\mathrm{x}^{(0)}$.

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر $b_i, 1 \le i \le n$ لِـ b، العناصر $XO_i, 1 \le i \le n$ لِـ $\mathrm{XO} = \mathrm{x}^{(0)}$، حد السماح TOL، وأكبر عدد من التكرار N.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار N قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	ما دام $(k \le N)$ فطبِّق الخطوات 3 – 6.
3	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $x_i = \dfrac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}XO_j + b_i}{a_{ii}}$



4	إذا كان $\|\|x - XO\|\| < TOL$ فإن المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$. (العملية كانت ناجحة). توقف.
5	ضع $k = k + 1$.
6	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $XO_i = x_i$.
7	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

تُطبّق التعليقات التي تتضمنها الخوارزمية (1.7) والمتعلِّقة بتكرار الأمر ومعيار التوقف على خوارزمية Gauss–Seidel (2.7).

إن نتائج مثالين (1) و (2) تشير إلى أن طريقة جاوس – سيدل Gauss–Seidel متفوقة على طريقة جاكوبي، وهذا صحيح دائمًا، ولكن هناك أنظمة خطية نجد معها أن طريقة جاكوبي تتقارب، أما طريقة Gauss–Seidel فليست كذلك. (انظر التمرينين 17 و 18). لدراسة تقارب أساليب التكرار عمومًا؛ دعنا نفترض الصيغة

$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ لكل $k = 1, 2, \ldots,$ حيث إن $x^{(0)}$ عشوائية.

مبرهنة 18.7 إذا كان $\rho(T)$ يحقِّق $\rho(T) < 1$، فإن $(I - T)^{-1}$ موجود وإن

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$$ ■

البرهان بما أن $Tx = \lambda x$ صحيحة عندما تكون λ قيمة مميزة لِـ T بالتحديد، وعندما تكون $\lambda - 1$ تحديدًا قيمة مميزة لـ $(I - T)$، ولكن $|\lambda| \leq \rho(T) < 1$ فإن $\lambda = 1$ ليست قيمة مميزة لِـ T، ولا يمكن أن يكون 0 قيمة مميزة لِـ $I - T$، ولذلك فإن $(I - T)^{-1}$ موجودة.

ليكن $S_m = I + T + T^2 + \cdots + T^m$، لذلك

$$(I - T)S_m = (1 + T + T^2 + \cdots + T^m) - (T + T^2 + \cdots + T^{m+1}) = I - T^{m+1}$$

ولأن T متقاربة، فإن النتيجة في نهاية الفصل (2.7) تؤدي إلى

$$\lim_{m\to\infty} (I - T)S_m = \lim_{m\to\infty} (I - T^{m+1}) = I$$

ولذلك

$$(I - T)^{-1} = \lim_{m\to\infty} S_m = I + T + T^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$$ ■ ■ ■

مبرهنة 19.7 لأي $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$، فإن المتتالية $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة من خلال

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c \quad (\text{لكل } k \geq 1) \tag{10.7}$$

تتقارب إلى الحل الوحيد $x = Tx + c$ إذا وفقط إذا كان $\rho(T) < 1$. ■

البرهان لنفترض أولاً $\rho(T) < 1$، ومن ثم

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= Tx^{(k-1)} + c \\ &= T(Tx^{(k-2)} + c) + c \\ &= T^2x^{(k-2)} + (T + I)c \\ &\vdots \\ &= T^kx^{(0)} + (T^{k-1} + \cdots + T + I)c. \end{aligned}$$

ولأن $\rho(T) < 1$، فإن المصفوفة T متقاربة و

$$\lim_{k\to\infty} T^kx^{(0)} = 0$$

تؤدي المبرهنة 18.7 إلى أن

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} T^kx^{(0)} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right)c = 0 + (I - T)^{-1}c = (I - T)^{-1}c$$

ولذلك فإن المتتالية $\{x^{(k)}\}$ تتقارب إلى المتجه $x \equiv (I - T)^{-1}c$ و $x = Tx + c$.

ولبرهنة الاتجاه العكسي، نثبت أنه لأي $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ لدينا $\lim_{k\to\infty} T^kz = 0$. ووفقًا للالبرهنة (17.7)، فإن هذا مكافئ لـ $\rho(T) < 1$.

ليكن z متجهًا عشوائيًا و x حلاً وحيدًا لـ $x = Tx + c$. عرف $x^{(0)} = x - z$، وأن $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$، لكل $k \geq 1$. ولذلك فإن $\{x^{(k)}\}$ تتقارب إلى x. وأيضًا

$$x - x^{(k)} = (Tx + c) - \left(Tx^{(k-1)} + c\right) = T\left(x - x^{(k-1)}\right)$$

لذلك

$$x - x^{(k)} = T\left(x - x^{(k-1)}\right) = T^2\left(x - x^{(k-2)}\right) = \cdots = T^k\left(x - x^{(0)}\right) = T^kz$$

والنتيجة أن $\lim_{k\to\infty} T^kz = \lim_{k\to\infty} T^k\left(x - x^{(0)}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(x - x^{(k)}\right) = 0$ ولأن $z \in \mathbb{R}^n$ كان عشوائيًا، فإن هذا يؤدي إلى كون T مصفوفة متقاربة وأن $\rho(T) < 1$. ■ ■ ■

برهان التمهيدية التالية يشبه البراهين التي استعملت في التمهيدية 4.2. وقد أخذت بعين الاعتبار في التمرين 21.

تمهيدية 20.7 إذا كان $\|T\| < 1$ لأي معيار مصفوفة طبيعية، و c متجهًا معلومًا فإن المتتالية $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة من خلال $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ تتقارب – لأي $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ – إلى متجه $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ وإن حدود الخطأ الآتية تحقق:

أ. $\|x - x^{(k)}\| \leq \|T\|^k\|x^{(0)} - x\|$

ب. $\|x - x^{(k)}\| \leq \dfrac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$. ■

لقد لاحظنا أن أسلوبي جاكوبي و Gauss–Seidel للتكرار يمكن كتابتهما بالصيغة

$$x^{(k)} = T_gx^{(k-1)} + c_g \quad \text{و} \quad x^{(k)} = T_jx^{(k-1)} + c_j$$

باستخدام المصفوفتين

$T_g = (D - L)^{-1}U$ و $T_j = D^{-1}(L + U)$.

وإذا كانت $\rho(T_j)$ أو $\rho(T_g)$ أقل من 1 فإن المتتالية المقابلة $\{\mathrm{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ستتقارب لحلٍّ x إلى $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$، وعلى سبيل المثال فإن منهجية جاكوبي فيها

$$\mathrm{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\mathrm{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathrm{b}$$

وإذا كانت $\{\mathrm{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب إلى x فإن

$$\mathrm{x} = D^{-1}(L + U)\mathrm{x} + D^{-1}\mathrm{b}$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$D\mathrm{x} = (L + U)\mathrm{x} + \mathrm{b} \quad \text{و} \quad (D - L - U)\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

ولأن $D - L - U = A$، فإن الحل x يحقق $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$.

ويمكننا الآن إعطاء شروط وافية وسهلة التحقق لتقارب طريقتي جاكوبي و Gauss–Seidel. (ولبرهنة التقارب في منهجية جاكوبي؛ انظر التمرين 22 ولمنهجية Gauss–Seidel انظر [Or2, p. 120].)

مبرهنة 21.7 إذا كانت A تتصف حصريًّا بالقطرية فإن كلتا الطريقتين جاكوبي و Gauss–Seidel تعطيان – مقابل أي اختيار لـِ $\mathrm{x}^{(0)}$ – متتالية $\{\mathrm{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب إلى الحل الوحيد لـِ $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. ■

إن علاقة التقارب المتسارع بنصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار T يمكن ملاحظتها من خلال النتيجة (20.7)، وبسبب تحقق المتباينات لأي معيار مصفوفة طبيعية؛ فإننا نستنتج من العبارة ما بعد المبرهنة (15.7) أن

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \approx \rho(T)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\| \tag{11.7}$$

ولذلك؛ يفضل اختيار أسلوب التكرار المتصف بأدنى $\rho(T) < 1$ لنظام منته $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. ونظرًا لعدم ظهور نتائج عامة؛ فليس بوسعنا تحديد أي الأسلوبين جاكوبي أو جاوس–سيدل Gauss–Seidel الأكثر نجاحًا لنظام خطي عشوائي. وفي حالات خاصة يكون الجواب معروفًا كما تناولنا في المبرهنة الآتية، إن برهان هذه النتيجة يمكن إيجاده في [Y, pp. 120–127].

مبرهنة 22.7 ستين – روزنبرغ Stein–Rosenberg

إذا كان $a_{ik} \le 0$ لكل $i \neq k$ و $a_{ii} > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإن واحدة وواحدة فقط من العبارات الآتية تتحقق

أ. $0 \le \rho(T_g) < \rho(T_j) < 1$

ب. $1 < \rho(T_j) < \rho(T_g)$

ج. $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 0$

د. $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 1$ ■

أما الحالة الخاصة التي وُضِّحت في المبرهنة (22.7)، فبالنظر إلى العبارة (أ) أنه عندما تعطي إحدى الطرائق تقاربًا، فإن كلتيهما تعطيان تقاربًا، وأن طريقة Gauss–Seidel تتقارب أسرع من طريقة جاكوبي. وتشير العبارة (ب) إلى أنه عندما تتباعد إحدى الطريقتين فإن كلتيهما

تتباعدان، وأن التباعد يكون أكثر وضوحًا في طريقة Gauss–Seidel.

ولما كان معدل التقارب لعملية ما يعتمد على نصف القطر الطيفي للمصفوفة المرتبطة بالطريقة، فإن هناك طريقًا واحدًا لاختيار عملية تسريع التقارب، وهو اختيار طريقة يكون للمصفوفة المرتبطة بها نصف قطر طيفي. وقبل الدخول في شرح عملية ما لاختيار مثل هذه الطريقة نحتاج إلى تقديم وسائل جديدة لقياس حجم الاختلاف ما بين تقريب الحل لنظام خطي والحل الصحيح للنظام. تستخدم الطريقة المتجه الموضح في تعريف الآتي.

تعريف 23.7 افترض $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ عبارة عن تقريب لحلِّ النظام الخطي المعرف من خلال $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. إن متجه البواقي residual vecto لـ $\tilde{\mathbf{x}}$ بالنسبة إلى هذا النظام هو $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$. ■

الباقي يعني ما تم تركه، وهو اسم مناسب لهذا المتجه.

وفي أساليب مثل طريقة جاكوبي أو Gauss–Seidel، يكون متجه البواقي مرتبطًا بكل عملية حساب لمركبة تقريب إلى متجه الحل. والهدف هو توليد متتالية للتقريبات التي تقرب متجهات البواقي أسرع نحو الصفر. ولنفترض أن

$$\mathbf{r}_i^{(k)} = \left(r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \ldots, r_{ni}^{(k)}\right)^t$$

يمثل متجه البواقي لطريقة Gauss–Seidel المقترن بمتجه الحل التقريبي $\mathbf{x}_i^{(k)}$ المعرف من خلال

$$\mathbf{x}_i^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}\right)^t$$

إن المركبة من رتبة m لـ $\mathbf{r}_i^{(k)}$ هي

$$r_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{mj} x_j^{(k-1)} \qquad (12.7)$$

أو بما يساويها

$$r_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{mj} x_j^{(k-1)} - a_{mi} x_i^{(k-1)}$$

لكل $m = 1, 2, \ldots, n$.

فإن مركبة $\mathbf{r}_i^{(k)}$ من رتبة i خصوصًا تكون

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{(k-1)}$$

وبذلك فإن

$$a_{ii} x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \qquad (13.7)$$

تذكر أنه في طريقة Gauss–Seidel يُختار $x_i^{(k)}$ ليكون

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] \qquad (17.4)$$

ولذلك يمكن تكرار كتابة المعادلة (13.7) بالصيغة

$$a_{ii}x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = a_{ii}x_i^{(k)}$$

والنتيجة أن طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel يمكن تمييزها باختيار $x_i^{(k)}$ لتحقيق

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \tag{15.7}$$

وبالإمكان اشتقاق رابط آخر بين متجهات البواقي وأسلوب جاوس–سيدل Gauss–Seidel. لنفترض أن متجه البواقي $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ مرتبط بالمتجه $\mathbf{x}_{i+1}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})^t$. ووفقًا للمعادلة (12.7)، فإن المركبة من رتبة i لـ $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ هي

$$r_{i,i+1}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k)}$$

تؤدي المعادلة (14.7) إلى أن $r_{i\,i+1}^{(k)} = 0$، بمعنى أن أسلوب Gauss–Seidel يتميز باختيار $x_{i+1}^{(k)}$ بطريقة تكون فيها مركبة $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ من رتبة i صفرًا.

إن اختيار $x_{i+1}^{(k)}$ بحيث يكون أحد إحداثيات متجه البواقي صفرًا ليس بالطريقة الوافية جدًّا لتقليل معيار المتجه $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$، ولو عدلنا أسلوب جاوس–سيدل Gauss–Seidel لما هو معطى في المعادلة (15.7) ليكون

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega\frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \tag{16.7}$$

إزاء اختيارات منتهة لـ ω موجبة، لاستطعنا تقليل معيار متجه البواقي والوصول إلى تقارب أسرع معنويًّا. تسمى الطرائق التي تتضمن المعادلة (16.7) طرائقَ السكون relaxation methods.

وعند اختيارات ω مع $0 < \omega < 1$، فإن العملية تسمى طرائق ما دون السكون under-relaxation methods، ويمكن استخدامها في إيجاد تقارب لبعض الأنظمة التي ليست متقاربة وفقًا لطريقة Gauss–Seidel. وعند اختيارات ω مع $1 < \omega$، فإن العمليات تسمى طرائق ما فوق السكون over-relaxation وتستخدم في تسريع تقارب أنظمة متقاربة وفقًا لطريقة Gauss–Seidel. ويرمز إلى هذه الطرائق بـ SOR اختصارًا لـ Successive Over-Relaxation، وهي مفيدة خاصة في حل الأنظمة الخطية التي تظهر في الحل العددي لمعادلات تفاضلية جزئية معينة.

وقبل شرح إيجابيات طريقة SOR، نلاحظ انه باستخدام المعادلة (13.7)، فإن المعادلة (16.7) يمكن تكرار صياغتها لأغراض حساب

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

ولتحديد مصفوفة طريقة SOR، نعيد كتابة هذه لتكون

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \omega\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k-1)} - \omega\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + \omega b_i$$

وبصيغة المصفوفات يكون لدينا

$$(D-\omega L)\mathbf{x}^{(k)} = [(1-\omega)D + \omega U]\mathbf{x}^{(k-1)} + \omega \mathbf{b}$$

أو

$$\mathbf{x}^{(k)} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]\mathbf{x}^{(k-1)} + \omega(D-\omega L)^{-1}\mathbf{b} \qquad (17.7)$$

وإذا جعلنا $T_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$ و $\mathbf{c}_\omega = \omega(D-\omega L)^{-1}\mathbf{b}$ فإن صيغة أسلوب SOR هي

$$\mathbf{x}^{(k)} = T_\omega \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}_\omega \qquad (18.7)$$

مثال 3 النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 \quad\;\; &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ - x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

له حلٌّ $(3, 4, -5)^t$. إن طريقة Gauss–Seidel وطريقة SOR مع ω=1.25 سوف تستخدم في حلِّ هذا النظام مستخدمين $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ لكلتا الطريقتين. ولكل $k = 1, 2, \ldots$، فإن معادلات طريقة Gauss–Seidel هي

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -0.75x_2^{(k-1)} + 6 \\ x_2^{(k)} &= -0.75x_1^{(k)} + 0.25x_3^{(k-1)} + 7.5 \\ x_3^{(k)} &= 0.25x_2^{(k)} - 6 \end{aligned}$$

ومعادلات طريقة SOR مع ω=1.25 هي

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -0.25x_1^{(k-1)} - 0.9375x_2^{(k-1)} + 7.5 \\ x_2^{(k)} &= -0.9375x_1^{(k)} - 0.25x_2^{(k-1)} + 0.3125x_3^{(k-1)} + 9.375 \\ x_3^{(k)} &= 0.3125x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k-1)} - 7.5 \end{aligned}$$

إن أول سبع إعادات لكل طريقة مدونة في جدولين (3.7) و (4.7). ولكي تكون التكرار دقيقة لسبع خانات عشرية، فإن طريقة Gauss–Seidel تتطلب 34 تكرار مقابل 14 تكرار لطريقة ما فوق السكون مع ω=1.25 . ■

جدول 3.7 جاوس – سيدل

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	5.250000	3.1406250	3.0878906	3.0549316	3.0343323	3.0214577	3.0134110
$x_2^{(k)}$	1	3.812500	3.8828125	3.9267578	3.9542236	3.9713898	3.9821186	3.9888241
$x_3^{(k)}$	1	−5.046875	−5.0292969	−5.0183105	−5.0114441	−5.0071526	−5.0044703	−5.0027940

جدول 4.7 SOR مع ω =1.25

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	6.312500	2.6223145	3.1333027	2.9570512	3.0037211	2.9963276	3.0000498
$x_2^{(k)}$	1	3.5195313	3.9585266	4.0102646	4.0074838	4.0029250	4.0009262	4.0002586
$x_3^{(k)}$	1	−6.6501465	−4.6004238	−5.0966863	−4.9734897	−5.0057135	−4.9982822	−5.0003486

والسؤال التلقائي هنا: كيف تُختار قيمة ω المناسبة؟ وعلى الرغم من عدم معرفة الجواب الكامل لهذا التساؤل بالنسبة إلى نظام خطي برتبة $n \times n$، فإنه يمكن استخدام المبرهنة الآتية في بعض الحالات.

مبرهنة 24.7 كاهان kahan

إذا كان $a_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإن $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$، يؤدي هذا إلى أن طريقة SOR يمكنها التقارب فقط إذا كانت $0 < \omega < 2$.

قد أُخِذ برهان هذه المبرهنة في الحسبان في التمرين (23). وإن برهان النظريتين الآتيتين يمكن إيجاده في [Or2, pp. 123–133]، وسوف يُستخدم في الفصل (12). ■

مبرهنة 25.7 أوستروسكي – ريخ Ostrowski - Reich

إذا كانت A مصفوفة بصفة إيجابي واضح positive definite و $0 < \omega < 2$، فإن طريقة SOR تتقارب لأي اختيار إلى متجه التقريب الابتدائي $x^{(0)}$. ■

مبرهنة 26.7 إذا كانت A مصفوفة بصفة إيجابي واضح positive definite ثلاثية الأقطار فإن $\rho(T_g) = [\rho(T_j)]^2 < 1$ والاختيار الأمثل لـ ω لطريقة SOR هو

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}}$$

ومع اختيار ω، يكون لدينا $\rho(T_\omega) = \omega - 1$. ■

مثال 4 المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$ ■

المعطاة في مثال (3)، هي بصفة إيجابي واضح ثلاثية الأقطار، ولذلك فإن المبرهنة (26.7) تنطبق عليها. وحيث إن

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

يكون لدينا

$$T_j - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -0.75 & 0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -\lambda \end{bmatrix}$$

ولذلك فإن $\det(T_j - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 0.625)$، ومن ثم

$$\rho(T_j) = \sqrt{0.625} \quad \text{و} \quad \omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0.625}} \approx 1.24$$

هذا يوضِّح التقارب السريع الذي وُجد في مثال (1) عند استخدام $\omega = 1.25$. ■



نختم هذا الفصل بالخوارزمية 3.7 لطريقة SOR.

SOR

لحلِّ $Ax = b$ بوجود المتغيرة ω وتقريب ابتدائي $x^{(0)}$؛

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر b_i لـ $1 \le i \le n$، العناصر $XO_i, 1 \le i \le n$ لـ $\mathbf{XO} = \mathbf{x}^{(0)}$، المتغيرة ω، حد السماح TOL، وأكبر عدد من الإعادات N.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	ما دام $(k \le N)$ فطبِّق الخطوات 3 – 6.
3	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $x_i = (1-\omega)XO_i + \dfrac{\omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}XO_j + b_i\right)}{a_{ii}}$
4	إذا كان $\|\mathbf{x} - \mathbf{XO}\| < TOL$ فإن المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$. (العملية كانت ناجحة). توقف.
5	ضع $k = k + 1$
6	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $XO_i = x_i$.
7	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 3.7

1. أوجد أول تكرارين لطريقة جاكوبي للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $x^{(0)} = 0$:

أ.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25, \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ -x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

2. أوجد أول إعادتين لطريقة جاكوبي للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $x^{(0)} = 0$:

أ.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5\\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4\\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 4\\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -4\\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2\\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1\\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0\\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0\\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5\\ - x_2 + 4x_3 &= 0\\ + 4x_4 - x_5 &= 6\\ - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2\\ - x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

3. كرِّر التمرين (1) مستخدمًا طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel.

4. كرِّر التمرين (2) مستخدمًا طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel.

5. استخدم طريقة جاكوبي لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (1)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

6. استخدم طريقة جاكوبي لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (2)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

7. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (1)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

8. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (2)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

9. أوجد أول إعادتين لطريقة SOR مع $\omega = 1.1$ للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $x^{(0)} = 0$:

أ.
$$\begin{aligned} 3x_1 \quad x_2 + x_3 &= 1\\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0\\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9\\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7\\ - 2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6\\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25\\ - 4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11\\ - x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6\\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6\\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6\\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6\\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

10. أوجد أول تكرارين لطريقة SOR مع $\omega = 1.1$ للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $x^{(0)} = 0$:

أ.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5\\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4\\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 4,\\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -4\\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2\\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1\\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0\\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0\\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5\\ - x_2 + 4x_3 &= 0\\ + 4x_4 - x_5 &= 6\\ - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2\\ - x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

11. كرِّر التمرين (9) مستخدمًا $\omega = 1.3$.

12. كرِّر التمرين (10) مستخدمًا $\omega = 1.3$.

13. استخدم طريقة SOR مع $\omega = 1.2$ لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (9) بحد سماح $TOL = 10^{-3}$ في المعيار l_∞.

14. استخدم طريقة SOR مع $\omega = 1.2$ لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (10) بحد سماح $TOL = 10^{-3}$ في المعيار l_∞.

15. حدِّد أيٌّ من المصفوفات في التمرين (9) بصفة إيجابي واضح ثلاثية الأقطار. كرر التمرين (9) لهذه المصفوفات مستخدمًا الاختيار الأمثل لـω.

16. حدِّد أيٌّ من المصفوفات في التمرين (10) بصفة إيجابي واضح ثلاثية الأقطار. كرر التمرين (10) لهذه المصفوفات مستخدمًا الاختيار الأمثل لـω.

17. النظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

له حلّ $(1, 2, -1)^t$.

أ. أثبت أن $\rho(T_j) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

ب. أثبت أن طريقة جاكوبي مع $x^{(0)} = 0$ تفشل في إعطاء تقريب جيد بعد 25 تكرار.

ج. أثبت أن $\rho(T_g) = \frac{1}{2}$.

د. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel مع $x^{(0)} = 0$ لتقريب حلِّ النظام الخطي ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞.

18. النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

له حلّ $(1, 2, -1)^t$.

أ. أثبت أن $\rho(T_j) = 0$.

ب. استخدم طريقة جاكوبي مع $x^{(0)} = 0$ لتقريب حلِّ النظام الخطي ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞.

ج. أثبت أن $\rho(T_g) = 2$.

د. أثبت أن طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel المطبقة في (ب) تفشل في إعطاء تقريب جيد بعد 25 تكرار.

19. النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0.2, \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= -1.425 \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

له حلّ $(0.9, -0.8, 0.7)^t$.

أ. هل معاملات المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ذات طابع قطري؟

ب. احسب نصف القطر الطيفي لمصفوفة جاوس–سيدل Gauss–Seidel، T_g.

ج. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel للتكرار لتقريب حلِّ النظام الخطي بحد سماح 10^{-2} و 300 تكرار بوصفه حدًّا أعلى.

د. ماذا يحدث في (ج) عندما يتغير النظام إلى

$$\begin{aligned} x_1 - \qquad\quad 2x_3 &= 0.2 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + \quad x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= -1.425 \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + \quad x_3 &= 2 \end{aligned}$$

20. كرر التمرين (19) مستخدمًا طريقة جاكوبي.

21. أ. برهن أن $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \le \|T\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|$ و $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \le \dfrac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$ حيث إن T مصفوفة بحجم $n \times n$ مع $\|T\| < 1$ وأن $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ ، $k = 1, 2, \ldots$ مع قيمة عشوائية $\mathbf{x}^{(0}$، $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$، و $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

ب. طبّق الحدود في التمرين (1) كلما كان ذلك ممكنًا مستخدمًا المعيار l_∞.

22. أثبت أنه لو كانت A ذات طابع قطري فإن $\|T_j\|_\infty < 1$.

23. برهن المبرهنة (24.7). [تلميح: إذا كانت $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ قيمًا مميزة لـ T_ω فإن $\det T_\omega = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$، وبما أن $\det D^{-1} = \det(D - \omega L)^{-1}$ ومنتهى حاصل ضرب مصفوفات هو حاصل ضرب منتهات العوامل، فإن النتيجة تظهر من المعادلة (17.7).]

24. افترض وجود هدف عند أي من $n + 1$ من النقاط متساوية الأبعاد $x_0, x_1, \ldots, x_n$. وعندما يكون الهدف عند الموقع x_i، فإنً له الفرصة نفسها للتحرك إلى x_{i-1} أو إلى x_{i+1} دون إمكانية تحركه مباشرةً إلى أي موقع آخر. اعتمد الاحتمالات $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ لهدف ما يبدأ عند الموقع x_i ويصل إلى النقطة اليسرى x_0 قبلً وصوله إلى النقطة اليمنى x_n. ومن الواضح أن $P_0 = 1$ و $P_n = 0$. وبما أن الهدف يمكنه أن يتحرك في اتجاه x_i فقط من x_{i-1} أو x_{i+1} باحتمال مقداره $\frac{1}{2}$ لكلٍّ من هذين الموقعين، فإن $P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

أ. أثبت أن

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب. حُلَّ هذا النظام مستخدمًا $n = 10, 50, 100$.

ج. غيِّر الاحتمال إلى α و $1 - \alpha$ للحركة إلى اليسار واليمين على التوالي، واشتق نظامًا خطيًّا شبيهًا بالذي في (أ).

د. كرِّر (ب) مع $\alpha = \frac{1}{3}$.

25. استخدم الطرائق جميعها القابلة للتطبيق في هذا الفصل في حلِّ النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞، حيث عناصر A هي $j = i$ و $i = 1, 2, \ldots, 16$.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i، & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 80 \\ 0.5i، & \text{حيث } \begin{cases} j = i + 2 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 78 \\ j = i - 2 \text{ و } i = 3, 4, \ldots, 80 \end{cases} \\ 0.25i، & \text{حيث } \begin{cases} j = i + 4 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 76 \\ j = i - 4 \text{ و } i = 5, 6, \ldots, 80 \end{cases} \\ 0، & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و عناصر $\mathbf{b}$ هي $b_i = \pi$ لكل $i = 1, 2, \ldots, 80$.

26. افترض أن A إيجابي واضح:

أ. أثبت أنه يمكننا كتابة $A = D - L - L^t$، حيث إن D قطري مع $d_{ii} > 0$ لكل $1 \le i \le n$ ويمثِّل L المثلث السفلي. وأبعد من هذا، أثبت أن $D - L$ غير مفردة.

ب. ليكن $T_g = (D - L)^{-1}L^t$ و $P = A - T_g^t A T_g$، أثبت أن P متماثل.

ج. أثبت أن T_g يمكن كتابته $T_g = I - (D - L)^{-1}A$ أيضًا.

د. ليكن $Q = (D - L)^{-1}A$؛ أثبت أن $T_g = I - Q$ و $P = Q^t[AQ^{-1} - A + (Q^t)^{-1}A]Q$.

هـ. أثبت أن $P = Q^t D Q$، وأن P إيجابي واضح.

و. لتكن λ قيمة مميزة لـ T_g مع متجه مميز $\mathbf{x} \neq 0$. استخدم الفقرة (ب) في إثبات أن $\mathbf{x}^t P \mathbf{x} > 0$ يؤدي إلى $|\lambda| < 1$.

ز. أثبت أن T_g متقاربة، وبرهن أن طريقة Gauss–Seidel تتقارب.

27. وسّع طريقة البرهان في التمرين (26) إلى طريقة SOR مع $0 < \omega < 2$.

28. تحقق القوى على دعائم الجسر الموضحة في مقدمة هذا الفصل المعادلات في الجدول الآتي:

المفصل	المركبة الأفقية	المركبة العمودية
①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - f_3 - \frac{1}{2}f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10{,}000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2}f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2}f_4 - F_3 = 0$

ويمكن وضع هذا النظام الخطي بصيغة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10{,}000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أ. وضّح لماذا أعيد ترتيب نظام المعادلات.

ب. قرّب حَلَّ النظام الخطي الناتج ضمن 10^{-2} في المعيار l_∞ مستخدمًا كل متجه عناصره الواحدات و(i) طريقة Gauss–Seidel، (ii) طريقة جاكوبي، و (iii) طريقة SOR مع $\omega = 1.25$.

4.7 حدود الخطأ والتنقية الإرجاعية
Error Bounds and Interative Refinement

يبدو الأمر معقولًا بديهيًّا في حال كان $\tilde{x}$ تقريبًا للحلِّ x إلى $Ax = b$، وأن متجه البواقي $r = b - A\tilde{x}$ له خاصية كون $\|r\| = \|b - A\tilde{x}\|$ صغيرًا، فإن $\|x - \tilde{x}\|$ سيكون صغيرًا كذلك. هذه الحالة هي الغالبة، ولكن بعض الأنظمة التي تظهر عادةً في التطبيق تفشل في أن يكون لها مثل هذه الصفة.

مثال 1 النظام الخطي $Ax = b$ الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

له حلٌّ وحيد $x = (1, 1)^t$. التقريب الضعيف $\tilde{x} = (3, 0)^t$ له متجه بواقي

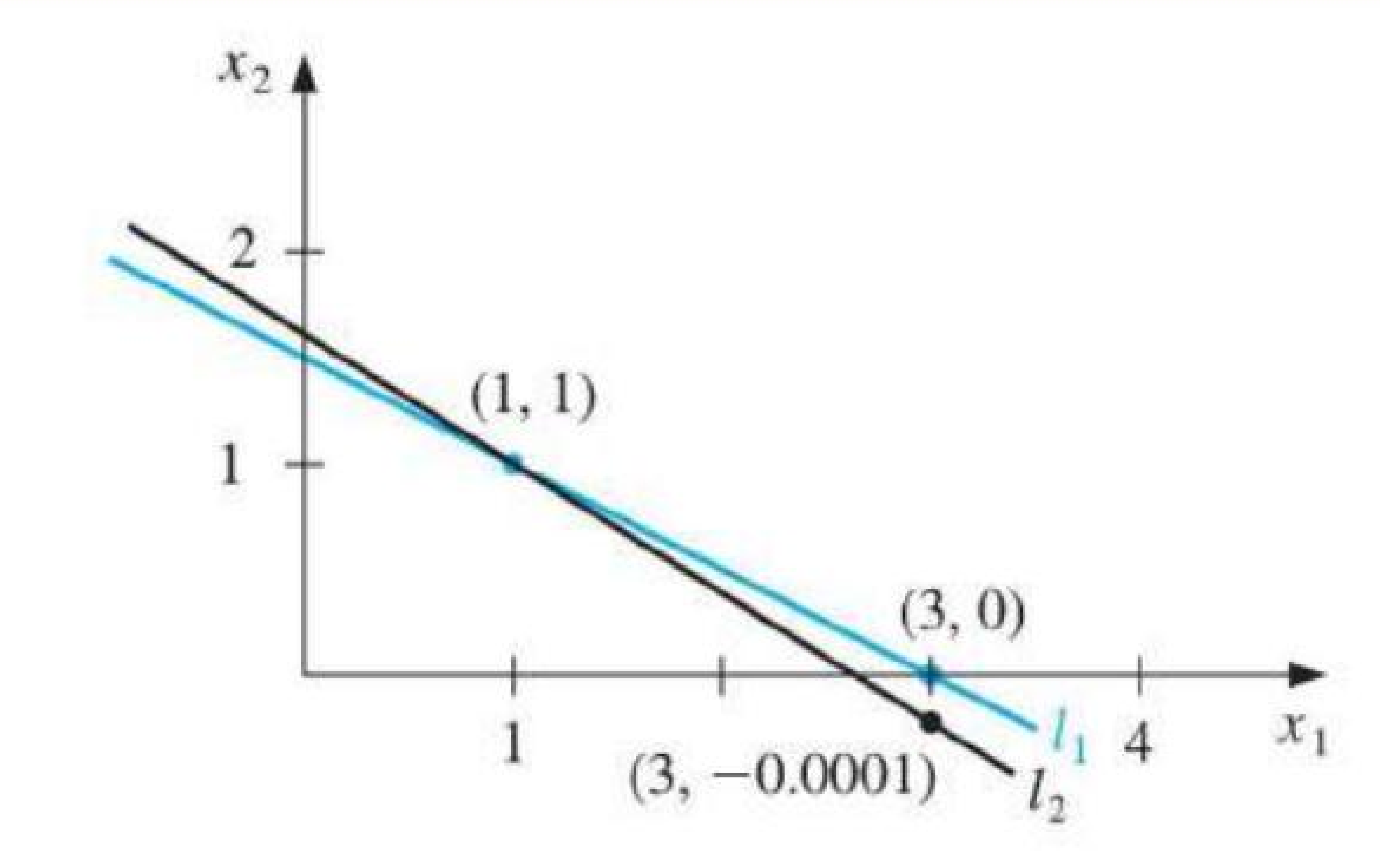
$$r = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0002 \end{bmatrix}$$

ومن ثم $\|r\|_\infty = 0.0002$. ومع كون معيار متجه البواقي صغيرًا، فإن التقريب $\tilde{x} = (3, 0)^t$ سيكون بلا شك صغيرًا نسبيًّا. وفي الحقيقة $\|x - \tilde{x}\|_\infty = 2$. ■

اتضحت الصعوبة في مثال (1) من خلال ملاحظة كون حلِّ النظام يمثِّل تقاطع الخطين $l_1\colon x_1 + 2x_2 = 3$ و $l_2\colon 1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001$.

إن النقطة $(3, 0)$ تقع على l_1، وإن الخطين متوازيان تقريبًا. هذا يؤدي إلى كون $(3, 0)$ قريبة من l_2 أيضًا، على الرغم من أنها تفترق معنويًّا عن حلِّ النظام المعطى من خلال التقاطع $(1, 1)$ (انظر شكل 7.7)

شكل 7.7



بُني مثال (1) بوضوح لإثبات الصعوبات التي يمكن أن تظهر (وإنها في الواقع تظهر). وفي حالة كون الخطين ليسا متطابقين تقريبًا، فإننا نتوقع أن يعطي متجه بواقٍ صغير تقريبًا دقيقًا. لا يمكننا الاعتماد على الصيغة الهندسية للنظام عمومًا لإعطاء مؤشر عن توقيت ظهور المشاكل

ويمكننا إيجاد هذه المعلومة من خلال افتراض معايير المصفوفة A ومعكوسها.

مبرهنة 27.7 افترض أن $\tilde{x}$ هو تقريب لحل $Ax = b$، A مصفوفة غير مفردة و r هو متجه البواقي إلى $\tilde{x}$. ومن ثم فإنه لأي معيار طبيعي ينتج $\|x - \tilde{x}\| \leq \|r\| \cdot \|A^{-1}\|$، وإذا كان $x \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \qquad (19.7)$$ ■

البرهان بما أن $r = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x}$ و A غير مفردة، فإن $x - \tilde{x} = A^{-1}r$. تؤدي المبرهنة (11.7) في الفصل (1.7) إلى أن $\|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$.

والأكثر من ذلك، بما أن $Ax = b$، يكون لدينا $\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$، ولذلك فإن $1/\|x\| \leq \|A\|/\|b\|$

و
$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{\|b\|} \|r\|$$ ■ ■ ■

تؤدي المتباينات في المبرهنة (27.7) إلى أن $\|A^{-1}\|$ و $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ توفران مؤشرًا للربط بين متجه البواقي ودقة التقريب. وإن الخطأ النسبي $\|x - \tilde{x}\|/\|x\|$ ذو أهمية كبيرة عمومًا، ومن خلال المتباينة (19.7) يكون هذا الخطأ منتهيًا بمقدار ضرب $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ في الخطأ النسبي لهذا التقريب $\|r\|/\|b\|$. ويمكن استخدام أي معيار مناسب لهذا التقريب، وإن المتطلب الوحيد هو استخدامه حتى النهاية باستمرار.

مبرهنة 28.7 العدد الشرطي للمصفوفة غير المفردة A بالنسبة إلى معيار ما $\|\cdot\|$ هو
$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. ■

وباستخدام هذا الترميز، فإن المتباينات في المبرهنة (27.7) تصبح

$$\|x - \tilde{x}\| \leq K(A) \frac{\|r\|}{\|A\|} \quad \text{و} \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

ولأي مصفوفة غير مفردة A ومعيار طبيعي $\|\cdot\|$، فإن

$$1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = K(A)$$

المصفوفة A جيدة الاشتراط well-conditioned إذا كانت $K(A)$ قريبة من الواحد، وتكون معلولة الاشتراط عندما تزيد $K(A)$ على الواحد معنويًا. ووفقًا لذلك؛ يشير الاشتراط في هذا الموضوع إلى الاطمئنان نسبيًا بأن متجه بواقٍ صغيرًا يؤدي إلى حل تقريبي دقيق.

مثال 2 مصفوفة النظام المعتمد في مثال (1) كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$$

التي لها $\|A\|_\infty = 3.0001$. وهذا المعيار لا يعد كبيرًا. وعلى أي حال

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{bmatrix} \text{ ومن ثم } \|A^{-1}\|_\infty = 20000$$

وإن $K(A) = (20000)(3.0001) = 60002$ بالنسبة إلى معيار غير محدود. وإن حجم العدد الشرطي لهذا مثال يجب أن يبعدنا عن اتخاذ قرارات متسرعة مبنية على باقي التقريب بالتأكيد.

■

يمكن حساب العدد الشرطي K_∞ في مابل Maple كما يلي:

```
>with(LinearAlgebra);
>A: = Matrix([[1,2],[1.0001,2]]);
>ConditionNumber(A);
```

60002.00000

وعلى الرغم من أن العدد الشرطي لمصفوفة ما يعتمد كليًّا على معايير المصفوفة ومعكوسها فإنه عند التطبيق يكون حساب المعكوس مرتبطًا بخطأ تقريب ومعتمدًا على الدقة التي تُجرى الحسابات وفقًا لها. وإذا كانت العمليات تتضمن حسابات مع دقة ذات t من الخانات، فإن تقريب العدد الشرطي للمصفوفة A هو معيار المصفوفة مضروبًا في معيار التقريب لمعكوسها، الذي وُجِد باستخدام حسابات ذات t من الخانات. ويعتمد هذا العدد الشرطي في الحقيقة على الطريقة المستخدمة لحساب معكوس A أيضًا.

فإذا افترضنا أن الحلَّ التقريبي للنظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يتحدَّد باستخدام حسابات ذات t من الخانات وتقليص جاوس، فمن الممكن إثبات (انظر [FM, pp. 45–47]) أن متجه البواقي $\mathbf{r}$ للتقريب $\tilde{\mathbf{x}}$ يكون له

$$\|\mathbf{r}\| \approx 10^{-t}\|A\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}\| \qquad (20.7)$$

ويمكن من هذا التقريب إيجاد تقدير للعدد الشرطي الفاعل ضمن حسابات ذات t من الخانات، ودون الحاجة إلى عكس المصفوفة A. وفي الواقع يفترض هذا التقريب كون العمليات الحسابية جميعها في أسلوب تقليص جاوس منفّذة باستخدام حساب t من الخانات، ولكن العمليات التي نحن بحاجة إليها لتحديد الباقي تنفّذ بدقة مضاعفة، (أي حساب $2t$ من الخانات). ولا يضيف هذا الأسلوب جهدًا حسابيًّا إضافيًّا، ويتقلص الكثير من فاقد الدقة المحسوبة مع خصم ما يقارب الأعداد نفسها التي تظهر في حساب الباقي.

التقريب إلى العدد الشرطي $K(A)$ ذي t من الخانات يأتي من افتراض النظام الخطي

$$A\mathbf{y} = \mathbf{r}$$

ويمكن تقريب حلِّ هذا النظام مباشرةً؛ لأن عوامل الضرب لطريقة تقليص جاوس قد حُسِبت. وفي الحقيقة $\tilde{\mathbf{y}}$ إن الحل التقريبي إلى $A\mathbf{y} = \mathbf{r}$ يحقق

$$\tilde{\mathbf{y}} \approx A^{-1}\mathbf{r} = A^{-1}(\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}) = A^{-1}\mathbf{b} - A^{-1}A\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}; \qquad (21.7)$$

و $x \approx \tilde{x} + \tilde{y}$

ولذلك فإن $\tilde{y}$ هو تقدير للخطأ الناتج عندما يقرب $\tilde{x}$ الحل x للنظام الأصلي. وتؤدي المعادلتان (20.7) و (21.7) إلى

$$\|\tilde{y}\| \approx \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\| \approx \|A^{-1}\| \left(10^{-t}\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|\right) = 10^{-t}\|\tilde{x}\|K(A)$$

إن هذا يعطي تقريبًا للعدد الشرطي المصاحب لحلّ النظام $Ax = b$ باستخدام تقليص جاوس وحساب نوع t من الخانات الذي يوضح توًّا

$$K(A) \approx \frac{\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\|}10^{t} \qquad (22.7)$$

مثال 3 النظام الخطي الآتي:

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix}$$

له حلٌّ منتهٍ $x = (1, 1, 1)^t$.

يؤدي استخدام تقليص جاوس وحساب تدوير من 5 خانات بشكل متتال إلى الحصول على المصفوفات المزيدة الآتية:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.3330 & 15920 & -10.333 & 15913 \\ 0 & -10596 & 16.501 & 10580 \\ 0 & -7451.4 & 6.5250 & -7444.9 \end{array}\right]$$

و

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.3330 & 15920 & -10.333 & 15913 \\ 0 & -10596 & 16.501 & -10580 \\ 0 & 0 & -5.0790 & -4.7000 \end{array}\right]$$

إن الحلَّ التقريبي لهذا النظام هو

$$\tilde{x} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t.$$

إن متجه البواقي المقترن مع $\tilde{x}$ يُحسب بدقة مضاعفة ليكون

$$\begin{aligned} r &= b - A\tilde{x} \\ &= \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15913.00518 \\ 28.26987086 \\ 8.611560367 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00518 \\ 0.27412914 \\ -0.186160367 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ولذلك فإن

$$\|r\|_\infty = 0.27413$$

إن تقدير العدد الشرطي والمعطى في المناقشة السابقة يوجد من خلال حلِّ النظام $Ay = r$ أولًا

لـ $\tilde{y}$

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00518 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{bmatrix}$$

وهذا يؤدي إلى أن $\tilde{y} = (-0.20008, 8.9987 \times 10^{-5}, 0.074607)^t$. واستخدام التقدير في المعادلة (22.7) يعطي

$$K(A) \approx 10^5 \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} = \frac{10^5(0.20008)}{1.2001} = 16672 \tag{23.7}$$

ولتحديد العدد الشرطي الصحيح لـ A، يجب علينا أولًا إنشاء A^{-1}. وباستخدام حساب تدوير من 5 خانات للحسابات نحصل على التقريب

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.1701 \times 10^{-4} & -1.4983 \times 10^{-1} & 8.5416 \times 10^{-1} \\ 6.2782 \times 10^{-5} & 1.2124 \times 10^{-4} & -3.0662 \times 10^{-4} \\ -8.6631 \times 10^{-5} & 1.3846 \times 10^{-1} & -1.9689 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

تؤدي المبرهنة (11.7) إلى $\|A^{-1}\|_\infty = 1.0041$ و $\|A\|_\infty = 15934$.

وإنشاءً على ذلك، فإن المصفوفة المعلولة الاشتراط A يكون لها

$$K(A) = (1.0041)(15934) = 15999$$

والتقدير في المعادلة (23.7) متقارب إلى حدٍّ ما مع $K(A)$، ويتطلب مجهودًا حسابيًّا أقل كثيرًا. ولما كان الحل الحقيقي $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^t$ لهذا النظام معروفًا، فباستطاعتنا حساب كل من

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \frac{0.2001}{1} = 0.2001 \quad \text{و} \quad \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 0.2001$$

حدود الخطأ المعطى في المبرهنة (27.7) لهذه القيم هي

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \le K(A)\frac{\|\mathbf{r}\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{(15999)(0.27413)}{15934} = 0.27525$$

و

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \le K(A)\frac{\|\mathbf{r}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = \frac{(15999)(0.27413)}{15913} = 0.27561$$

■

استخدمنا في المعادلة (21.7) التقدير $\tilde{y} \approx \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$، حيث إن $\tilde{y}$ هو الحلُّ التقريبي للنظام $A\mathbf{y} = \mathbf{r}$. وعمومًا فإن $\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{y}$ هو تقريب أدقُّ لحلّ النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مقارنة بالتقريب الأصلي $\tilde{\mathbf{x}}$. وتسمى الطريقة التي تستخدم هذا الافتراض التنقية المعادة أو التطوير المعاد، وتتضمن تنفيذ تكرارات على النظام الذي يكون طرفه الأيمن متجه البواقي لتقريبات متتالية إلى أن نحصل على دقة مقبولة. فإذا طبِّقت العملية باستخدام حساب من t من الخانات، وإذا كان $K_\infty(A) \approx 10^q$ فإنه بعد k من تكرارات التنقية المعادة يكون للحل تقريب أصغر بين t و $k(t-q)$ من الخانات الصحيحة. فإذا كان النظام جيد الاشتراط فإن تكرار واحدة أو اثنتين ستشير إلى أن الحل دقيق. وهناك احتمال لتحسين معنوي على الأنظمة معلولة الاشتراط ما لم تكن المصفوفة A معلولة الاشتراط

لرتبة أن $K_\infty(A) > 10^t$. ويجب في تلك الحالة استخدام الدقة العالية بالحسابات. تعرض الخوارزمية (4.7) أسلوب التنقية المعادة.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.7

التنقية الإرجاعية Iterative Refinement

لتقريب حلِّ النظام الخطي $Ax = b$:

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر $b_i, 1 \le i \le n$ لـ b، وأكبر عدد من التكرار N، حد السماح TOL، عدد خانات الدقة t.

المخرجات: الحل التقريبي $xx = (xx_i, \ldots, xx_n)^t$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار تم تجاوزه، وتقريب $COND$ إلى $K_\infty(A)$.

الخطوة	المضمون
0	حلّ النظام $Ax = b$ لـ $x_1, \ldots, x_n$ بطريقة تقليص جاوس وحفظ عوامل الضرب $m_{ji}, j = i+1, i+2, \ldots, n, i = 1, 2, \ldots, n-1$، وملاحظة تبديلات الصفوف.
1	ضع $k = 1$.
2	ما دام $(k \le N)$ فطبق الخطوات 3 − 9.
3	عند $i = 1, 2, \ldots, n$ (احسب r) ضع $r_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ (نفّذ الحسابات بعملية مضاعف الدقة).
4	حلّ النظام $Ay = r$ لـ $x_1, \ldots, x_n$ بطريقة تقليص جاوس وبنفس الترتيب كما في الخطوة 0
5	لكل $i = 1, \ldots, n$ ضع $xx_i = x_i + y_i$.
6	إذا كان $k = 1$ فضع $COND = \frac{\lVert y \rVert_\infty}{\lVert xx \rVert_\infty} 10^t$
7	إذا كان $\lVert x - xx \rVert_\infty < TOL$ فإن المخرجات (xx). المخرجات $(COND)$. (العملية كانت ناجحة). توقف.
8	ضع $k = k + 1$.
9	عند $i = 1, \ldots, n$، ضع $x_i = xx_i$.
10	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). المخرجات $(COND)$ (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

إذا استُخدم حساب ذو t من الخانات فإن عملية التوقف المقترحة في الخطوة (7) تكون لاستمرار التكرار إلى أن يكون $|y_i^{(k)}| \le 10^{-t}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

مثال 4 وجدنا في مثال (3) تقريب المسألة التي تناولناها مستخدمين حسابًا من 5 خانات وتقليص جاوس ليكون

$$\tilde{x}^{(1)} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t$$

وإن حلَّ $Ay = r^{(1)}$ هو

$$\tilde{y}^{(1)} = (-0.20008, 8.9987 \times 10^{-5}, 0.074607)^t$$

ومن خلال الخطوة (5) في هذه الخوارزمية يكون

$$\tilde{x}^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} + \tilde{y}^{(1)} = (1.0000, 1.0000, 0.99999)^t$$

وإن الخطأ الحقيقي في هذا التقريب هو

$$\|x - \tilde{x}^{(2)}\|_\infty = 1 \times 10^{-5}.$$

مستخدمين أسلوب التوقف المقترح للخوارزمية، نحسب $r^{(2)} = b - A\tilde{x}^{(2)}$ ونحلُّ النظام $Ay^{(2)} = r^{(2)}$ الذي يعطي

$$\tilde{y}^{(2)} = (1.5002 \times 10^{-9}, 2.0951 \times 10^{-10}, 1.0000 \times 10^{-5})^t$$

وحيث $\|\tilde{y}^{(2)}\|_\infty \le 10^{-5}$ نستنتج بأن

$$\tilde{x}^{(3)} = \tilde{x}^{(2)} + \tilde{y}^{(2)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)^t$$

صحيح ودقيق بما يكفي. ■

وقد افترضنا في هذا الفصل إمكانية تمثيل A و b في النظام الخطي $Ax = b$ بالضبط. وفي الحقيقة إن العناصر a_{ij} و b_j ستُبدّل أو تشوّش بالمقدارين δa_{ij} و δb_j مسببين حلًّا للنظام الخطي $(A + \delta A)x = b + \delta b$ بدلًا من $Ax = b$. ومن الطبيعي أنه إذا كانت $\|\delta A\|$ و $\|\delta b\|$ صغيرتين (على الترتيب 10^{-t})، فإن حسابًا ذا t من الخانات سيعطي حلًّا $\tilde{x}$، حيث إن $\|x - \tilde{x}\|$ صغيرة في المقابل.

على أي حال فقد لاحظنا في حالة الأنظمة معلولة الاشتراط أنه حتى لو مُثّلت A و b تمثيلًا صحيحًا، فإن أخطاء تقريب يمكن أن تتسبب في كون $\|x - \tilde{x}\|$ كبيرًا. وتنسب المبرهنة التالية تشويشات الأنظمة الخطية إلى العدد الشرطي للمصفوفة. ويمكن إيجاد برهان هذه النتيجة في [Or2, p. 33].

مبرهنة 29.7 لتكن A ليست مفردة، وليكن

$$\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

عندئذ، إن الحلَّ $\tilde{x}$ لـ $(A + \delta A)\tilde{x} = b + \delta b$ يقرب الحل x لـ $Ax = b$ مع تقدير للخطأ

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \frac{K(A)\|A\|}{\|A\| - K(A)\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right) \qquad (24.7)$$

■

كان جيمس هاردي ولكنسون (1919 - 1986) James Hardy Wilkinson معروفًا بعمله الواسع في الطرائق العددية لحلّ نظم المعادلات الخطية ومسائل القيم المميزة. وقد طوّر أيضًا أسلوب الجبر الخطي العددي لتحليل الخطأ الإرجاعي.

والتقدير في المتباينة (24.7) ينص على أنه إذا كانت المصفوفة A جيدة الاشتراط (بمعنى أن $K(A)$ ليست كبيرة جدًّا) فإن تغييرات صغيرة في A و b تُنتج في المقابل تغييرات صغيرة في الحل x. ومن ناحيةٍ أخرى إذا كانت المصفوفة A معلولة الاشتراط فإن تغييرات صغيرة في A و b قد تنتج تغييرات كبيرة في x.

المبرهنة مستقلة عن العملية العددية المنتهية التي استخدمت في حلّ $Ax = b$. ويمكن من خلال وسائل تحليل الخطأ الإرجاعي (انظر [Wil1] أو [Wil2]) إثبات أنه إذا استُخدِم تقليص جاوس مع تمحور لحل $Ax = b$ في حساب t من الخانات فإن الحلَّ العددي $\tilde{x}$ هو الحلُّ الحقيقي للنظام الخطي

$$(A + \delta A)\tilde{x} = b \quad \text{عندما} \quad \|\delta A\|_\infty \le f(n)10^{1-t}\max_{i,j,k}|a_{ij}^{(k)}|$$

وجد ولكنسون عند التطبيق أن $f(n) \approx n$، وفي أسوأ الأحوال $f(n) \le 1.01(n^3 + 3n^2)$.

مجموعة التمارين 4.7 EXERCISE SET

1. احسب الأعداد الشرطية للمصفوفات الآتية بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$:

أ. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 5.550 & 321.8 \end{bmatrix}$

2. احسب الأعداد الشرطية للمصفوفات الآتية بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$:

أ. $\begin{bmatrix} 0.03 & 58.9 \\ 5.31 & -6.10 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 58.9 & 0.03 \\ -6.10 & 5.31 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 0.04 & 0.01 & -0.01 \\ 0.2 & 0.5 & -0.2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. للأنظمة الخطية الآتية $Ax = b$ حلٌّ حقيقي x وحلّ تقريبي $\tilde{x}$، مستخدمًا نتائج التمرين (1) احسب:

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \quad \text{و} \quad K_\infty(A)\frac{\|b - A\tilde{x}\|_\infty}{\|A\|_\infty}$$

أ.

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 = \tfrac{1}{63}$$
$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 = \tfrac{1}{168}$$
$$\mathbf{x} = \left(\tfrac{1}{7}, -\tfrac{1}{6}\right)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t$$

ب.

$$3.9x_1 + 1.6x_2 = 5.5$$
$$6.8x_1 + 2.9x_2 = 9.7$$
$$\mathbf{x} = (1, 1)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.98, 1.1)^t$$

ج. $x_1 + 2x_2 = 3$
$1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001$
$\mathrm{x} = (1, 1)^t$
$\tilde{\mathrm{x}} = (0.96, 1.02)^t$

د. $1.003x_1 + 58.09x_2 = 68.12$
$5.550x_1 + 321.8x_2 = 377.3$
$\mathrm{x} = (10, 1)^t$
$\tilde{\mathrm{x}} = (-10, 1)^t$

4. للأنظمة الخطية الآتية $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ حلّ حقيقي x وحلّ تقريبي $\tilde{\mathrm{x}}$، مستخدمًا نتائج التمرين (2) احسب:

$$\|\mathrm{x} - \tilde{\mathrm{x}}\|_\infty \quad \text{و} \quad K_\infty(A)\frac{\|\mathrm{b} - A\tilde{\mathrm{x}}\|_\infty}{\|A\|_\infty}$$

أ. $58.9x_1 + 0.03x_2 = 59.2$
$-6.10x_1 + 5.31x_2 = 47.0$
$\mathrm{x} = (1, 10)^t$
$\tilde{\mathrm{x}} = (1.02, 9.98)^t$

ب. $0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2$
$5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0$
$\mathrm{x} = (10, 1)^t$
$\tilde{\mathrm{x}} = (30.0, 0.990)^t$

ج. $0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06$
$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$
$\mathrm{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t$
$\tilde{\mathrm{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t$

د. $x_1 - x_2 - x_3 = 2\pi$
$x_2 - x_3 = 0$
$-x_3 = \pi$
$\mathrm{x} = (0, -\pi, -\pi)^t$
$\tilde{\mathrm{x}} = (-0.1, -3.15, -3.14)^t$

5. (i) أولاً: استخدم تقليص جاوس وحساب تدوير من 3 خانات لتقريب حلول الأنظمة الخطية الآتية، (ii) ثم استخدم تكرار واحدة من التنقية المعادة لتحسين التقريب، وقارن التقريبات بالحلول الحقيقية:

أ. $0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2$
$5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0$
الحل الحقيقي $(10, 1)^t$

ب. $3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 7953$
$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 0.965$
$-1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 = 2.714$
الحل الحقيقي $(1, 0.5, -1)^t$

ج. $1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 = 1.12$
$14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 = 3.44$
$100x_2 - 99.9x_3 + x_4 = 2.15$
$15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 = 4.16$
الحل الحقيقي $(0.17682530, 0.01269269, -0.02065405, -1.18260870)^t$

د. $\pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 = \sqrt{11}$
$\pi^2 x_1 + ex_2 - e^2x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 0$
$\sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 = \pi$
$\pi^3 x_1 + e^2x_2 - \sqrt{7}x_3 + \frac{1}{9}x_4 = \sqrt{2}$
الحل الحقيقي $(0.78839378, -3.12541367, 0.16759660, 4.55700252)^t$

6. كرر التمرين (5) مستخدمًا حساب تدوير من 4 خانات.

7. النظام الخطي $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

له حل $(1, 1)^t$. غيّر A قليلاً إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}$$

وافترض النظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

احسب الحلَّ الجديد مستخدمًا حساب تدوير من 5 خانات، وقارن الخطأ الحقيقي بالتقدير (24.7)، هل A معلولة الاشتراط؟

8. النظام الخطي $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.00001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.00001 \end{bmatrix}$$

له حلّ $(1, 1)^t$. استخدم حساب تدوير من 7 خانات لإيجاد حلِّ النظام المشوش

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.000011 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.00001 \\ 3.00003 \end{bmatrix}$$

وقارن الخطأ الحقيقي بالتقدير (24.7). هل A معلولة الاشتراط؟

9. أثبت أنه إذا كانت B مفردة فإن

$$\frac{1}{K(A)} \le \frac{\|A - B\|}{\|A\|}$$

[تلميح: ينبغي وجود متجه مع $\|\mathrm{x}\| = 1$، بحيث $B\mathrm{x} = 0$. اشتق التقدير مستخدمًا $\|A\mathrm{x}\| \ge \|\mathrm{x}\|/\|A^{-1}\|$.]

10. مستخدمًا التمرين (9)، قدِّر الأرقام الشرطية للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$

11. إن مصفوفة هلبرت $n \times n$ *Hilbert matrix* $H^{(n)}$ تعرف من خلال

$$H_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i + j - 1}, \quad 1 \le i, j \le n$$

هي مصفوفة معلولة الاشتراط تظهر عند حلِّ المعادلات الطبيعية لمعاملات كثيرة حدود المربعات الصغرى. (انظر مثال (1) في الفصل 2.8)

أ. أثبت أن

$$[H^{(4)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

واحسب $K_\infty(H^{(4)})$.

ب. أثبت أن

$$[H^{(5)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix}$$

واحسب $K_\infty(H^{(5)})$.

ج. حُلَّ النظام الخطي

$$H^{(4)}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مستخدمًا حساب تدوير من 5 خانات، وقارن الخطأ الحقيقي بالمقدر في المعادلة (24.7).

12. استخدم حساب تدوير من 4 خانات لحساب المعكوس H^{-1} لمصفوفة هلبرت H بحجم 3×3، ومن ثم احسب $\hat{H} = (H^{-1})^{-1}$. حدِّد $\|H - \hat{H}\|_\infty$.

5.7 طريقة الميل المرافق
The Conjugate Gradient Method

ماكنس هستنس (1906 –1991) Magnus Hastens إدوارد ستيفل Edward Stiefel نشرا الورقة الأصلية لطريقة التدرج المتقارن عام 1952 عندما كانا يعملان في معهد التحليل العددي بجامعة كاليفورنيا / لوس أنجلس UCLA.

إن طريقة الميل المرافق المنسوبة إلى Hestenes and Stiefel [HS] تطوَّرت في الأصل، لكونها طريقة مباشرة مصمَّمة لحلِّ نظام خطي إيجابي واضح بحجم $n \times n$. وبطريقة مباشرة فإنها عمومًا بخانة أدنى من تقليص جاوس مع تمحور لكون كلا الطريقتين تتطلب n من الخطوات لتحديد الحل، وإن خطوات طريقة الميل المرافق ذات تكلفة حسابية أكثر من تلك التي في طريقة جاوس للحذف.

ومع ذلك فإن طريقة الميل المرافق مفيدة جدًا عند استخدامها بوصفها طريقة تقريب بالتكرار لحلِّ أنظمة كبيرة متفرعة مع عناصر غير صفرية تظهر في أنماط تنبؤية. وعندما يعاد اشتراط المصفوفة لجعل الحسابات أكثر فاعلية، فإن نتائج جيدة تظهر خلال $\sqrt{n}$ من الخطوات تقريبًا. وإن تطبيق هذه الطريقة بهذا الأسلوب يجعلها مفضلة على طريقة تقليص جاوس للحذف وطرائق التكرار التي سبق مناقشتها.

وخلال هذا الفصل نفترض أن المصفوفة A موجبة التحديد. وسوف نستخدم تعبير الضرب الداخلي

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t \mathbf{y} \tag{25.7}$$

حيث إن $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متجهان بحجم n، وسنحتاج إلى نتائج معيارية من الجبر الخطي أيضًا. وإن مراجعة هذه المادة موجودة في الفصل (1.9).

سنحصل على النتيجة الآتية من خلال خصائص المنقولات. (انظر التمرين 12).

مبرهنة 30.7 لأي متجهات $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ وأي عدد حقيقي α يكون لدينا

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

(ii) $\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

(iii) $\langle \mathbf{x}+\mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$

(iv) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

(v) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ إذا وفقط إذا $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ■

وعندما تكون A موجبة التحديد، فإن $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ ما لم يكن $\mathbf{x} = 0$. وحيث إن A متماثلة، يكون لدينا $\mathbf{x}^t A\mathbf{y} = \mathbf{x}^t A^t\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^t\mathbf{y}$، ومن ثم فبالإضافة إلى النتائج في المبرهنة (30.7)، سيكون لدينا لكل $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$

$$\langle \mathrm{x}, A\mathrm{y}\rangle = \langle A\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \qquad (26.7)$$

والنتيجة الآتية هي أداة رئيسة في تطوير طريقة الميل المرافق.

مبرهنة 31.7

يكون المتجه x^* حلًّا للنظام الخطي الإيجابي الواضح $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ إذا وفقط إذا كانت القيمة الصغرى للدالة $g(\mathrm{x}) = \langle \mathrm{x}, A\mathrm{x}\rangle - 2\langle \mathrm{x}, \mathrm{b}\rangle$ تتحقق عند x^*. ■

البرهان

ليكن x و $\mathrm{v} \neq 0$ متجهين ثابتين، والمتغير t عددًا حقيقيًّا. ولدينا

$$\begin{aligned} g(\mathrm{x}+t\mathrm{v}) &= \langle \mathrm{x}+t\mathrm{v}, A\mathrm{x}+tA\mathrm{v}\rangle - 2\langle \mathrm{x}+t\mathrm{v}, \mathrm{b}\rangle \\ &= \langle \mathrm{x}, A\mathrm{x}\rangle + t\langle \mathrm{v}, A\mathrm{x}\rangle + t\langle \mathrm{x}, A\mathrm{v}\rangle + t^2\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle - 2\langle \mathrm{x}, \mathrm{b}\rangle - 2t\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}\rangle \\ &= \langle \mathrm{x}, A\mathrm{x}\rangle - 2\langle \mathrm{x}, \mathrm{b}\rangle + 2t\langle \mathrm{v}, A\mathrm{x}\rangle - 2t\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}\rangle + t^2\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle \end{aligned}$$

ولذلك فإن

$$g(\mathrm{x}+t\mathrm{v}) = g(\mathrm{x}) + 2t\langle \mathrm{v}, A\mathrm{x}-\mathrm{b}\rangle + t^2\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle \qquad (7.27)$$

وبما أن x و v ثابتان، يمكننا تعريف الدالة التربيعية h في t من خلال

$$h(t) = g(\mathrm{x}+t\mathrm{v})$$

ومن ثم يفترض أن يكون h أقل قيمة عندما $h'(t) = 0$؛ لكون معامل t^2 أي $\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle$ موجبًا. وحيث إن

$$h'(t) = 2\langle \mathrm{v}, A\mathrm{x}-\mathrm{b}\rangle + 2t\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle$$

فإن القيمة الصغرى تحصل عندما

$$\hat{t} = -\frac{\langle \mathrm{v}, A\mathrm{x}-\mathrm{b}\rangle}{\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle} = \frac{\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}-A\mathrm{x}\rangle}{\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle}$$

ومن المعادلة (27.7) يكون

$$\begin{aligned} h(\hat{t}) &= g(\mathrm{x}) - 2\frac{\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}-A\mathrm{x}\rangle}{\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle}\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}-A\mathrm{x}\rangle + \left(\frac{\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}-A\mathrm{x}\rangle}{\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle}\right)^2\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle \\ &= g(\mathrm{x}) - \frac{\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}-A\mathrm{x}\rangle^2}{\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v}\rangle} \end{aligned}$$

ولذلك لأي متجه $\mathrm{v} \neq 0$، يكون لدينا $g(\mathrm{x}+\hat{t}\mathrm{v}) < g(\mathrm{x})$ ما لم يكن $\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}-A\mathrm{x}\rangle = 0$، وبهذه الحالة يكون $g(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x}+\hat{t}\mathrm{v})$. هذه هي النتيجة الرئيسة التي نحتاج إليها لبرهنة المبرهنة (31.7).

افترض أن x^* تحقق $A\mathrm{x}^* = \mathrm{b}$، لذلك $\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}-A\mathrm{x}^*\rangle = 0$ لأي متجه v، ولا يمكن جعل $g(\mathrm{x})$ أصغر من $g(\mathrm{x}^*)$. ومن ثم فإن x^* تقلل من g.

افترض من جانب آخر أن x^* هو متجه يحقق القيمة الصغرى للدالة g، لذا لأي متجه v يكون لدينا $g(\mathrm{x}^*+\hat{t}\mathrm{v}) \geq g(\mathrm{x}^*)$. ولذلك فإن $\langle \mathrm{v}, \mathrm{b}-A\mathrm{x}^*\rangle = 0$. وهذا يؤدي إلى أن $\mathrm{b}-A\mathrm{x}^* = 0$ والنتيجة أن $A\mathrm{x}^* = \mathrm{b}$. ■ ■ ■

وللبدء بطريقة الميل المرافق، نختار x الذي هو حلٌّ تقريبي إلى $A\mathrm{x}^* = \mathrm{b}$ وأن $\mathrm{v} \neq 0$

الذي يعطي اتجاهًا بحثيًّا اتجاه الابتعاد عن x لتحسين التقريب. ليكن $\mathrm{r} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}$ هو متجه البواقي مع x وأن

$$t = \frac{\langle \mathrm{v}, \mathrm{b} - A\mathrm{x} \rangle}{\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v} \rangle} = \frac{\langle \mathrm{v}, \mathrm{r} \rangle}{\langle \mathrm{v}, A\mathrm{v} \rangle}$$

فإذا كان $\mathrm{r} \neq 0$، و v و r ليسا متعامدين، فإن $\mathrm{x} + t\mathrm{v}$ تعطي قيمة أقل لـ g مما هي لـ $g(\mathrm{x})$، وإنها افتراضيًّا أقرب إلى x^* مما هي إلى x. وهذا يؤدي إلى اقتراح الطريقة الآتية.

ليكن $\mathrm{x}^{(0)}$ تقريبًا ابتدائيًّا إلى x^*، وليكن $\mathrm{v}^{(1)} \neq 0$ متجه بحث ابتدائيًّا. ولكل $k = 1, 2, 3, \ldots$ نحسب

$$t_k = \frac{\langle \mathrm{v}^{(k)}, \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle}$$

$$\mathrm{x}^{(k)} = \mathrm{x}^{(k-1)} + t_k \mathrm{v}^{(k)}$$

ونختار اتجاه بحث جديد $\mathrm{v}^{(k+1)}$. والهدف أن يؤدي هذا الاختيار إلى أن تتقارب متتالية التقريبات $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ بسرعة إلى x^*.

ولاختيار اتجاهات البحث، نفترض g دالة لمركبات $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$، ومن ثم

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle \mathrm{x}, A\mathrm{x} \rangle - 2\langle \mathrm{x}, \mathrm{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

وبأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى متغيرات المركبات x_k نحصل على

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathrm{x}) = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - 2b_k$$

ولذلك فإن تدرج (ميل) g يكون

$$\nabla g(\mathrm{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathrm{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathrm{x}), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathrm{x}) \right)^t = 2(A\mathrm{x} - \mathrm{b}) = -2\mathrm{r}$$

حيث إن المتجه r هو متجه البواقي إلى x.

ومن حسابات التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات، نعرف أن اتجاه النقصان الأكبر في قيمة $g(\mathrm{x})$ هو الاتجاه المعطى من خلال $-\nabla g(\mathrm{x})$، يعني أنه في اتجاه الباقي r.

تسمى الطريقة التي تختار

$$\mathrm{v}^{(k+1)} = \mathrm{r}^{(k)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(k)}$$

طريقةَ النزول الأعمق *steepest descent*. وعلى الرغم من أننا سنرى في الفصل (4.10) أن هذه الطريقة جديرة بالأنظمة اللاخطية وبمسائل التحسين، إلا أنها لا تُستخدم في الأنظمة الخطية نتيجة تباطؤ التقارب.

وتستخدم الطريقة البديلة مجموعة من متجهات الاتجاه اللاصفرية $\{\mathrm{v}^{(1)}, \ldots, \mathrm{v}^{(n)}\}$ التي تحقق

$$\langle \mathrm{v}^{(i)}, A\mathrm{v}^{(j)} \rangle = 0 \quad \text{إذا} \quad i \neq j$$

وهذا يُسمى "شرط التعامد $A-$ A-orthogonality condition"، وإن مجموعة المتجهات $\{\mathrm{v}^{(1)}, \ldots, \mathrm{v}^{(n)}\}$ تُسمى "تعامد $A-$ A-orthogonal". وليس من الصعب إثبات أن متجهات

تعامد $-A$ المرتبطة بالمصفوفة الإيجابية الواضحة A مستقلة خطيًّا. (انظر التمرين 13 – أ) هذه المجموعة من اتجاهات البحث تعطي

$$t_k = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

و $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k\mathbf{v}^{(k)}$.

وتثبت المبرهنة الآتية أن اختيار اتجاهات البحث تعطي تقاربًا في n من الخطوات بوصفها حدًّا أعلى، ولذلك فإنها تعطي الحلَّ الصحيح بوصفها طريقة مباشرة، مفترضين أن الحسابات صحيحة.

مبرهنة 32.7

لتكن $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية بالنسبة إلى A مرتبطة بالمصفوفة الإيجابية الواضحة A، ولتكن $\mathbf{x}^{(0)}$ عشوائية. نعرف

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k\mathbf{v}^{(k)} \quad \text{و} \quad t_k = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

لكل $k = 1, 2, \ldots, n$. ولذلك على افتراض أن الحسابات صحيحة، فإن $A\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}$. ■

البرهان

بما أنه لكل $k = 1, 2, \ldots, n$، نجد أن $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k\mathbf{v}^{(k)}$، فإنه يكون لدينا

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x}^{(n)} &= A\mathbf{x}^{(n-1)} + t_n A\mathbf{v}^{(n)} \\
&= (A\mathbf{x}^{(n-2)} + t_{n-1}A\mathbf{v}^{(n-1)}) + t_n A\mathbf{v}^{(n)} \\
&\vdots \\
&= A\mathbf{x}^{(0)} + t_1 A\mathbf{v}^{(1)} + t_2 A\mathbf{v}^{(2)} + \cdots + t_n A\mathbf{v}^{(n)}
\end{aligned}$$

وبطرح b من هذه النتيجة نحصل على

$$A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} = A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b} + t_1 A\mathbf{v}^{(1)} + t_2 A\mathbf{v}^{(2)} + \cdots + t_n A\mathbf{v}^{(n)}$$

والآن نأخذ الضرب الداخلي لطرفي المعادلة أعلاه بالمتجه $\mathbf{v}^{(k)}$، ونستخدم خواص الضرب الداخلي وحقيقة كون A متماثلة لإيجاد

$$\begin{aligned}
\langle A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle &= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + t_1\langle A\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + \cdots + t_n\langle A\mathbf{v}^{(n)}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle \\
&= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + t_1\langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle + \cdots + t_n\langle \mathbf{v}^{(n)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle
\end{aligned}$$

إن خاصية تعامد$-A$ تعطينا لكل k

$$\langle A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle = \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + t_k\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle \qquad (28.7)$$

وعلى أي حال فإن

$$t_k = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

ولذلك فإن

$$\begin{aligned} t_k \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle &= \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} + A\mathbf{x}^{(0)} - A\mathbf{x}^{(1)} + \cdots - A\mathbf{x}^{(k-2)} + A\mathbf{x}^{(k-2)} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} \rangle + \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{x}^{(0)} - A\mathbf{x}^{(1)} \rangle + \cdots + \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{x}^{(k-2)} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle \end{aligned}$$

ولكن لأي i نجد أن

$$A\mathbf{x}^{(i)} = A\mathbf{x}^{(i-1)} + t_i A\mathbf{v}^{(i)} \quad \text{و} \quad \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i-1)} + t_i \mathbf{v}^{(i)}$$

لذلك فإن

$$A\mathbf{x}^{(i-1)} - A\mathbf{x}^{(i)} = -t_i A\mathbf{v}^{(i)}$$

ومن ثم يكون

$$t_k \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle = \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} \rangle - t_1 \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(1)} \rangle - \cdots - t_{k-1} \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k-1)} \rangle$$

وبسبب تعامد A–، فإن $\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(i)} \rangle = 0$ لكل $i \neq k$، ولذلك فإن

$$\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle t_k = \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} \rangle$$

ومن المعادلة (28.7) نجد أن

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle &= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} \rangle \\ &= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle \\ &= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle - \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

يكون المتجه $A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}$ متعامدًا مع مجموعة متجهات تعامد A–، $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$. ومن هنا سيكون $A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} = 0$. (انظر التمرين –13 ب). ■ ■ ■

مثال 1

افترض المصفوفة موجبة التحديد

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

وليكن $\mathbf{v}^{(1)} = (1, 0, 0)^t, \mathbf{v}^{(2)} = (-\frac{3}{4}, 1, 0)^t$ و $\mathbf{v}^{(3)} = (-\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 1)^t$. وبالحساب المباشر نجد

$$\langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(2)} \rangle = \mathbf{v}^{(1)t} A\mathbf{v}^{(2)} = (1, 0, 0) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(3)} \rangle = \left(1, 0, 0\right) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

و

$$\langle \mathbf{v}^{(2)}, A\mathbf{v}^{(3)} \rangle = \left(-\frac{3}{4}, 1, 0\right) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

لذلك فإن $\{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}$ هي مجموعة تعامد $A-$.

إن النظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

له حلٌّ صحيح هو $x^* = (3, 4, -5)^t$. ولتقريب هذا الحلِّ؛ افترض أن $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$. ولأن $b = (24, 30, -24)^t$، يكون لدينا

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = b = (24, 30, -24)^t$$

ولذلك فإن

$$\langle v^{(1)}, r^{(0)}\rangle = v^{(1)t}r^{(0)} = 24 \text{ ، } \langle v^{(1)}, Av^{(1)}\rangle = 4 \text{ و } t_0 = \frac{24}{4} = 6$$

ومن ثم فإن

$$x^{(1)} = x^{(0)} + t_0 v^{(1)} = (0, 0, 0)^t + 6(1, 0, 0)^t = (6, 0, 0)^t$$

وبالاستمرار على هذا النحو، يكون لدينا

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = (0, 12, -24)^t; \quad t_1 = \frac{\langle v^{(2)}, r^{(1)}\rangle}{\langle v^{(2)}, Av^{(2)}\rangle} = \frac{12}{7/4} = \frac{48}{7}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + t_1 v^{(2)} = (6, 0, 0)^t + \frac{48}{7}\left(-\frac{3}{4}, 1, 0\right)^t = \left(\frac{6}{7}, \frac{48}{7}, 0\right)^t$$

$$r^{(2)} = b - Ax^{(2)} = \left(0, 0, -\frac{120}{7}\right); \quad t_2 = \frac{\langle v^{(3)}, r^{(2)}\rangle}{\langle v^{(3)}, Av^{(3)}\rangle} = \frac{-120/7}{24/7} = -5$$

و

$$x^{(3)} = x^{(2)} + t_2 v^{(3)} = \left(\tfrac{6}{7}, \tfrac{48}{7}, 0\right)^t + (-5)\left(-\tfrac{3}{7}, \tfrac{4}{7}, 1\right)^t = (3, 4, -5)^t$$

ولأننا طبَّقنا الأسلوب ثلاث مرات ($n = 3$)، فإن هذا يعدُّ حلًّا حقيقيًّا. ■

وقبل مناقشة كيفية تحديد مجموعة تعامد $A-$، سنستمر في التطوير. إن استخدام مجموعة تعامد $A-$ $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\}$ لمتجهات الاتجاه تعطينا ما نسمِّيه طريقة الاتجاه المرافق *conjugate direction*. تثبت المبرهنة الآتية تعامدية متجهات البواقي $r^{(k)}$ ومتجهات الاتجاه $v^{(j)}$. وقد أُخذ في الحسبان برهان هذه النتيجة باستخدام الاستقراء الرياضي في التمرين (14).

مبرهنة 33.7

إن متجهات البواقي $r^{(k)}$ ، حيث $k = 1, 2, \ldots, n$، لطريقة الميل المرافقة تحقق المعادلات لكل

$$\langle r^{(k)}, v^{(j)}\rangle = 0 \text{ لكل } j = 1, 2, \ldots, k$$ ■

إن طريقة الميل المرافق لهستنس وستيفل تختار اتجاهات البحث $\{v^{(k)}\}$ خلال عملية التكرار، لذلك فإن متجهات البواقي $\{r^{(k)}\}$ متعامدة تبادليًّا. ولإنشاء متجهات الاتجاه $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots\}$

والتقريبات $\{\mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{x}^{(2)}, \ldots\}$، فإننا نبدأ بتقريب ابتدائي $\mathrm{x}^{(0)}$، ومن ثم نستخدم اتجاه النزول الأعمق $\mathrm{r}^{(0)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(0)}$ حيث أول اتجاه بحث $\mathrm{v}^{(1)}$.

افترض أن الميول المرافقة $\mathrm{v}^{(1)}, \ldots, \mathrm{v}^{(k-1)}$ والتقريبات $\mathrm{x}^{(1)}, \ldots, \mathrm{x}^{(k-1)}$ حُسِبت مع

$$\mathrm{x}^{(k-1)} = \mathrm{x}^{(k-2)} + t_{k-1}\mathrm{v}^{(k-1)}$$

حيث إن

$$\langle \mathrm{v}^{(i)}, A\mathrm{v}^{(j)} \rangle = 0 \text{ و } \langle \mathrm{r}^{(i)}, \mathrm{r}^{(j)} \rangle = 0 \text{ لكل } i \neq j$$

وإذا كان $\mathrm{x}^{(k-1)}$ هو الحلُّ لـ $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ فقد وصلنا إلى النهاية. وبعكس ذلك، يكون $\mathrm{r}^{(k-1)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(k-1)} \neq 0$ وتؤدي المبرهنة (33.7) إلى أن $\langle \mathrm{r}^{(k-1)}, \mathrm{v}^{(i)} \rangle = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, k-1$. عندئذٍ نستخدم $\mathrm{r}^{(k-1)}$ لتوليد $\mathrm{v}^{(k)}$ بوضع

$$\mathrm{v}^{(k)} = \mathrm{r}^{(k-1)} + s_{k-1}\mathrm{v}^{(k-1)}$$

ونريد اختيار s_{k-1} بحيث يكون

$$\langle \mathrm{v}^{(k-1)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle = 0$$

وحيث إن

$$A\mathrm{v}^{(k)} = A\mathrm{r}^{(k-1)} + s_{k-1}A\mathrm{v}^{(k-1)}$$

و

$$\langle \mathrm{v}^{(k-1)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle = \langle \mathrm{v}^{(k-1)}, A\mathrm{r}^{(k-1)} \rangle + s_{k-1}\langle \mathrm{v}^{(k-1)}, A\mathrm{v}^{(k-1)} \rangle$$

سيكون لدينا $\langle \mathrm{v}^{(k-1)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle = 0$ عندما

$$s_{k-1} = -\frac{\langle \mathrm{v}^{(k-1)}, A\mathrm{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k-1)}, A\mathrm{v}^{(k-1)} \rangle}$$

وبالإمكان أيضًا إثبات أنه مع هذا الاختيار لـ s_{k-1} يكون لدينا $\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(i)} \rangle = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, k-2$ (انظر [Lu, p. 245])، ولذلك فإن $\{\mathrm{v}^{(1)}, \ldots, \mathrm{v}^{(k)}\}$ هي مجموعة تعامد $-A$.

وباختيارنا $\mathrm{v}^{(k)}$ نحسب

$$t_k = \frac{\langle \mathrm{v}^{(k)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle} = \frac{\langle \mathrm{r}^{(k-1)} + s_{k-1}\mathrm{v}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle}$$

$$= \frac{\langle \mathrm{r}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle} + s_{k-1}\frac{\langle \mathrm{v}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle}$$

ومن خلال المبرهنة (33.7) يكون لدينا $\langle \mathrm{v}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle = 0$ ، ولذلك فإن

$$t_k = \frac{\langle \mathrm{r}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle} \tag{29.7}$$

ومن ثم فإن

$$\mathrm{x}^{(k)} = \mathrm{x}^{(k-1)} + t_k\mathrm{v}^{(k)}$$

ولحساب $\mathrm{r}^{(k)}$، نضرب في A، ونطرح b لنحصل على

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - t_k A\mathbf{v}^{(k)} \quad \text{أو} \quad A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} = A\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{b} + t_k A\mathbf{v}^{(k)}$$

ومن ثم فإن

$$\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle = \langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - t_k \langle A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle = -t_k \langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle$$

والأكثر من ذلك، فإننا نحصل من المعادلة (29.7) على

$$\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle = t_k \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle$$

ولذلك فإن

$$\begin{aligned} s_k &= -\frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle} = -\frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle} \\ &= \frac{(1/t_k)\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{(1/t_k)\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle} \end{aligned}$$

وباختصار لدينا الصيغ

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}; \quad \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)}$$

وعند $k = 1, 2, \ldots, n$، يكون لدينا

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle} \\ \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k-1)} - t_k A\mathbf{v}^{(k)} \\ s_k &= \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle} \\ \mathbf{v}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} + s_k \mathbf{v}^{(k)} \end{aligned} \tag{30.7}$$

وبدلًا من عرض خوارزمية لطريقة الميل المرافق مستخدمين هذه الصيغ، سنوسّع الطريقة لتشمل الاشتراط المسبق *preconditioning*. فإذا كانت المصفوفة A معلولة الاشتراط فإن طريقة الميل المرافق تكون معرضة لأخطاء تقريب بصورة كبيرة. وعلى الرغم من وجوب الحصول على الإجابة الصحيحة في n من الخطوات، فإن ذلك لم يعد هو الحالة. ولأنها طريقة مباشرة، فإن طريقة الميل المرافق ليست بجودة تقليص جاوس مع التمحور. وإن الاستخدام الرئيس لطريقة التدرج المتقارن هو طريقة تكرار تُطبّق على نظام مشروط بصورة أحسن. وفي هذه الحالة سنحصل غالبًا على حلٍّ تقريبي مقبول خلال $\sqrt{n}$ من الخطوات.

ولتطبيق الطريقة على نظام جيد الاشتراط؛ نريد اختيار مصفوفة اشتراطية غير مفردة C بحيث يكون

$$\tilde{A} = C^{-1}A(C^{-1})^t$$

جيد الاشتراط. ولتبسيط الترميز؛ سنستخدم المصفوفة C^{-t} لترمز إلى $(C^{-1})^t$.

افترض النظام الخطي $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$, حيث $\tilde{\mathbf{x}} = C^t\mathbf{x}$ و $\tilde{\mathbf{b}} = C^{-1}\mathbf{b}$. لذلك فإن

$$\tilde{A}\tilde{\mathrm{x}} = (C^{-1}AC^{-t})(C^t\mathrm{x}) = C^{-1}A\mathrm{x}$$

ولذلك فإنه يمكننا حل $\tilde{A}\tilde{\mathrm{x}} = \tilde{\mathrm{b}}$ لـ $\tilde{\mathrm{x}}$ ومن ثم إيجاد x من خلال الضرب في C^{-t}. وعلى أي حال فبدلًا من تكرار كتابة المعادلة (30.7) مستخدمين $\tilde{\mathrm{r}}^{(k)}, \tilde{\mathrm{v}}^{(k)}, \tilde{t}_k, \tilde{\mathrm{x}}^{(k)}$، و $\tilde{s}_k$ سندمج الاشتراط المسبق.

وحيث إن

$$\tilde{\mathrm{x}}^{(k)} = C^t\mathrm{x}^{(k)}$$

يكون لدينا

$$\tilde{\mathrm{r}}^{(k)} = \tilde{\mathrm{b}} - \tilde{A}\tilde{\mathrm{x}}^{(k)} = C^{-1}\mathrm{b} - (C^{-1}AC^{-t})C^t\mathrm{x}^{(k)} = C^{-1}(\mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(k)}) = C^{-1}\mathrm{r}^{(k)}$$

ليكن $\tilde{\mathrm{v}}^{(k)} = C^t\mathrm{v}^{(k)}$ و $\mathrm{w}^{(k)} = C^{-1}\mathrm{r}^{(k)}$، لذا فإن

$$\tilde{s}_k = \frac{\langle\tilde{\mathrm{r}}^{(k)}, \tilde{\mathrm{r}}^{(k)}\rangle}{\langle\tilde{\mathrm{r}}^{(k-1)}, \tilde{\mathrm{r}}^{(k-1)}\rangle} = \frac{\langle C^{-1}\mathrm{r}^{(k)}, C^{-1}\mathrm{r}^{(k)}\rangle}{\langle C^{-1}\mathrm{r}^{(k-1)}, C^{-1}\mathrm{r}^{(k-1)}\rangle}$$

وبذلك فإن

$$\tilde{s}_k = \frac{\langle\mathrm{w}^{(k)}, \mathrm{w}^{(k)}\rangle}{\langle\mathrm{w}^{(k-1)}, \mathrm{w}^{(k-1)}\rangle} \tag{31.7}$$

ومن ثم فإن

$$\tilde{t}_k = \frac{\langle\tilde{\mathrm{r}}^{(k-1)}, \tilde{\mathrm{r}}^{(k-1)}\rangle}{\langle\tilde{\mathrm{v}}^{(k)}, \tilde{A}\tilde{\mathrm{v}}^{(k)}\rangle} = \frac{\langle C^{-1}\mathrm{r}^{(k-1)}, C^{-1}\mathrm{r}^{(k-1)}\rangle}{\langle C^t\mathrm{v}^{(k)}, C^{-1}AC^{-t}C^t\mathrm{v}^{(k)}\rangle} = \frac{\langle\mathrm{w}^{(k-1)}, \mathrm{w}^{(k-1)}\rangle}{\langle C^t\mathrm{v}^{(k)}, C^{-1}A\mathrm{v}^{(k)}\rangle}$$

ولكون

$$\begin{aligned}\langle C^t\mathrm{v}^{(k)}, C^{-1}A\mathrm{v}^{(k)}\rangle &= [C^t\mathrm{v}^{(k)}]^t C^{-1}A\mathrm{v}^{(k)}\\ &= [\mathrm{v}^{(k)}]^t CC^{-1}A\mathrm{v}^{(k)} = [\mathrm{v}^{(k)}]^t A\mathrm{v}^{(k)} = \langle\mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)}\rangle\end{aligned}$$

يكون لدينا

$$\tilde{t}_k = \frac{\langle\mathrm{w}^{(k-1)}, \mathrm{w}^{(k-1)}\rangle}{\langle\mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)}\rangle} \tag{32.7}$$

والأكثر من ذلك، فإن

$$\tilde{\mathrm{x}}^{(k)} = \tilde{\mathrm{x}}^{(k-1)} + \tilde{t}_k\tilde{\mathrm{v}}^{(k)} \quad \text{لذلك فإن} \quad C^t\mathrm{x}^{(k)} = C^t\mathrm{x}^{(k-1)} + \tilde{t}_k C^t\mathrm{v}^{(k)}$$

و

$$\mathrm{x}^{(k)} = \mathrm{x}^{(k-1)} + \tilde{t}_k\mathrm{v}^{(k)} \tag{33.7}$$

وبالاستمرار سيكون

$$\tilde{\mathrm{r}}^{(k)} = \tilde{\mathrm{r}}^{(k-1)} - \tilde{t}_k\tilde{A}\tilde{\mathrm{v}}^{(k)}$$

ولذلك فإن

$$C^{-1}\mathrm{r}^{(k)} = C^{-1}\mathrm{r}^{(k-1)} - \tilde{t}_k C^{-1}AC^{-t}\tilde{\mathrm{v}}^{(k)}, \qquad \mathrm{r}^{(k)} = \mathrm{r}^{(k-1)} - \tilde{t}_k AC^{-t}C^t\mathrm{v}^{(k)}$$

و

$$\mathrm{r}^{(k)} = \mathrm{r}^{(k-1)} - \tilde{t}_k A\mathrm{v}^{(k)} \tag{34.7}$$

الاشـتراط المسـبق يسـتبدل النظـام المعطى بآخر له الحلول نفسها، ولكن بسمات تقاربية أفضل.

وفي النهاية إن

$$C^{t}\mathsf{v}^{(k+1)} = C^{-1}\mathsf{r}^{(k)} + \tilde{s}_k C^{t}\mathsf{v}^{(k)} \quad \text{و} \quad \tilde{\mathsf{v}}^{(k+1)} = \tilde{\mathsf{r}}^{(k)} + \tilde{s}_k \tilde{\mathsf{v}}^{(k)}$$

ولذلك فإن

$$\mathsf{v}^{(k+1)} = C^{-t}C^{-1}\mathsf{r}^{(k)} + \tilde{s}_k \mathsf{v}^{(k)} = C^{-t}\mathsf{w}^{(k)} + \tilde{s}_k \mathsf{v}^{(k)} \qquad (35.7)$$

إن طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط تستند إلى استخدام المعادلات (31.7) — (35.7) بالترتيب (32.7)، (33.7)، (34.7)، (31.7) ثم (35.7). وتنفذ الخوارزمية (5.7) هذه العملية.

ALGORITHM
الخوارزمية
5.7

طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط

Preconditioned Conjugate Gradient Method

لحلِّ $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ آخذين في الحسبان المصفوفة مسبقة الاشتراط C^{-1} والتقريب الابتدائي $\mathsf{x}^{(0)}$؛

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر $b_j, 1 \le j \le n$ للمتجه b، العناصر $\gamma_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة مسبقة الاشتراط C^{-1}، العناصر $x_i, 1 \le i \le n$ للتقريب الابتدائي $\mathsf{x} = \mathsf{x}^{(0)}$ وأكبر عدد من الإعادات N، حد السماح TOL.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ والباقي $r_1, \ldots, r_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $\mathsf{r} = \mathsf{b} - A\mathsf{x}$ (احسب $\mathsf{r}^{(0)}$). $\mathsf{w} = C^{-1}\mathsf{r}$ (إرشاد: $\mathsf{w} = \mathsf{w}^{(0)}$). $\mathsf{v} = C^{-t}\mathsf{w}$ (إرشاد: $\mathsf{v} = \mathsf{v}^{(1)}$). $\alpha = \sum_{j=1}^{n} w_j^2$
2	ضع $k = 1$.
3	ما دام $(k \le N)$ فطبِّق الخطوات 4 – 7.
4	إذا كان $\\|\mathsf{v}\\| < TOL$، المخرجات (متجه الحل $x_1, \ldots, x_n$). المخرجات (مع الباقي $r_1, \ldots, r_n$). (العملية كانت ناجحة). توقف.
5	ضع $\mathsf{u} = A\mathsf{v}$ (إرشاد: $\mathsf{u} = A\mathsf{v}^{(k)}$). $t = \dfrac{\alpha}{\sum_{j=1}^{n} \mathsf{v}_j u_j}$ (إرشاد: $t = t_k$). $\mathsf{x} = \mathsf{x} + t\mathsf{v}$ (إرشاد: $\mathsf{x} = \mathsf{x}^{(k)}$). $\mathsf{r} = \mathsf{r} - t\mathsf{u}$ (إرشاد: $\mathsf{r} = \mathsf{r}^{(k)}$). $\mathsf{w} = C^{-1}\mathsf{r}$ (إرشاد: $\mathsf{w} = \mathsf{w}^{(k)}$). $\beta = \sum_{j=1}^{n} w_j^2$ (إرشاد: $\beta = \langle \mathsf{w}^{(k)}, \mathsf{w}^{(k)} \rangle$).



6	إذا كان $\lvert\beta\rvert < TOL$ فإنه إذا كان $\lVert \mathbf{r} \rVert < TOL$ فإنه المخرجات (متجه الحل $x_1, \ldots, x_n$). المخرجات (مع الباقي $r_1, \ldots, r_n$). (العملية كانت ناجحة). توقف.
7	ضع $s = \beta/\alpha$ $(s = s_k)$ $\mathbf{v} = C^{-t}\mathbf{w} + s\mathbf{v}$ (إرشاد: $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(k+1)}$). $\alpha = \beta$ (تحديث α). $k = k + 1$
8	إذا كان $(k > n)$ فإن المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت غير ناجحة). توقف.

■

يوضح المثال الآتي الحسابات في مسألة سهلة.

مثال 2 النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ - x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

له حلّ $(3, 4, -5)^t$. وقد تناولناه في مثال (3) من الفصل (3.7). وقد استُخدم في ذلك المثال طريقتا جاوس – سيدل و SOR، وسنستخدم طريقة الميل المرافق دون اشتراط مسبق، ولذلك فإن $C = C^{-1} = I$. ليكن $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$، ومن ثم فإن

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = (24, 30, -24)^t$$

$$\mathbf{w} = C^{-1}\mathbf{r}^{(0)} = (24, 30, -24)^t$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = C^{-t}\mathbf{w} = (24, 30, -24)^t$$

$$\alpha = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 2052$$

سنبدأ أول تكرار مع $k = 1$، لذا فإن

$$\mathbf{u} = A\mathbf{v}^{(1)} = (186.0, 216.0, -126.0)^t$$

$$t_1 = \frac{\alpha}{\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{u} \rangle} = 0.1469072165$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + t_1\mathbf{v}^{(1)} = (3.525773196, 4.407216495, -3.525773196)^t$$

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} - t_1\mathbf{u} = (-3.32474227, -1.73195876, -5.48969072)^t$$

$$\mathbf{w} = C^{-1}\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)}$$

$$\beta = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 44.19029651$$

$$s_1 = \frac{\beta}{\alpha} = 0.02153523222$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = C^{-t}\mathbf{w} + s_1\mathbf{v}^{(1)} = (-2.807896697, -1.085901793, -6.006536293)^t$$

ضع $\alpha = \beta = 44.19029651$.

ونحن الآن على استعداد للبدء بالتكرار الثاني. فيكون لدينا

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= A\mathbf{v}^{(2)} = (-14.48929217, -6.760760967, -22.94024338)^t \\
t_2 &= 0.2378157558 \\
\mathbf{x}^{(2)} &= (2.858011121, 4.148971939, -4.954222164)^t \\
\mathbf{r}^{(2)} &= (0.121039698, -0.124143281, -0.034139402)^t \\
\mathbf{w} &= C^{-1}\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}^{(2)} \\
\beta &= 0.03122766148 \\
s_2 &= 0.0007066633163 \\
\mathbf{v}^{(3)} &= (0.1190554504, -0.1249106480, -0.03838400086)^t
\end{aligned}$$

ضع $\alpha = \beta = 0.03122766148$

وأخيرًا تعطينا التكرار الثالثة

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= A\mathbf{v}^{(3)} = (0.1014898976, -0.1040922099, -0.0286253554)^t \\
t_3 &= 1.192628008 \\
\mathbf{x}^{(3)} &= (2.999999998, 4.000000002, -4.999999998)^t \\
\mathbf{r}^{(3)} &= (0.36\times 10^{-8}, 0.39\times 10^{-8}, -0.141\times 10^{-8})^t
\end{aligned}$$

ولأن $\mathbf{x}^{(3)}$ هو الحلُّ الصحيح تقريبًا، فإن خطأ تقريب لا يؤثِّر معنويًّا في النتيجة. وفي المثال (3) من الفصل (3.7) تطلبت طريقة جاوس–سيدل **34** تكرارًا، أما طريقة SOR، مع $\omega = 1.25$، فقد تطلبت 14 تكرارًا فقط لدقة بحدود 10^{-7}. ومن الجدير ملاحظة أننا نقارن في هذا المثال بين طريقة مباشرة وطرائق تكرار. ■

ويعرض مثال الآتي تأثير الاشتراط المسبق في مصفوفة ضعيفة الاشتراط. ونستخدم في هذا مثال وما بعده $D^{-1/2}$ ليمثل المصفوفة القطرية، التي عناصرها عبارة عن مقلوب الجذور التربيعية للعناصر القطرية لصفوفة المعاملات A.

مثال 3 النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مع

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 60 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 700 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

له حل

$$\mathbf{x}^* = (7.859713071, 0.4229264082, -0.07359223906, -0.5406430164, 0.01062616286)^t$$

المصفوفة A متماثلة وموجبة التحديد، لكنها معلولة الاشتراط مع عدد الشرط $K_\infty(A) = 13961.71$. سنستخدم حد سماح 0.01 ونقارن النتائج التي ظهرت من الطرائق (جاكوبي)، (جاوس − سيدل) (SOR للتكرار مع $\omega = 1.25$) و(التدرج المتقارن) بـ $C^{-1} = I$. وبعد ذلك فإننا نكون قد نفّذنا اشتراطًا مسبقًا من خلال اختيار C^{-1} بمنزلة المصفوفة القطرية $D^{-1/2}$ التي عناصرها القطرية عبارة عن معكوس الجذور التربيعية الموجبة للعناصر القطرية في المصفوفة الإيجابية الواضحة A. النتائج مبينة في جدول (5.7). إن طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط تعطي التقريب الأدق مع أصغر عدد من مرات التكرار.

جدول 5.7

الطريقة		عدد مرات الإعادة	$\mathbf{x}^{(k)}$	$\Vert\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\Vert_\infty$
جاكوبي	Jacobi	49	$(7.86277141, 0.42320802, -0.07348669$ $-0.53975964, 0.01062847)^t$	0.00305834
جاوس − سيدل	Gauss–Seidel	15	$(7.83525748, 0.42257868, -0.07319124$ $-0.53753055, 0.01060903)^t$	0.02445559
	SOR ($\omega = 1.25$)	7	$(7.85152706, 0.42277371, -0.07348303$ $-0.53978369, 0.01062286)^t$	0.00818607
التدرج المتقارن	Conjugate Gradient	5	$(7.85341523, 0.42298677, -0.07347963$ $-0.53987920, 0.008628916)^t$	0.00629785
مسبق الاشتراط	Conjugate Gradient (Preconditioned)	4	$(7.85968827, 0.42288329, -0.07359878$ $-0.54063200, 0.01064344)^t$	0.00009312

إن طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط conjugate gradient غالبًا ما تستخدم في حلّ أنظمة خطية كبيرة تكون فيها المصفوفة متشعبة وإيجابية واضحة. ويجب حلُّ هذه الأنظمة لتقريب حلول مسائل القيمة الحدية في معادلات تفاضلية اعتيادية (الفصول 3.11، 4.11، 5.11). وكلما كان النظام كبيرًا أصبحت طريقة الميل المرافق لافتة للإعجاب؛ لأنها تقلص عدد مرات التكرار المطلوبة معنويًّا. ونجد في هذه الأنظمة أن المصفوفة مسبقة الاشتراط C تكون مساوية تقريبًا لـ L في تحليل شولسكي العاملي LL^t للمصفوفة A. وعمومًا يتم تجاهل العناصر الصغيرة في A وتطبّق طريقة شولسكي لإيجاد ما يدعى تحليلًا عامليًّا غير مكتمل LL^t للمصفوفة A. ولذلك فإن $C^{-t}C^{-1} \approx A^{-1}$ وقد وُجِد تقريب جيد. ويمكن إيجاد المزيد من المعلومات حول طريقة الميل المرافق في [Kelley].

مجموعة التمارين 5.7 EXERCISE SET

1. النظام الخطي

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 = \tfrac{5}{21}$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 = \tfrac{11}{84}$$

له حل $(x_1, x_2)^t = (\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7})^t$.

أ. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا تقليص جاوس مع حساب تدويري بمرتبتين.

ب. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا طريقة الميل المرافق $(C = C^{-1} = I)$ مع حساب تدويري بمرتبتين.

ج. أي الطريقتين تعطي نتيجة أفضل؟

د. اختر $C^{-1} = D^{-1/2}$. هل هذا الاختيار يحسّن طريقة الميل المرافق؟

2. النظام الخطي

$$\begin{aligned} 0.1x_1 + 0.2x_2 &= 0.3 \\ 0.2x_1 + 113x_2 &= 113.2 \end{aligned}$$

له حلّ $(x_1, x_2)^t = (1, 1)^t$. كرر توجيهات التمرين (1) لهذا النظام الخطي.

3. النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= \tfrac{5}{6} \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 &= \tfrac{5}{12} \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= \tfrac{17}{60} \end{aligned}$$

له حل $(1, -1, 1)^t$.

أ. حُلّ النظام الخطي مستخدمًا تقليص جاوس مع حساب تدويري بثلاث خانات.

ب. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا طريقة الميل المرافق مع حساب تدويري بثلاث خانات.

ج. هل التمحور يحسّن النتيجة في (أ)؟

د. كرّر الفقرة (ب) مستخدمًا $C^{-1} = D^{-1/2}$. هل هذا يحسّن النتيجة في (ب)؟

4. كرر التمرين (3) مستخدمًا حسابًا أحادي الدقة على جهاز حاسوب.

5. نفِّذ خطوتين فقط من طريقة الميل المرافق مع $C = C^{-1} = I$ على كل من الأنظمة الخطية الآتية، وقارن النتائج في الفقرتين (ب) و (ج) بتلك التي وُجدت في التمارين (1 و 3 و 9) من الفصل (3.7):

أ.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ - 2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25 \\ - 4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ - x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

هـ.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_1 - x_3 + + 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

و.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 &= 5 \\ - x_2 + 4x_3 - x_6 &= 0 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 &= 6 \\ - x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ - x_3 - x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

6. كرر التمرين (5) مستخدمًا $C^{-1} = D^{-1/2}$.

7. كرر التمرين (5) مع $TOL = 10^{-3}$ في المعيار l_∞. قارن النتائج في الفقرتين (ب) و (ج) بتلك التي وُجِدت في التمارين (5 و 7 و 13) من الفصل (3.7).

8. كرر التمرين (7) مستخدمًا $C^{-1} = D^{-1/2}$.

9. قرّب حلول الأنظمة الخطية $Ax = b$ الآتية ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞:

(i)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 16 \\ -1, & \text{حيث } \begin{cases} j = i + 1 \text{ و } i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 \\ j = i - 1 \text{ و } i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16 \\ j = i + 4 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 12 \\ j = i - 4 \text{ و } i = 5, 6, \ldots, 16 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و

$$\begin{aligned} b = (&1.902207, 1.051143, 1.175689, 3.480083, 0.819600, -0.264419 \\ &-0.412789, 1.175689, 0.913337, -0.150209, -0.264419, 1.051143 \\ &1.966694, 0.913337, 0.819600, 1.902207)^t \end{aligned}$$

(ii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 25 \\ -1, & \text{حيث } \begin{cases} j = i + 1 \text{ و } i = \begin{cases} 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 \\ 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, \end{cases} \\ j = i - 1 \text{ و } i = \begin{cases} 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15 \\ 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25 \end{cases} \\ j = i + 5 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 20 \\ j = i - 5 \text{ و } i = 6, 7, \ldots, 25 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و $b = (1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2)^t$

(iii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 40 \\ -1, & \text{حيث } \begin{cases} j = i + 1 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 39 \\ j = i - 1 \text{ و } i = 2, 3, \ldots, 40 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و $b_i = 1.5i - 6$ لكل $i = 1, 2, \ldots, 40$

أ. استخدم طريقة جاكوبي.

ب. استخدم طريقة جاوس – سيدل.

ج. استخدم طريقة SOR مع $\omega = 1.3$ في (i) و $\omega = 1.2$ في (ii) و $\omega = 1.1$ في (iii).

د. استخدم طريقة الميل المرافق واشتراطا مسبقًا مع $C^{-1} = D^{-1/2}$.

10. حُلَّ النظام الخطي في التمرين (24 (ب)) من مجموعة التمارين (3.7) مستخدمًا طريقة الميل المرافق مع $C^{-1} = I$.

11. افترض

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن مصفوفة A بحجم 16×16 بالصيغة المجزأة

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -I & O & O \\ -I & A_1 & -I & O \\ O & -I & A_1 & -I \\ O & O & -I & A_1 \end{bmatrix}$$

افترض $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)^t$.

أ. حُلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مستخدمًا طريقة الميل المرافق مع حد سماح 0.05.

ب. حُلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مستخدمًا طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط مع $C^{-1} = D^{-1/2}$ وحد سماح 0.05.

ج. هل هناك أي حد سماح تتطلب فيه الطريقتان (أ) و (ب) عددًا مختلفًا من التكرار؟

12. استخدم خصائص المنقول المعطى في المبرهنة (13.6) لبرهنة المبرهنة (30.7).

13. أ. أثبت أن مجموعة متعامد-A لمتجهات لاصفرية مرتبطة بمصفوفة إيجابية واضحة تكون مستقلة خطيًّا.

ب. أثبت أنه إذا كانت $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ عبارة عن مجموعة متعامد-A لمتجهات لاصفرية في $\mathbb{R}$، وأن $\mathbf{z}^t\mathbf{v}^{(i)} = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإن $\mathbf{z} = 0$.

14. برهن المبرهنة (33.7) مستخدمًا الاستنتاج الرياضي وفق الآتي:

أ. أثبت أن $\langle \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle = 0$.

ب. افترض أن $\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ لكل $k \le l$ و $j = 1, 2, \ldots, k$، وأثبت أن هذا يؤدي إلى أن $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ لكل $j = 1, 2, \ldots, l$.

ج. أثبت أن $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(l+1)} \rangle = 0$.

6.7 مسح للطرائق والبرمجيات Survey of Methods and Software

درسنا في هذا الباب أساليب تكرار لتقريب حل الأنظمة الخطية. وبدأنا بطريقة جاكوبي وطريقة جاوس – سيدل لتقديم طرائق التكرار. وتتطلب كلتا الطريقتين تقريبًا ابتدائيًّا عشوائيًّا $\mathbf{x}^{(0)}$ وتوليد متتالية من المتجهات $\mathbf{x}^{(i+1)}$ مستخدمين معادلة بالصيغة

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = T\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{c}$$

ولقد لُوحظ أن الطريقة ستتقارب إذا وفقط إذا كان نصف القطر الطبيعي لمصفوفة التكرار $\rho(T) < 1$، وكلما كان نصف القطر الطبيعي أصغر كان التقارب أسرع. وإن تحليل متجهات البواقي لأسلوب جاوس–سيدل أدّى إلى طريقة SOR للتكرار، التي تتضمن المتغيرة ω لتسريع التقارب. إن طرائق التكرار وتعديلاتها هذه تُستخدم بصورة واسعة في حلول الأنظمة الخطية التي تبرز في الحلول العددية لمسائل قيمة الحد والمعادلات التفاضلية الجزئية (انظر البابين 11 و 12). وغالبًا ما تكون هذه الأنظمة كبيرة جدًّا، حيث تعد 10,000 معادلة في 10,000 من

عمل ألكسي نيكولفج كريلوف (1863-1945) Aleksey Nikolayevich Krylov في الرياضيات التطبيقية وخصوصا في مجال مسائل القيمة الحدية. تسريع تقارب سلاسل فورير Fourier ومسائل كلاسيكية مختلفة تتضمن نظما رياضية. وخلال بداية الـ 1930 كان مديرا لمعهد الرياضيات الفيزيائية التابع لأكاديمية العلوم السوفيتية.

المجاهيل ومتشعبة بعناصرها اللاصفرية في مواقع قابلة للتنبؤ. وإن طرائق التكرار مفيدة أيضًا في أنظمة متشعبة وأخرى كبيرة، ومن السهولة تبنيها لاستخدامها جيدًا في الحاسبات المتوازية.

إن البرمجيات السائدة جميعها التجارية والعامة التي تتضمن طرائق تكرار لحلِّ النظام الخطي لمعادلات ما غالبًا ما تتطلب اشتراطًا مسبقًا لاستخدامها مع تلك الطرائق. وغالبًا ما يمكن تحقيق تقارب أسرع لأدوات حل التكرار من خلال استخدام اشتراط مسبق، فالاشتراط المسبق ينتج نظامًا مكافئًا من المعادلات التي من المؤمل أن تساهم في خصائص تقارب أفضل مما هو في النظام الأصلي. وإن مكتبة IMSL تتضمن البرنامج الفرعي PCGRC الذي هو طريقة الميل المرافق مسبق الاشتراط. وتتضمن مكتبة NAG برامج فرعية متعددة هي prefixed F11 لحلِّ التكرار لأنظمة خطية.

تستند البرمجيات الفرعية كلها إلى طرائق فضاءات Krylov الجزئية. يحتوي المرجع Saad [Sa2] وصفًا مفصلًا لطرائق فضاء Krylov الجزئي. وتتضمن برامج LINPACK و LAPACK الطرائق المباشرة لحلِّ الأنظمة الخطية فقط، وعلى الرغم من ذلك فإن البرمجيات هذه تتضمن العديد من البرامج الفرعية التي تستخدم قبل حل التكرار. إن البرمجيات السائدة العامة IML++, ITPACK, SLAP.

والقوالب تتضمن طرائق تكرار. وإن MATLAB يتضمن طرائق تكرار متعددة تستند أيضًا إلى فضاءات Krylov الجزئية. وعلى سبيل المثال، فإن الأمر $x = \mathrm{PCG}(A, b)$ ينفذ طريقة الميل المرافق المسبق الاشتراط لحلِّ النظام الخطي $Ax = b$. بعض المتغيرات المدخلة الاختيارية لـ PCG هي TOL حد السماح للتقارب، أكبر عدد من مرات التكرار MAXIT والاشتراط المسبق M.

تناولنا مفاهيم العدد الشرطي والمصفوفات الضعيفة الاشتراط في الفصل (7.4). ويتضمن العديد من البرامج الفرعية لحلِّ النظام الخطي أو لتحليل مصفوفة إلى العوامل LU فحوصًا للمصفوفات معلولة الاشتراط، وتعطي تقديرًا للعدد الشرطي كذلك.

ويحلِّل البرنامج الفرعي SGETRF في LAPACK عامليًّا المصفوفة الحقيقية A إلى العوامل LU ويعطي ترتيب الصف لمصفوفة التباديل P، حيث إن $PA = LU$. والبرنامج الفرعي SGECON يعطي مقلوب العدد الشرطي لـ A، مستخدمًا العوامل LU والمحسوبة من خلال SGETRF. يتضمن LAPACK كذلك برامج فرعية لتقدير العدد الشرطي لمصفوفات خاصة. وعلى سبيل المثال ينفذ SPOTRF عوامل شولسكي لمصفوفة إيجابية واضحة A، وإن SPOCON يقدِّر مقلوب العدد الشرطي مستخدمًا عوامل شولسكي المحسوبة من خلال SPOTRF.

إن مكتبة IMSL تتضمن برامج فرعية لتقدير العدد الشرطي. وعلى سبيل المثال يحسب LFCRG عاملية LU، $PA = LU$ للمصفوفة A، ويعطي تقدير العدد الشرطي أيضًا. ومكتبة NAG تتضمن برامج فرعية مماثلة. تتضمن LAPACK, LINPACK، مكتبة IMSL ومكتبة NAG برامج فرعية تحسّن حلّ النظام الخطي ذي الاشتراط الضعيف. وتختبر البرامج الفرعية العدد الشرطي، ثم تستخدم تنقية التكرار لإيجاد أدقِّ الحلول المحتملة وفق الدقة المنتهية للحاسبة.

ويمكن إيجاد معلومات أكثر حول استخدام طرائق التكرار لحلِّ أنظمة خطية في Varga [Var1], Young [Y], Hageman and Young [HY].

وكذلك في كتاب حديث لـ [Ax] Axelsson. تناقش طرائق التكرار لأنظمة كبيرة متفرعة في Barrett et al.[Barr], Hackbusch [Hac], Kelley [Kelley] و Saad [Sa2].

الباب

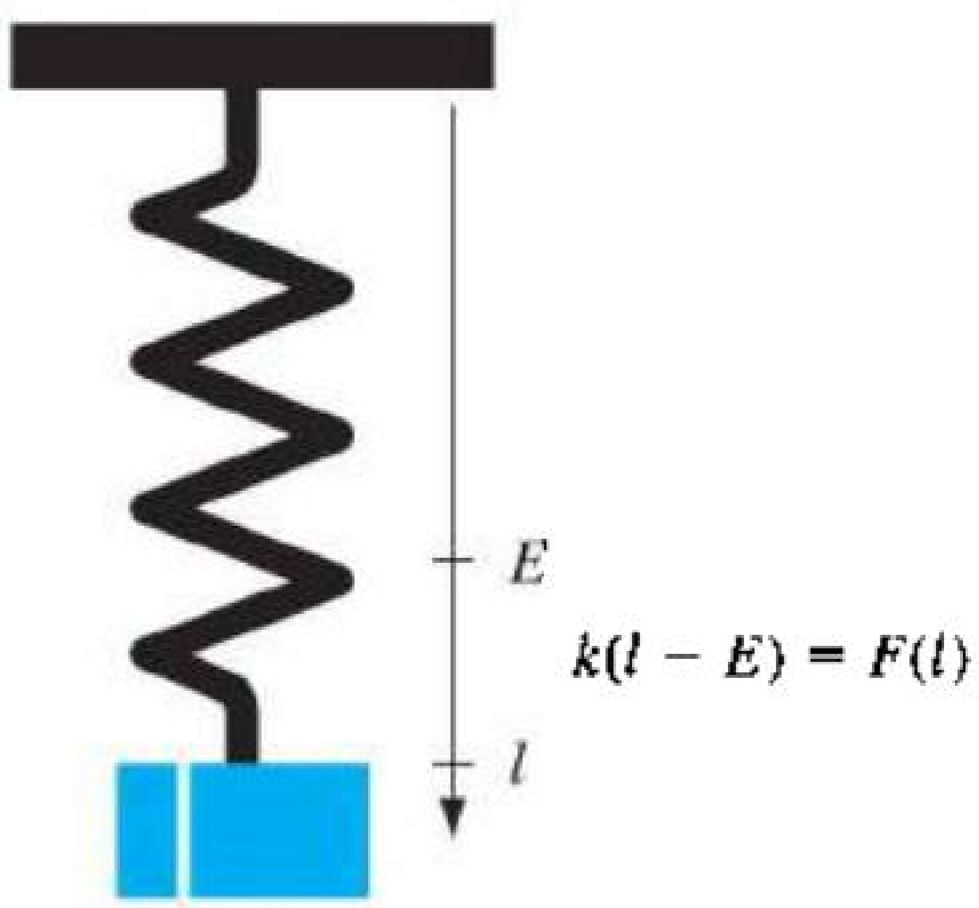
8

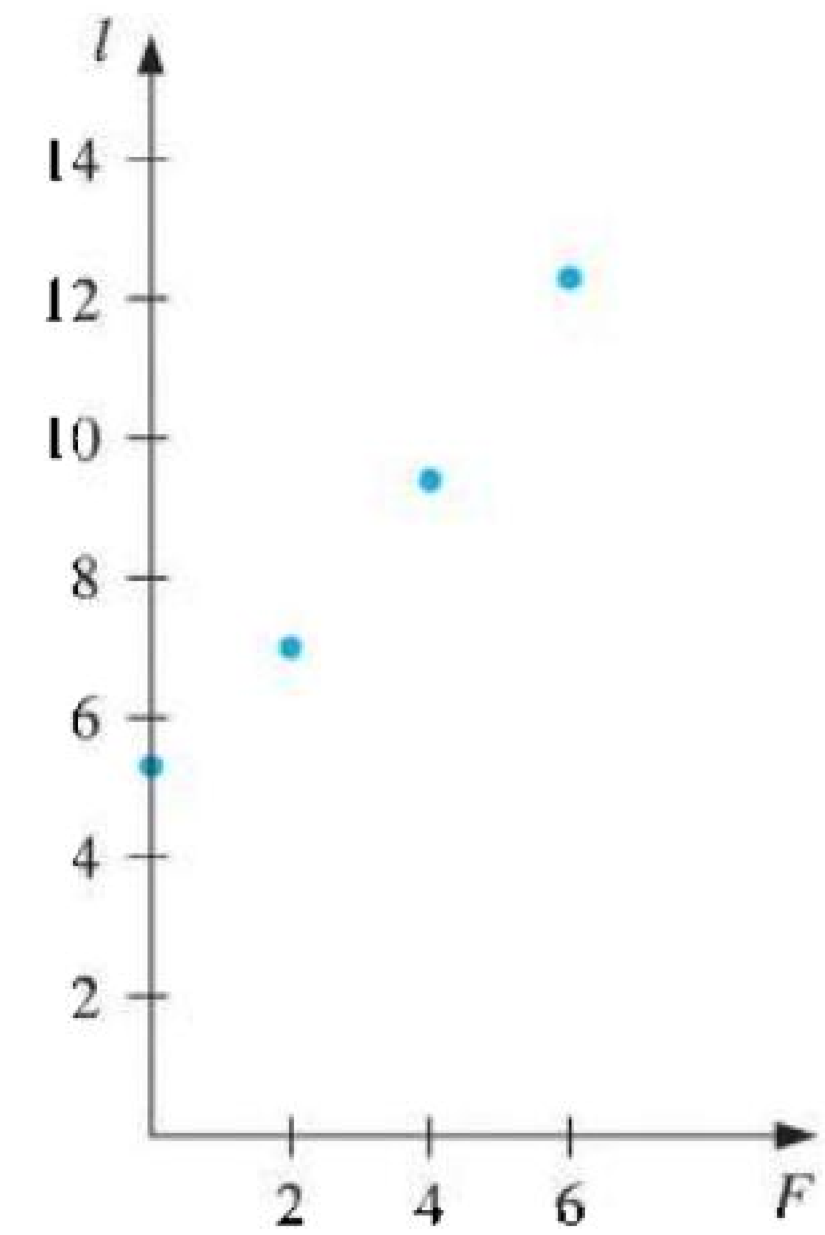
نظرية التقريب

Approximation Theory

مقدمة

ينص قانون هوك (Hooke) على أنه إذا خضع (زنبرك) نابض مصنوع من مادة متجانسة لقوة فإن طول النابض يكون دالة خطية في تلك القوة. ويمكننا كتابة الدالة الخطية بالصيغة $F(l) = k(l - E)$ حيث تمثل $F(l)$ القوة اللازمة لمدّ النابض l من الوحدات، أما الثابت E فيمثل طول النابض قبل تطبيق القوة عليه، والثابت k هو ثابت النابض.





افترض أننا نريد تحديد ثابت النابض لنابض طوله الابتدائي 5.3 in. نطبّق عليه القوى 2، 4 و 6 باوندات، ونجد أن طوله ازداد إلى 7.0 . 9.4 و 12.3 إنشًا على التوالي. ويظهر بعد التفحص السريع أن النقاط (0,5.3) ، (2,7.0) ، (4,9.4) و (6,12.3) لا تقع بالضبط على خط مستقيم.

وعلى الرغم من إمكانية استخدام زوج عشوائي من نقاط البيانات لتقريب ثابت النابض ببساطة، فقد تبين أنه من المعقول أكثر أن الخط الذي يقرّب نقاط البيانات جميعها لتحديد الثابت هو الأفضل. إن هذا النوع من التقريب هو ما سيُناقَش في هذا الباب، وإن تطبيق النابض هذا موجود في التمرين (7) من الفصل (1.8).

إن دراسة مبرهنة التقريب تنطوي على نوعين عامين من المسائل؛ واحدة من هذه المسائل تظهر عندما يعطى الدالة (الدالّة) صراحة، ولكننا نود لنوجد الدالة المعطاة. نوعًا أبسط من الدوال مثل كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتحديد قيم تقريبية للدالة المعطاة. وتعنى المسألة

الأخرى في مبرهنة التقريب بمطابقة دالة لبيانات معلومة، وإيجاد أحسن دّالة في فئة محددة ليمثِّل البيانات.

ولقد تناولنا هاتين المسألتين في الباب (3). إن كثيرة حدود تايلور من الرتبة n حول العدد x_0 هي التقريب المتميز للدالة f القابل للاشتقاق $(n+1)$ مرّة في جوار صغير للقيمة x_0.

لقد بُحثت كثيرات حدود لاجرنج أو كثيرات الحدود عمومًا بوصفها كثيرات حدود للتقريب، وكثيرات حدود تستخدم لمطابقة بيانات محددة. وكذلك بحث في الشريحة المكعب في تلك الباب. وفي هذه الباب ستُناقَش التحديدات على هذه الطرائق، وسنتطرق إلى جوانب أخرى كذلك.

1.8 تقريب المربعات الصغرى المنفصلة
Discrete Least Squares Approximation

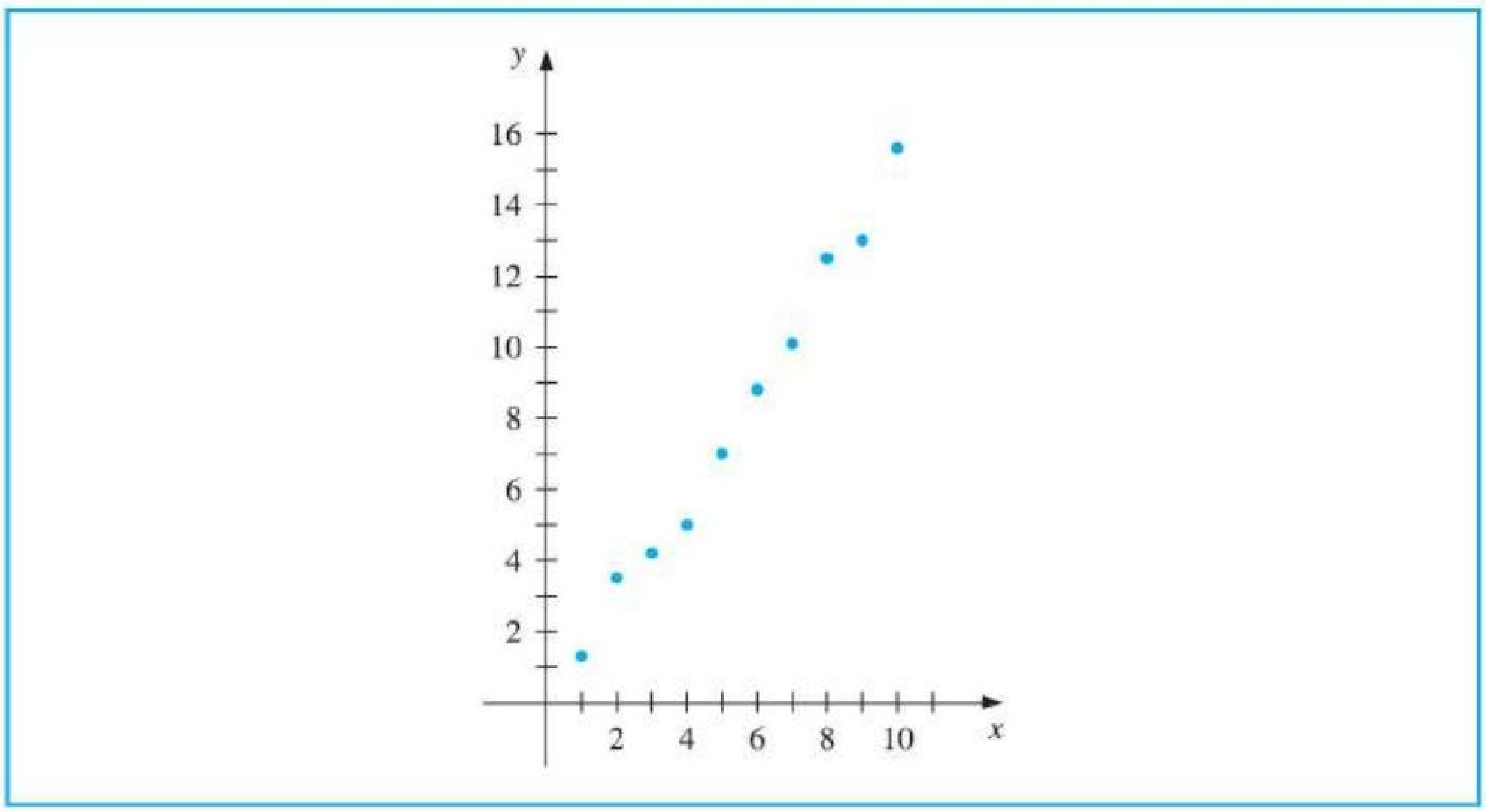
افترض مسألة تقدير قيم دّالة (دّالة) عند نقاط غير مجدولة إذا أعطيت البيانات التجريبية في جدول (1.8).

يظهر في شكل (1.8) الرسم البياني للقيم في جدول (1.8)، ويظهر من هذا الرسم أن العلاقة بين x و y خطية. ومن المحتمل أن عدم وقوع النقاط على خط مستقيم بالضبط يرجع إلى وجود أخطاء في البيانات. ولذلك فليس من المعقول أن نطلب موافقة دالة التقريب للبيانات بالضبط. وفي الحقيقة إن مثل هذا الدالة سيدخل ترددات لم تكن موجودة في الأصل. فعلى سبيل المثال، وُجدت كثيرة حدود من الرتبة التاسعة المرسومة في شكل (2.8) لوصف البيانات في جدول (1.8) دون محددات من Maple باستخدام الأوامر

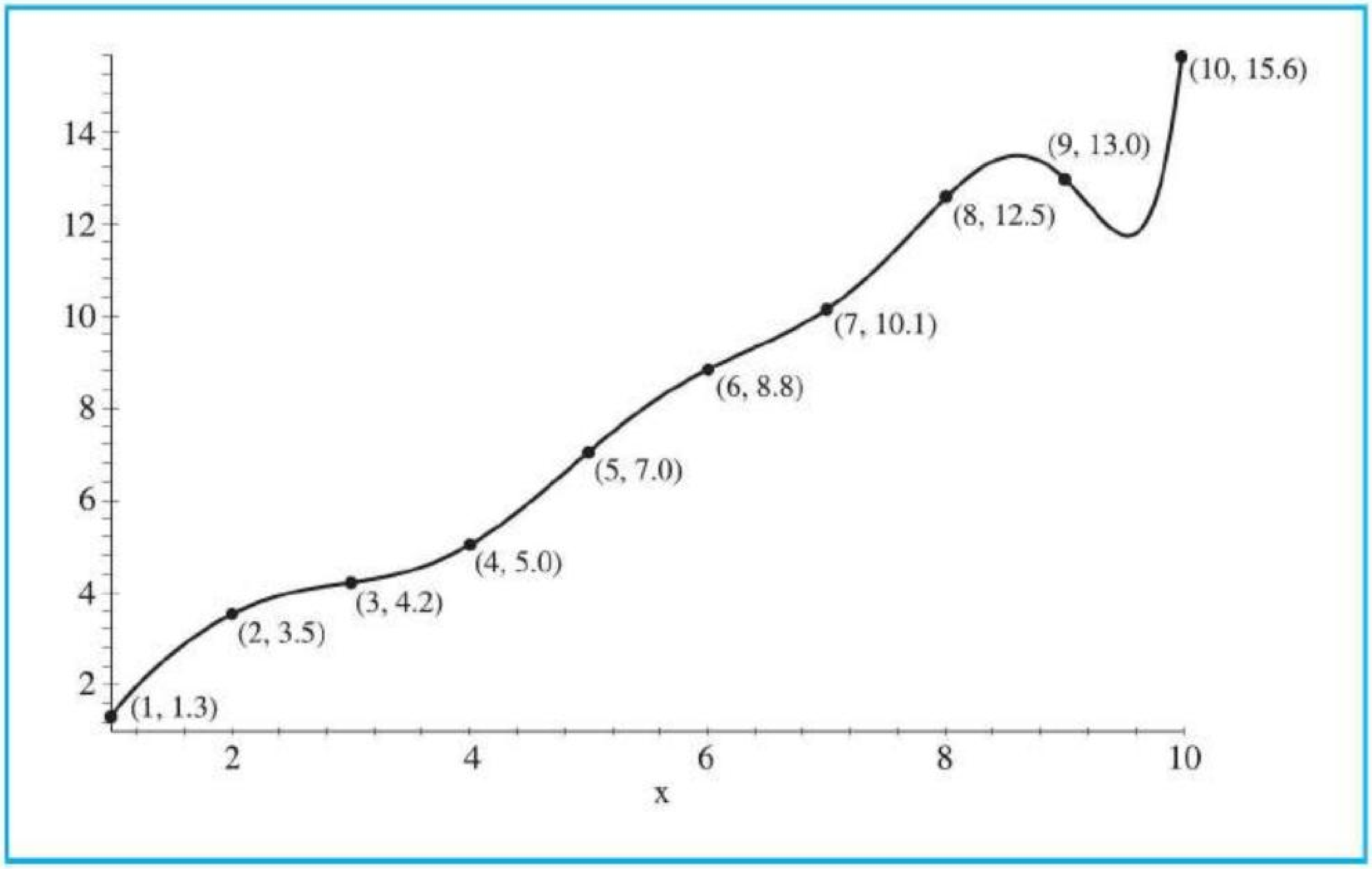
```
>p:=interp([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],
           [1.3,3.5,4.2,5.0,7.0,8.8,10.1,12.5,13.0,15.6],x);
>plot({p},x=1..10);
```

جدول 1.8

x_i	y_i	x_i	y_i
1	1.3	6	8.8
2	3.5	7	10.1
3	4.2	8	12.5
4	5.0	9	13.0
5	7.0	10	15.6



شكل 1.8



شكل 2.8

إن كثيرة الحدود هذه متنبّأ ضعيف للمعلومات بين عدد من نقاط البيانات A. وتكون الطريقة الفضلى بإيجاد الخط الأفضل (بجانب معين) للتقريب، حتى لو لم ينطبق تمامًا مع البيانات عند أي نقطة.

افترض أن $a_1x_i + a_0$ يمثّل القيمة ذات العدد i على خط التقريب، وتمثّل y_i قيمة y الفعلية ذات العدد i.

إن مسألة إيجاد معادلة أحسن تقريب خطي بالمعنى المطلق تتطلب إيجاد القيمتين a_0 و a_1 اللتين تجعلان

$$E_\infty(a_0, a_1) = \max_{1 \le i \le 10} \{|y_i - (a_1x_i + a_0)|\}$$

أصغر ما يمكن.

وعادة ما تُعرف هذه بمسألة أصغر العظميات (minimax problem)، ولا تعالج بالطرائق الابتدائية.

وهناك طريقة أخرى لتحديد أحسن تقريب خطي، وهي التي تتطلب إيجاد القيمتين a_0 و a_1 اللتين تجعلان

$$E_1(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1x_i + a_0)|$$

أصغر ما يمكن.

إن هذا المقدار يُسمى الانحراف المطلق (absolute deviation) لإيجاد القيمة الصغرى لدالة في متغيرين، ونحتاج إلى إيجاد المشتقات الجزئية له، ونضع كلاًّ منهما مساويًا للصفر، ثم نحل المعادلتين الآتيتين الناتجتين.

في حالة الانحراف المطلق، نحتاج إلى إيجاد a_0 و a_1 بحيث

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1}\sum_{i=1}^{10}|y_i - (a_1x_i + a_0)| \quad \text{و} \quad 0 = \frac{\partial}{\partial a_0}\sum_{i=1}^{10}|y_i - (a_1x_i + a_0)|$$

وتكمن الصعوبة هنا في عدم قابلية دالة القيمة المطلقة للاشتقاق عند الصفر، ومن الممكن ألا نتمكن من إيجاد حل لهاتين المعادلتين.

إن طريقة المربعات الصغرى (least squares) لهذه المسألة تتطلب إيجاد أفضل خط للتقريب عندما يكون الخطأ مساويًا لمجموع مربعات الفروق بين قيم y المعطاة وقيم y على خط التقريب.

ومن ثم يجب إيجاد الثابتين a_0 و a_1 اللذين يجعلان خطأ المربعات الصغرى

$$E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10}[y_i - (a_1x_i + a_0)]^2$$

أصغر ما يمكن.

إن طريقة المربعات الصغرى تعد الطريقة الفضلى لتحديد أفضل تقريبات خطية، بالإضافة إلى أن افتراضات مبرهنة تفضّل هذه الطريقة أيضًا.

إن طريقة أصغر العظميات عادة ما تعين وزنًا كبيرًا جدًا، حيث لا تعطي طريقة الانحراف المطلق وزنًا كافيًا للنقطة التي تكون بعيدة جدًا عن خط التقريب.

وإن طريقة المربعات الصغرى تعطي وزنًا أكبر للنقطة التي تكون خارج الخط مع البيانات الأخرى، ولكنها لا تسمح لتلك النقطة بأن تطغى على التقريب كليًا.

وهناك سبب آخر لاعتماد طريقة المربعات الصغرى، وهو دراسة التوزيع الإحصائي للخطأ. (انظر Lar, pp. 463–481)

إن المسألة العامة لمطابقة أحسن خط مستقيم بطريقة المربعات الصغرى لمجموعة من البيانات $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{m}$ تتطلب تصغير الخطأ التام

$$E \equiv E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{m}[y_i - (a_1x_i + a_0)]^2$$

بالنسبة إلى الوسيطات (البرامترات) a_0 و a_1.

وللحصول على القيمة الصغرى؛ نحتاج إلى

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_0}\sum_{i=1}^{m}[(y_i - (a_1x_i - a_0)]^2 = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_1x_i - a_0)(-1)$$

و

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1}\sum_{i=1}^{m}[y_i - (a_1x_i + a_0)]^2 = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_1x_i - a_0)(-x_i)$$

ويمكن تبسيط هاتين المعادلتين للحصول على المعادلتين القانونيتين (normal equations)

$$a_0\sum_{i=1}^{m}x_i + a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^2 = \sum_{i=1}^{m}x_iy_i \quad \text{و} \quad a_0\cdot m + a_1\sum_{i=1}^{m}x_i = \sum_{i=1}^{m}y_i$$

إن كلمة "Normal" المستخدمة هنا تعني التعامد. ويمكن إيجاد المعادلات المتعامدة عن طريق إيجاد اتجاهات متعامدة لسطح متعدد الأبعاد.

إن حل هذا النظام من المعادلات هو

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m}x_i^2\sum_{i=1}^{m}y_i - \sum_{i=1}^{m}x_iy_i\sum_{i=1}^{m}x_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2} \tag{1.8}$$

و

$$a_1 = \frac{m\sum_{i=1}^{m}x_iy_i - \sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{i=1}^{m}y_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2} \tag{2.8}$$

مثال 1

لديك البيانات في جدول (1.8)، ولإيجاد خط التقريب لهذه البيانات بطريقة المربعات الصغرى أكمل جدولًا، واجمع العمودين الثالث والرابع كما في جدول (2.8).

جدول 2.8

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$P(x_i) = 1.538x_i - 0.360$
1	1.3	1	1.3	1.18
2	3.5	4	7.0	2.72
3	4.2	9	12.6	4 25
4	5.0	16	20.0	5 79
5	7.0	25	35.0	7.33
6	8.8	36	52.8	8.87
7	10.1	49	70 7	10.41
8	12.5	64	100.0	11.94
9	13.0	81	117.0	13.48
10	15.6	100	156.0	15.02
55	81.0	385	572.4	$E_2 = \sum_{i=1}^{10}(y_i - P(x_i))^2 \approx 2.34$

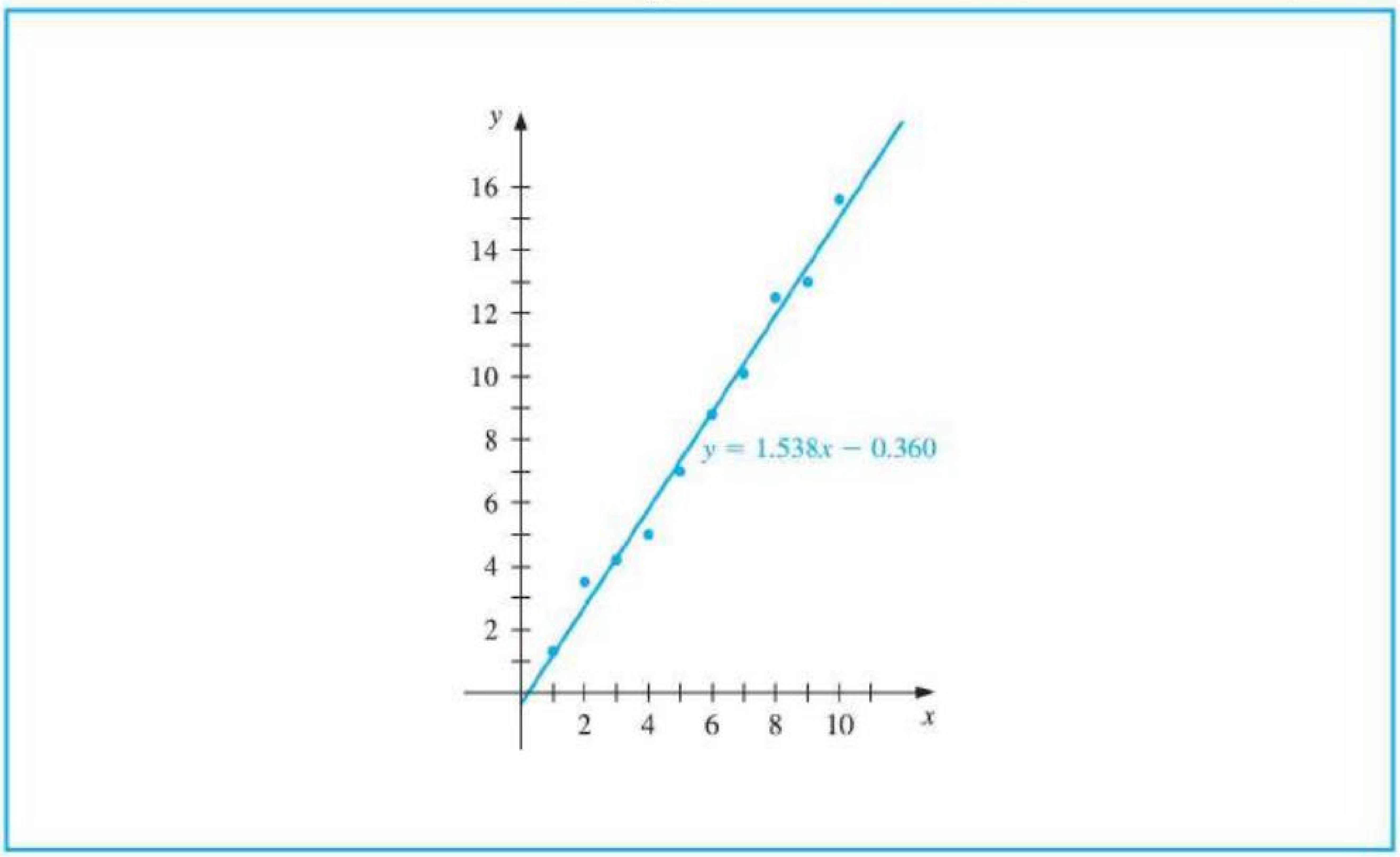
إن المعادلتين القانونيتين (1.8) و (2.8) تعطيان

$$a_1 = \frac{10(572.4) - 55(81)}{10(385) - (55)^2} = 1.538 \quad \text{و} \quad a_0 = \frac{385(81) - 55(572.4)}{10(385) - (55)^2} = -\,0.360$$

ولذلك $P(x) = 1.538x - 0.360$

إن رسم هذا الخط المستقيم ونقاط البيانات تظهر في شكل (3.8). ■

شكل 3.8



تُعرض القيم التقريبية المقابلة لنقاط البيانات التي نحصل عليها بطريقة المربعات الصغرى في جدول (2.8).

تعالَج المسألة العامة لتقريب مجموعة من البيانات $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ في كثيرة حدود جبرية

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

من الرتبة $n < m - 1$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى بطريقة مماثلة.

نختار $a_0, a_1, \ldots, a_n$ لجعل خطأ المربعات الصغرى الآتية أصغر ما يمكن:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \sum_{i=1}^{m}(y_i - P_n(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} P_n(x_i)\, y_i + \sum_{i=1}^{m}(P_n(x_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j\left(\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j\right) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}\right)
\end{aligned}$$

وكما هو الأمر في الحالة الخطية، لجعل E_2 أصغر ما يمكن يكون من الضروري وضع $\partial E_2/\partial a_j = 0$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ وهكذا، لكل j يكون

$$0 = \frac{\partial E_2}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}$$

إن هذا يعطي $n + 1$ من المعادلات القانونية بمجاهيل a_j عددها $n + 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, n \tag{3.8}$$

جدول 3.8

i	x_i	y_i
1	0	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

ومن المفيد أن نكتب المعادلات كما يلي:

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^n &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0 \\
a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1 \\
a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n
\end{aligned}$$

يوجد لهذه المعادلات القانونية حلٌّ وحيد، إلا أن المجاهيل x_i متميزة ومختلفة بعضها عن بعض. (انظر تمرين 14).

مثال 2

طبّق كثيرة الحدود المنفصلة من الرتبة الثانية على البيانات في جدول (3.8) باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

من الواضح في هذه المسألة أن $n = 2, m = 5$. والمعادلات القانونية الثلاث هي

$$\begin{aligned}
5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 &= 8.7680 \\
2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 &= 5.4514 \\
1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 &= 4.4015
\end{aligned}$$

ويمكننا أيضًا حلُّ هذا النظام باستخدام CAS في Maple، فنعرّف أولًا المعادلات

```
>eq1:=5*a0+2.5*a1+1.875*a2=8.7680;
>eq2:=2.5*a0+1.875*a1+1.5625*a2=5.4514;
>eq3:=1.875*a0+1.5625*a1+1.3828*a2=4.4015;
```

لحلِّ هذا النظام؛ ندخل

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{a0,a1,a2});
```

الذي يعطي باستخدام Digits:=5

$$a_2 = 0.84316 \text{ و } a_1 = 0.86468\,,\ a_0 = 1.0051$$

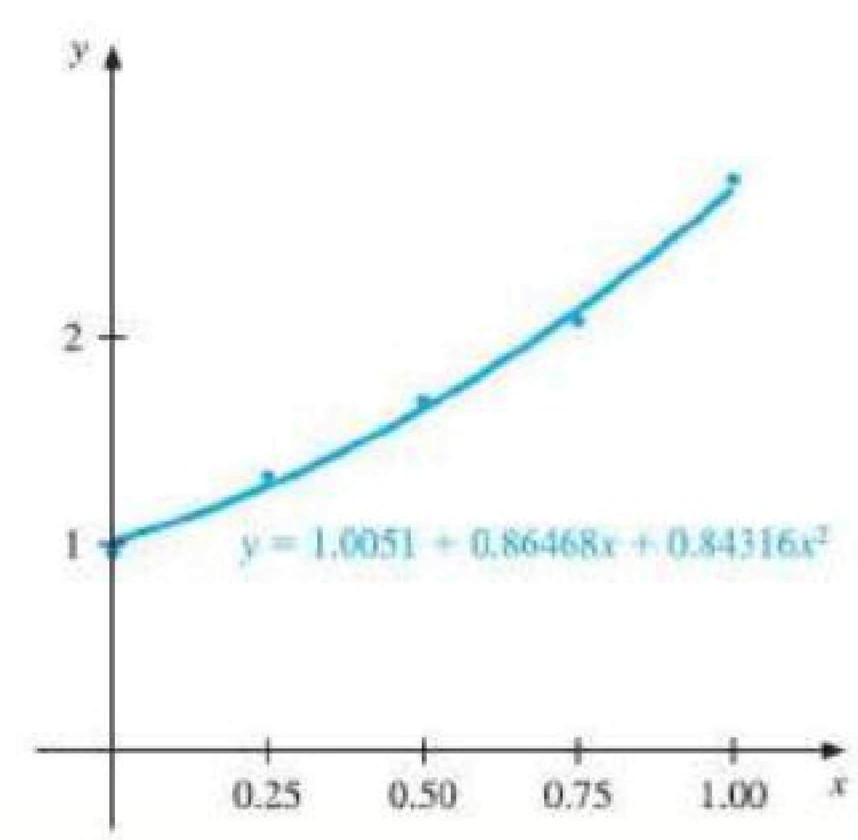
وهكذا فإن كثيرة الحدود من الرتبة 2 الناتجة بطريقة المربعات الصغرى المنطبقة على البيانات السابقة هي $P_2(x) = 1.0051 + 0.86468x + 0.84316x^2$ ويظهر رسمه البياني (منحناه) في شكل (4.8). إن القيم التقريبية المقابلة للقيم x_i تظهر في جدول (4.8).

إن الخطأ التام

$$E_2 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - P(x_i))^2 = 2.74 \times 10^{-4}$$

هو أصغر ما يمكن الحصول عليه باستخدام كثيرة حدود من الرتبة 2 على الأكثر. ■

شكل 4.8



جدول 4.8

5	4	3	2	1	i
1.00	0.75	0.50	0.25	0	x_i
2.7183	2.1170	1.6487	1.2840	1.0000	y_i
2.7129	2.1279	1.6482	1.2740	1.0051	$P(x_i)$
0.0054	−0.0109	0.0004	0.0100	−0.0051	$y_i - P(x_i)$

ويوجد في Maple دّالة تسمى fit في مكتبة الإحصاء stats library لحساب التقريبات المنفصلة بطريقة المربعات الصغرى.

ويمكننا حساب التقريب في مثال (2) باستخدام Maple code (كود مابل) ومكتبة الإحصاء stats library بالأوامر

```
>with(stats)
>xvals:=[0,0.25,0.5,0.75,1];
>yvals:=[1,1.284,1.6487,2.117,2.7183];
>z:=fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^2 + b*x + c, {a,b,c}]]
          ([xvals,yvals]);
```

تعطي Maple تمهيدية

$$z := \ y = .8436571429x^2 + .8641828571x + 1.005137143.$$

وللحصول على التقريب $y(1.7)$، ندخل

```
>evalf(subs(x = 1.7,z))
```

لنحصل على $y = 4.912417143$

يكون من المناسب أحيانًا افتراض أن البيانات مرتبطة أسيًّا. إن هذا يتطلب أن تكون دالة التقريب على الصيغة

$$y = be^{ax} \tag{4.8}$$

أو

$$y = bx^a \tag{5.8}$$

للثابتين a و b.

إن الصعوبة في تطبيق طريقة المربعات الصغرى في أحوال هذا النوع تأتي من محاولة جعل الأخطاء الآتية أصغر ما يمكن:

$$E = \sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})^2$$ في حالة المعادلة (4.8)

أو

$$E = \sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)^2$$ في حالة المعادلة (5.8)

إن المعادلات القانونية المرتبطة بهذه الطرائق نحصل عليها من

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})(-e^{ax_i}) \quad \text{و} \quad 0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})(-bx_ie^{ax_i})$$

في حالة المعادلة (4.8)

أو من المعادلتين

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)(-x_i^a) \quad \text{و} \quad 0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)(-b(\ln x_i)x_i^a)$$

في حالة المعادلة (5.8).

ولا يوجد حل صحيح لأي من هذين النظامين في a و b.

عندما يظن أن البيانات مرتبطة أسيًّا، فإن الطريقة الشائعة الاستخدام تكون باستخدام اللوغارتمات للمعادلة التقريبية

$\ln y = \ln b + ax$ في حالة المعادلة (4.8)

و $\ln y = \ln b + a \ln x$ في حالة المعادلة (5.8).

تظهر الآن مسألة خطية في كلا الحالتين، ويمكن الحصول على الحل لكل من $\ln b$ و a عن طريق تعديل المعادلتين القانونيتين (1.8) و (2.8) بصورة مناسبة.

على كل حال، فالتقريب الناتج عن هذه الطريقة ليس تقريبًا بطريقة المربعات الصغرى للمسألة الأصلية، وهو يختلف عن التقريب بطريقة المربعات الصغرى للمسألة الأصلية اختلافًا جذريًّا. ويشرح التطبيق في التمرين (13) مسألة من هذا النوع.

سيُرجع إلى هذا التطبيق في التمرين (14) من الفصل (3.10)، حيث يقرّب الحل الصحيح لمسألة المربعات الصغرى الأسيّة باستخدام طرائق ملائمة لحل أنظمة المعادلات غير الخطية.

مثال 3 لديك مجموعة البيانات في الأعمدة الثلاثة الأولى من اليسار في جدول (5.8).

جدول 5.8

$x_i \ln y_i$	x_i^2	$\ln y_i$	y_i	x_i	i
1.629	1.0000	1.629	5.10	1.00	1
2.195	1.5625	1.756	5.79	1.25	2
2.814	2.2500	1.876	6.53	1.50	3
3.514	3.0625	2.008	7.45	1.75	4
4.270	4.0000	2.135	8.46	2.00	5
14.422	11.875	9.404		7.50	

لو رسمنا x_i مع $\ln y_i$ لأظهرت البيانات علاقة خطية بينها، ولذلك فمن المعقول افتراض تقريب على الصيغة

$$\ln y = \ln b + ax \quad \text{أو} \quad y = be^{ax}$$

وبإكمال جدول وجمع الأعمدة المناسبة، نحصل على البيانات المتبقية في جدول (5.8).

باستخدام المعادلات القانونية (1.8) و (2.8) نحصل على

$$a = \frac{(5)(14.422) - (7.5)(9.404)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 0.5056$$

و

$$\ln b = \frac{(11.875)(9.404) - (14.422)(7.5)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 1.122$$

بما أن $b = e^{1.122} = 3.071$ فإن التقريب يأخذ الصيغة

$$y = 3.071e^{0.5056x}$$

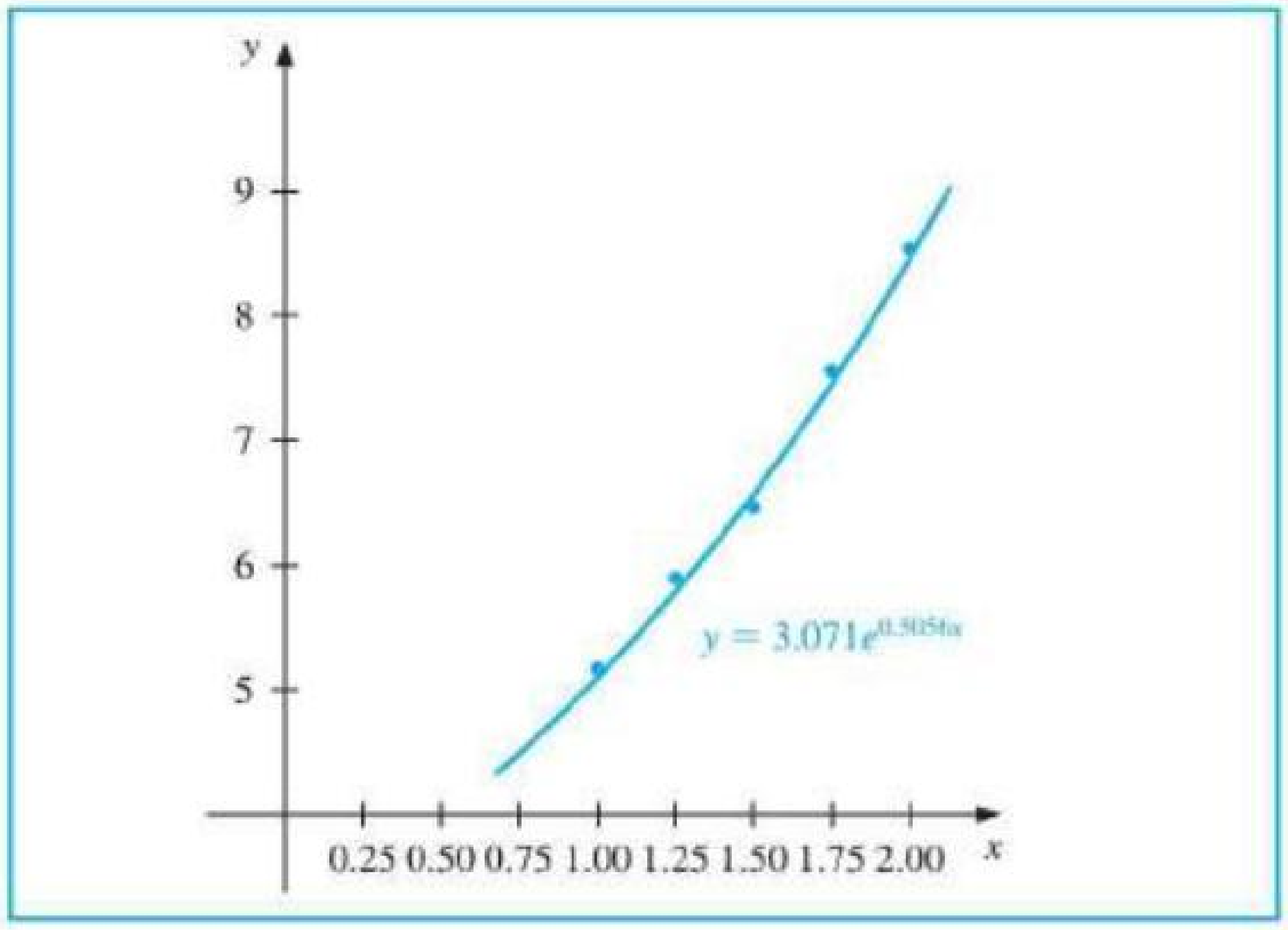
الذي يعطي القيم المقابلة لنقاط البيانات كما في جدول (6.8). ■

(انظر شكل 5.8)

جدول 6.8

$3.071e^{0.5056x_i}$	y_i	x_i	i
5.09	5.10	1.00	1
5.78	5.79	1.25	2
6.56	6.53	1.50	3
7.44	7.45	1.75	4
8.44	8.46	2.00	5

شكل 5.8



EXERCISE SET مجموعة التمارين 1.8

1. احسب كثيرة حدود خطية ذات مربعات صغرى للبيانات في مثال (2).
2. احسب كثيرة الحدود من الرتبة 2 ذات المربعات الصغرى للبيانات في مثال (1)، وقارن الخطأ التام لكلتا كثيرتي الحدود.
3. أوجد كثيرات الحدود ذات المربعات الصغرى ومن الدرجات 1، 2 و 3 للبيانات في جدول الآتي:

2.1	1.9	1.5	1.3	1.1	1.0	x_i
3.18	2.94	2.45	2.21	1.96	1.84	y_i

احسب الخطأ في كل حالة، وارسم شكل انتشار البيانات كثيرات الحدود جميعها.

4. أوجد كثيرات الحدود ذات المربعات الصغرى من الدرجات 1، 2 و 3 للبيانات في جدول الآتي:

0.75	0.6	0.5	0.31	0.15	0	x_i
1.422	1.223	1.117	1.031	1.004	1.0	y_i

احسب الخطأ في كل حالة، وارسم شكل انتشار البيانات، وكثيرات الحدود.

5. لديك البيانات

7.1	6.8	6.3	5.9	5.5	5.1	4.7	4.5	4.2	4.0	x_i
326.72	299.50	256.73	224.87	195.14	167.53	142.05	130.11	113.18	102.56	y_i

أ. أوجد كثيرة الحدود ذات المربعات الصغرى من الرتبة 1، واحسب الخطأ.

ب. أوجد كثيرة الحدود ذات المربعات الصغرى من الرتبة 2، واحسب الخطأ.

ج. أوجد كثيرة الحدود ذات المربعات الصغرى من الرتبة 3، واحسب الخطأ.

د. أوجد التقريب بالمربعات الصغرى على الصيغة be^{ax}، واحسب الخطأ.

هـ. أوجد التقريب بالمربعات الصغرى على الصيغة bx^a، واحسب الخطأ.

6. كرِّر التمرين 5 للبيانات الآتية:

x_i	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
y_i	0.050446	0.098426	0.33277	0.72660	1.0972	1.5697	1.8487	2.5015

7. وُصِفت تجربة في المثال في مقدمة هذا الفصل، لتحديد ثابت النابض k في قانون هوك

$$F(l) = k(l - E)$$

الدالة F هي القوة اللازمة لمد النابض l من الوحدات، حيث إن الثابت $E = 5.3$ إنشات هو طول النابض قبل المد.

أ. افترض أن القياسات أخذت لطول النابض l إنشًا، وفق الأوزان المستخدمة $F(l)$ باوند كما في جدول الآتي:

$(l)F$	2	4	6
1	7.0	9.4	12.3

أوجد تقريب المربعات الصغرى للثابت k.

ب. أخذت قياسات أخرى، وأُعطيت البيانات الإضافية

10	8	5	3	$F(l)$
15.9	14.4	11.3	8.3	l

احسب تقريب المربعات الصغرى الجديد للثابت k. أي من الإجابات في (أ) أو (ب) تعطي المطابقة الفضلى للبيانات الكلية للتجربة؟

8. تحتوي القائمة الآتية درجات الواجب ودرجات الامتحان النهائي لثلاثين طالبًا من

التحليل العددي، أوجد معادلة الخط المستقيم بالمربعات الصغرى لهذه البيانات، واستخدم هذا الخط لإيجاد رتبة الواجب Homework اللازمة للتنبؤ بأقل رتبة. نحصل على الرتبةA (90%) والدرجة D (60%) في الامتحان النهائي Final.

الواجب المنزلي	النهائي	الواجب المنزلي	النهائي
302	45	323	83
325	72	337	99
285	54	337	70
339	54	304	62
334	79	319	66
322	65	234	51
331	99	337	53
279	63	351	100
316	65	339	67
347	99	343	83
343	83	314	42
290	74	344	79
326	76	185	59
233	57	340	75
254	45	316	45

9. يبين الجدول الآتي المعدل بالنقاط (Grade -point average) للتخصصين: الرياضيات والحاسوب مع علامات هؤلاء الطلبة لجزء الرياضيات من امتحان ACT (American College Testing) عندما كانوا في المدرسة الثانوية. ارسم شكل انتشار هذه البيانات، وأوجد معادلة خط المربعات الصغرى الذي ينطبق على البيانات.

نتيجة الاختبار الأمريكي للقبول الجامعي (ACT)	المعدل بالنقاط	نتيجة الاختبار الأمريكي للقبول الجامعي (ACT)	المعدل بالنقاط
28	3.84	29	3.75
25	3.21	28	3.65
28	3.23	27	3.87
27	3.63	29	3.75
28	3.75	21	1.66
33	3.20	28	3.12
28	3.41	28	2.96
29	3.38	26	2.92
23	3.53	30	3.10
27	2.03	24	2.81

10. البيانات الآتية قدَّمت إلى لجنة عدم الثقة في مجلس النواب (Senate Antitrust Subcommittee) مؤشرات تفادي السيارات للحوادث بحسب نوع السيارة.
أوجد خط المربعات الصغرى الذي ينطبق على هذه البيانات أو يقرّبها. (إنه جدول يعطي النسبة المئوية لتورط السيارات في الحوادث التي كان أخطر نتائجها الوفاة أو الجروح البليغة).

النوع	متوسط الوزن	نسبة الحدوث
1. محلي عادي فخم	4800 lb	3.1
2. محلي عادي متوسط	3700 lb	4.0
3. محلي عادي اقتصادي	3400 lb	5.2
4. محلي صغير	2800 lb	6.4
5. أجنبي صغير	1900 lb	9.6

11. لتحديد العلاقة بين عدد السمك وعدد أنواعه، أُخذت عيّنات من **Great Barrier Reef** وطبّق **P.Sale & R.Dybdahl [SD]** كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى لمجموعة البيانات الآتية التي جُمعت على مدى سنتين. افترض أن x تمثِّل عدد العينة وy تمثِّل عدد الأنواع في العينة.

x	y	x	y	x	y
13	11	29	12	60	14
15	10	30	14	62	21
16	11	31	16	64	21
21	12	36	17	70	24
22	12	40	13	72	17
23	13	42	14	100	23
25	13	55	22	130	34

حدِّد كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى التي تنطبق على هذه البيانات.

12. لتحديد العلاقة الدالية بين معامل التخفيف **attenuation coefficient** والكثافة **Thickness** لعينة من سمك تاكونايت، طبّق **V.P.Singh[Si]** مجموعة من البيانات باستخدام كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى، وقد أخذت مجموعة البيانات الآتية من إحدى رسوم ذلك البحث. أوجد كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى المطابقة لهذه البيانات.

السمك بالسنتمتر(cm)	معامل الترقيق(dB/cm)
0.040	26.5
0.041	28.1
0.055	25.2
0.056	26.0
0.062	24.0
0.071	25.0
0.071	26.4
0.078	27.2
0.082	25.6
0.090	25.0
0.092	26.8
0.100	24.8
0.105	27.0
0.120	25.0
0.123	27.3
0.130	26.9
0.140	26.2

13. في بحث حول كفاءة استخدام يرقة العث من نوع موديست سفنكس **(Pachysphinx modesta)** للطاقة، استخدم **L.Schroeder [Schr 1]** شرويدر البيانات الآتية: W وزن اليرقة الحية بالجرام وR استهلاك اليرقة من الأكسجين باللتر/ الساعة لافتراضات بيولوجية، افترض وجود علاقة بين W و R على الصيغة $R = bW^a$.

أ. أوجد كثيرة الحدود اللوغارتمية بطريقة المربعات الصغرى باستخدام

$$\ln R = \ln b + a \ln W$$

ب. احسب الخطأ المرتبط بالتقريب في الفقرة (أ)

$$E_2 = \sum_{i=1}^{37} (R_i - bW_i^a)^2$$

ج. عدّل المعادلة اللوغارتمية بطريقة المربعات الصغرى بإضافة الحد التربيعي $c(\ln W_i)^2$، وأوجد كثيرة الحدود اللوغارتمية التربيعية بطريقة المربعات الصغرى.

د. حدِّد معادلة الخطأ المرتبطة بالتقريب في الفقرة (جـ)، واحسب قيمته.

R	W	R	W	R	W	R	W	R	W
0.234	0.025	0.180	0.020	0.181	0.020	0.23	0.025	0.154	0.017
0.537	0.233	0.299	0.119	0.260	0.085	0.357	0.111	0.296	0.087
1.47	0.783	0.428	0.210	0.334	0.171	0.366	0.211	0.363	0.174
2.48	1.35	1.15	1.32	0.87	1.29	0.771	0.999	0.531	1.11
1.44	1.69	2.83	3.34	3.59	3.04	2.01	3.02	2.23	1.74
1.84	2.75	4.15	5.48	3.40	4.29	3.28	4.28	3.58	4.09
4.66	4.83			3.88	5.30	2.96	4.58	3.52	5.45
6.94	5.53					5.10	4.68	2.40	5.96

14. برهن أن المعادلات القانونية (3.8) الناتجة عن المربعات الصغرى المنفصلة تعطي مصفوفة متماثلة وغير منفردة، ومن ثم يوجد لها حل وحيد.

[إضاءة: ضع $A = (a_{ij})$ حيث $a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_k^{i+j-2}$ و $x_1, x_2, \ldots, x_m$ متميزة حيث $n < m - 1$ افترض أن A منفردة، وأن $c \neq 0$ بحيث $c^t Ac = 0$. برهن أن كثيرة حدود من الرتبة n التي معاملاتها هي إحداثيات c لها أكثر من n من الجذور، واستخدم هذا البرهان لتحصل على تناقض].

2.8 كثيرات الحدود المتعامدة والتقريب بالمربعات الصغرى Orthogonal Polynomials and Least Squares Approximation

لقد عالج الفصل السابق موضوع التقريب بالمربعات الصغرى لتطبيق مجموعة من البيانات. ومسألة التقريب الأخرى التي ذكرت في المقدمة تُعنى بتقريب الدّوال.

ليكن $f \in C[a, b]$ والمطلوب: إيجاد كثيرة حدود $P_n(x)$ من الرتبة n على الأكثر، بحيث يجعل الخطأ

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2\, dx$$

أصغر ما يمكن.

ولتحديد كثيرة الحدود التقريبية بطريقة المربعات الصغرى؛ أي كثيرة الحدود التي تجعل التعبير السابق أصغر ما يمكن،

اجعل
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

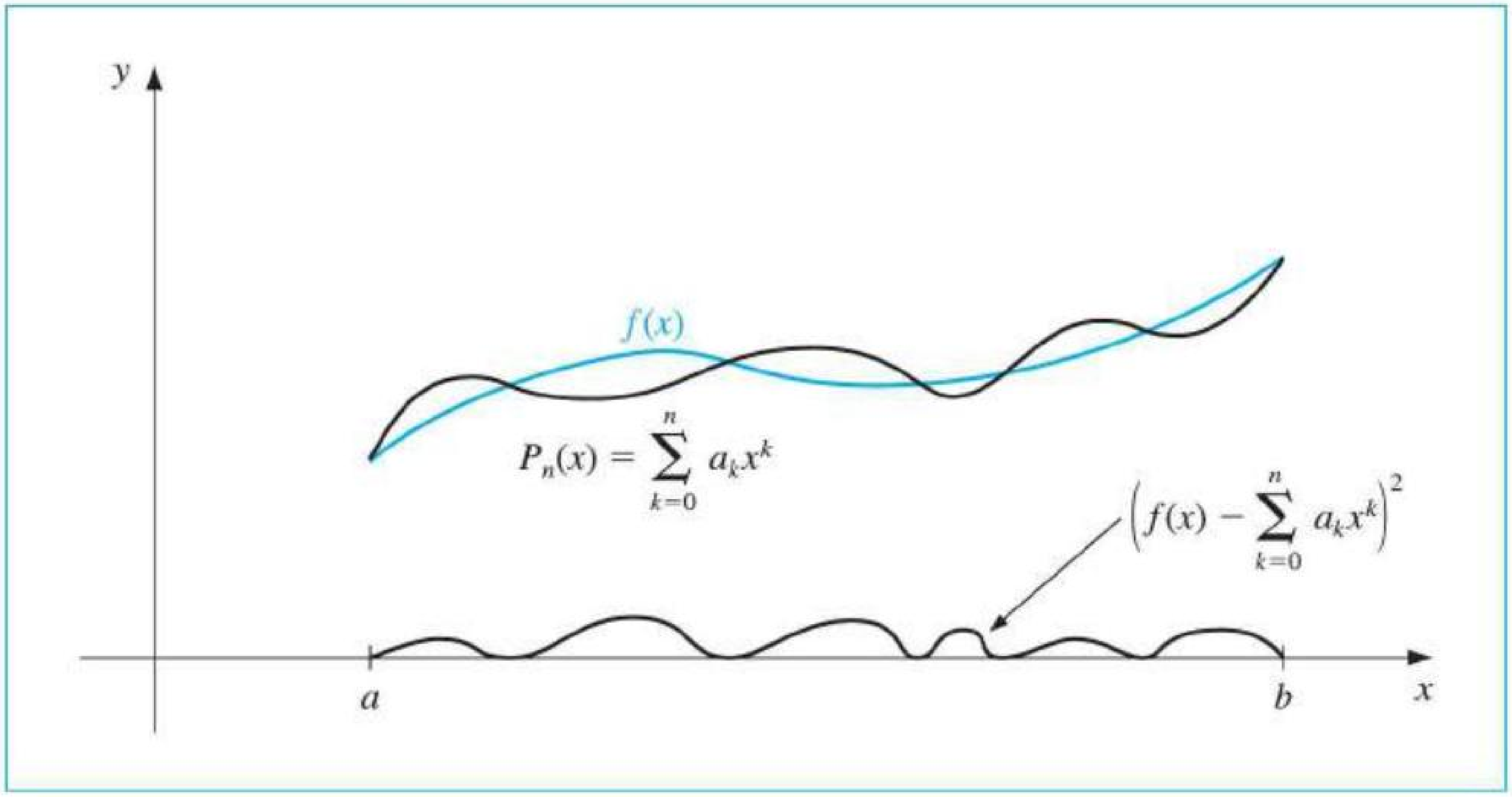
وعرّف كما يتضح من شكل (6.8)

$$E \equiv E(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 dx$$

وإن المسألة تنحصر في إيجاد المعاملات الحقيقية $a_0, a_1, \ldots, a_n$ التي تجعل E أصغر ما يمكن. إن الشرط الضروري الخاص بالأعداد $a_0, a_1, \ldots, a_n$ لتجعل E أصغر ما يمكن هو

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

شكل 6.8



بما أن

$$E = \int_a^b [f(x)]^2\,dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)\,dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 dx$$

فإننا نحصل على

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -\,2\int_a^b x^j f(x)\,dx + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\,dx$$

ولنحصل على $P_n(x)$، يجب حلُّ $(n+1)$ من المعادلات القانونية لإيجاد $(n+1)$ من المجاهيل a_j

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}dx = \int_a^b x^j f(x)\,dx \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, n \tag{6.8}$$

تمتلك المعادلات القانونية حلًّا وحيدًا دائمًا شرط أن تكون $f \in C[a, b]$. (انظر التمرين 15).

مثال 1 أوجد بطريقة المربعات الصغرى كثيرة الحدود من الرتبة الثانية التي تقرّب الدالة $f(x) = \sin \pi x$ على الفترة [0,1].

إن المعادلات القانونية لكثيرة الحدود $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ هي

$$a_0 \int_0^1 1\,dx + a_1 \int_0^1 x\,dx + a_2 \int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 \sin \pi x\,dx$$

$$a_0 \int_0^1 x\,dx + a_1 \int_0^1 x^2\,dx + a_2 \int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 x \sin \pi x\,dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^2\,dx + a_1 \int_0^1 x^3\,dx + a_2 \int_0^1 x^4\,dx = \int_0^1 x^2 \sin \pi x\,dx$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi}, \quad \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

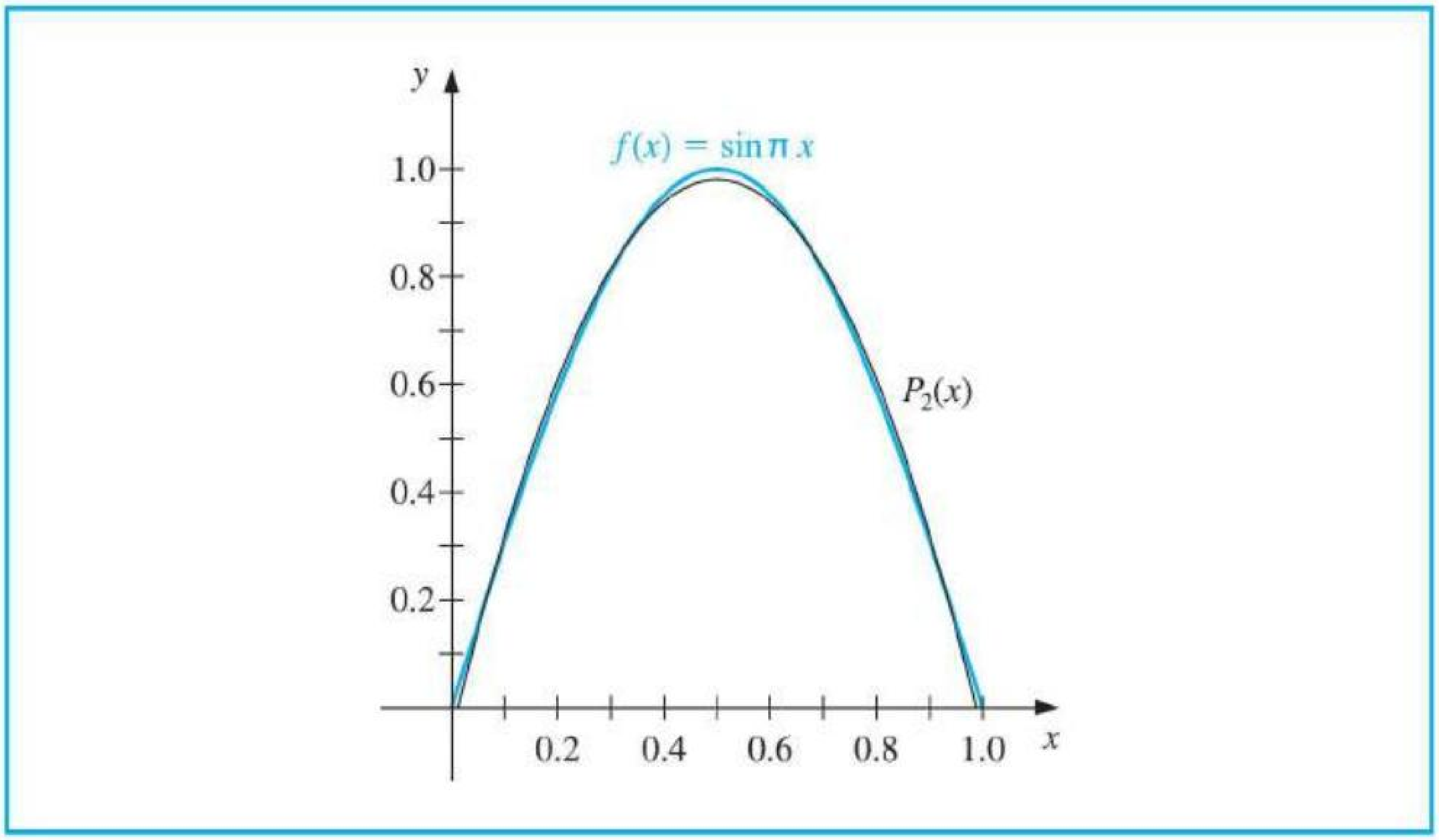
ويمكن حلُّ المعادلات الثلاث هذه بمجاهيل ثلاثة لنحصل على

$$a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251 \text{ و } a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465$$

ومن ثم فإن كثيرة الحدود من الرتبة الثانية لتقريب $f(x) = \sin \pi x$ على الفترة [0,1] هي

$$P_2(x) = -4.12251x^2 + 4.12251x - 0.050465$$ ■

(انظر شكل 7.8).



شكل 7.8

يظهر مثال (1) صعوبة في إيجاد كثيرة الحدود التقريبية بطريقة المربعات الصغرى. ويجب حل النظام الخطي $(n + 1) \times (n + 1)$ للمجاهيل $a_0, \ldots, a_n$، وإن معاملات النظام الخطي تكون على الصيغة

$$\int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j + k + 1}$$

وهي عبارة عن نظام خطي ليس من السهل إيجاد حلٍّ عددي له.

إن المصفوفة في النظام الخطي تعرف بمصفوفة هلبرت **Hilbert matrix** التي هي مثال كلاسيكي لإظهار الصعوبات في أخطاء التدوير. (انظر التمرين (11) من الفصل 4.7)

وهناك سلبية أخرى تشبه تلك التي واجهتنا عند أول تقديم لكثيرة حدود لاكرانج في الفصل (1.3). فالحسابات التي أُجريت لإيجاد أفضل كثيرة حدود من الرتبة n، $P_n(x)$ لا تقلل من مقدار العمل اللازم للحصول على كثيرة حدود من الرتبة التي تلي n، أي $P_{n+1}(x)$.

سنناقش الآن طريقة مختلفة للحصول على التقريب بالمربعات الصغرى؛ ولقد ثبت أن هذه الطريقة أكثر كفاءة، وحالما حصلنا على $P_n(x)$، تتحدّد $P_{n+1}(x)$ بسهولة. وليتيسر البحث نحتاج إلى بعض المفاهيم الجديدة.

كان دافيد هلبرت (1862-1943) David Hilbert عالم رياضيات مشهور في بداية القرن العشرين، وإن ذكرى محاضرته شائعة على نحو كبير. أما الكونجرس العلمي للرياضيين في باريس عام 1900 فقد قدّم 23 مسألة شرح عن أهميتها، ووضعها أمام علماء الرياضيات لحلها.

تعريف 1.8 تكون مجموعة الدّوال $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ مستقلة خطيًّا **linearly independent** على $[a, b]$ إذا كان الحل الوحيد للمعادلة $c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$ هو $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.
وإذا لم يكن الأمر كذلك فإن مجموعة الدّوال تكون مرتبطة خطيًّا **(linearly dependent)**.

■

مبرهنة 2.8 إذا كانت $\phi_j(x)$ كثيرة حدود من الرتبة j لكل $j = 0, 1, \dots, n$ فإن $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ مستقلة خطيًّا على أي فترة $[a, b]$. ■

البرهان افترض أن $c_0, \dots, c_n$ أعداد حقيقية بحيث

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0$$

لـ $x \in [a, b]$ جميعها

إن كثيرة الحدود $P(x)$ تتلاشى، وتكون قيمتها صفرًا على $[a, b]$، إذن يجب أن تكون كثيرة حدود صفرية، وتكون معاملات قوى x جميعها أصفارًا. ويكون معامل x^n خصوصًا صفرًا. وبما أن $c_n\phi_n(x)$ هو الحد الوحيد الذي يحوي x^n في $P(x)$ جميعها، لذا يجب أن يكون $c_n = 0$، وإن

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j\phi_j(x)$$

في هذه الصيغة لكثيرة الحدود $P(x)$ يكون $c_{n-1}\phi_{n-1}(x)$ هو الحد الوحيد الذي يحوي x^{n-1}، ولذلك فإن $c_{n-1} = 0$ ويكون $P(x)$ على الصيغة

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-2} c_j\phi_j(x)$$

وبطريقة مماثلة فإن الثوابت المتبقية $c_{n-2}, c_{n-3}, \dots, c_1, c_0$ كلها تكون أصفارًا، لذا تكون المجموعة $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ مستقلة خطيًّا. ■ ■ ■

مثال 2 ليكن $\phi_0(x) = 2, \phi_1(x) = x - 3$ و $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$. من مبرهنة **(2.8)** فإن $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ مستقلة خطيًّا على أي فترة $[a, b]$.

افترض أن $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ سنبرهن وجود ثوابت c_0, c_1 و c_2 بحيث يكون

$$Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$$

انظر أولًا

$$1 = \tfrac{1}{2}\phi_0(x), \quad x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)$$

و

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7 = \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\tfrac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$
$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \tfrac{13}{2}\phi_0(x)$$

لذلك

$$Q(x) = a_0\left[\tfrac{1}{2}\phi_0(x)\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)\right] + a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \tfrac{13}{2}\phi_0(x)\right]$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}a_0 + \tfrac{3}{2}a_1 - \tfrac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) + [a_1 - 2a_2]\,\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$$

ولذلك فإن أي كثيرة حدود تربيعية يمكن التعبير عنها بتركيب خطي من $\phi_0(x), \phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$

إن الحالة التي شرحت في مثال (2) تتحقق في حالة وضع أعم. لتكن Π_n تمثِّل مجموعة جميع كثيرات الحدود من الرتبة n على الأكثر.

إن التمهيدية الآتية تستخدم على نحو واسع في كثير من تطبيقات الجبر الخطي المطلوب برهانها في التمرين (13).

مبرهنة 3.8 إذا كانت $\phi_0(x)\ \ \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ مجموعة من كثيرات الحدود المستقلة خطيًّا في Π_n فإن أي كثيرة حدود في Π_n يمكن كتابتها بطريقة وحيدة كترتيب خطي للدوال $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$

إن البحث في تقريب الدالة يتطلب عمومًا تقديم مفاهيم دوال الوزن والتعامد. ■

تعريف 4.8 تسمى أي دالة قابل للتكامل w دالة وزن (Weight function) على الفترة I إذا كان $w(x) \geq 0$ لـ x جميعها في I، ولكن $w(x) \not\equiv 0$ على أي فترة جزئية من I.

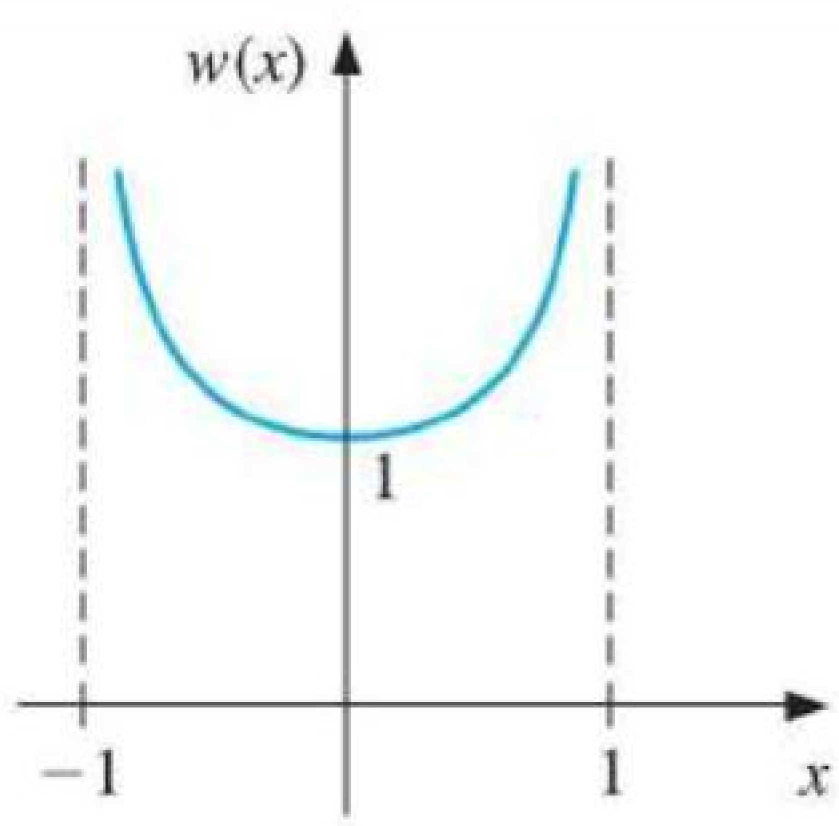
إن الهدف من دالة الوزن هو تعيين درجات مختلفة لأهمية التقريبات على أجزاء محدّدة من الفترة. ■

فعلى سبيل المثال، فإن دالة الوزن

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

يضع تركيزًا أقل بالقرب من مركز الفترة (1,1-) وتركيزًا أكبر عندما تكون $|x|$ قريبة من 1. (انظر شكل 8.8 وستُستعمل دالة الوزن هذه في الفصل الآتي:

شكل 7.8



افترض أن $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ مجموعة من الدّوال المستقلة خطيًّا على $[a, b]$, w دالة وزن على $[a, b]$، ولكل $f \in C[a, b]$ وعلينا أن نبحث عن التوليفة الخطية

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

التي تجعل الخطأ أصغر ما يمكن

$$E(a_0, \dots, a_n) = \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) \right]^2 dx$$

إن هذه المسألة تختزل إلى الحالة التي افترضناها في بداية هذا الفصل حالة خاصة عندما $w(x) \equiv 1$
و $\phi_k(x) = x^k$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$.
تشتق المعادلات القانونية المرتبطة بهذه المسألة من حقيقة أن لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ يكون

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = 2\int_a^b \omega(x)\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)\right]\phi_j(x)\,dx$$

يمكن كتابة نظام المعادلات القانونية على الصيغة

$$\int_a^b w(x)\,f(x)\phi_j(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b w(x)\phi_k(x)\,\phi_j(x)\,dx \quad \text{لكل } j = 0, 1, \ldots, n$$

إذا أمكن اختيار الدّوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ بحيث

$$\left.\begin{matrix} 0 & \text{عندما } j \neq k \\ 0 < \alpha_j & \text{عندما } j = k \end{matrix}\right\} = \int_a^b w(x)\phi_k(x)\,\phi_j(x)\,dx \qquad (7.8)$$

فإن المعادلات القانونية تختزل إلى

$$\int_a^b w(x)\,f(x)\,\phi_j(x)\,dx = a_j\int_a^b w(x)[\phi_j(x)]^2\,dx = a_j\alpha_j$$

لكل $j = 0, 1, \ldots, n$، وتكون سهلة الحل لتعطي

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j}\int_a^b w(x)\,f(x)\,\phi_j(x)\,dx$$

إذن تُبسّط مسألة التقريب بالمربعات الصغرى على نحو كبير عند اختيار الدّوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ بحيث تحقق شرط التعامد في المعادلة (7.8) **(orthogonality condition)**. وسنخصص بقية هذا الفصل لدراسة تجمعات هذا النوع.

إن كلمة "متعامدة" تعني ذات زاوية قائمة، وبمعنى آخر: كل اقتران متعامد عمودي على الآخر.

تعريف 5.8

تقول: إن مجموعة الدوال $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ متعامدة **(orthogonal set of functions)** على الفترة $[a, b]$ بالنسبة إلى دّالة الوزن w إذا كان

$$\left.\begin{matrix} 0, & \text{عندما } j \neq k \\ 0 < \alpha_k & \text{عندما } j = k \end{matrix}\right\} = \int_a^b w(x)\,\phi_j(x)\phi_k(x)\,dx$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كان $\alpha_k = 1$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ فإن المجموعة تسمى متعامدة قانونية **(orthonormal)**. ■

إن هذا التعريف مع الملاحظات السابقة يعطي مبرهنة الآتية.

مبرهنة 6.8

إذا كانت $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ مجموعة دوال متعامدة على الفترة $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w فإن تقريب f على الفترة $[a, b]$ بطريقة المربعات الصغرى بالنسبة إلى الوزن w يكون

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$ ■

حيث لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ يكون

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x)\phi_k(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)[\phi_k(x)]^2\,dx} = \frac{1}{\alpha_k}\int_a^b w(x)\phi_k(x)f(x)\,dx$$

وعلى الرغم من أن كلًّا من التعريف (5.8) والمبرهنة (6.8) يسمح باستخدام مجموعات عريضة من الدّوال المتعاقدة، إلا أننا سنقتصر على التعامل مع مجموعات كثيرات الحدود المتعامدة.

مبرهنة 7.8 إن المبرهنة الآتية المبنية على عملية جرام – شميدت (Gram-Schmidt process) تصف كيفية إنشاء كثيرات الحدود المتعامدة على $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w.

حصل إيرهارد شميدت Erhard Schmidt (1876-1959) على رتبة الدكتوراة تحت إشراف دافيد هلبرت 1905 لحل مسألة حول المعادلات التكاملية. ونشر شميدت بحثًا عن المعادلات التكاملية عام 1907 الذي شرح فيه ما يعرف الآن بعملية جرام – شميدت لإنشاء قاعدة متعامدة قانونية لمجموعة من الدوال. وقد توصل إلى هذه النتائج جورجن بيدرسون جرام Jorgen Pederson Gram (1850-1916) حيث درس هذه المسألة عندما كان يدرس المربعات الصغرى. وعلى كل حال شرح لابلاس Laplace عملية مماثلة قبل جرام وشميدت.

تكون مجموعة دوال كثيرات الحدود $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ المعرّفة بالطريقة الآتية متعامدةً على $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w. لكل x في $[a, b]$ يكون $\phi_0(x) \equiv 1$ ، $\phi_1(x) = x - B_1$ حيث

$$B_1 = \frac{\int_a^b xw(x)[\phi_0(x)]^2\,dx}{\int_a^b w(x)[\phi_0(x)]^2\,dx}$$

وعندما تكون $k \geq 2$،

فلكل x في $[a, b]$ يكون $\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x)$

حيث

$$B_k = \frac{\int_a^b xw(x)[\phi_{k-1}(x)]^2\,dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-1}(x)]^2\,dx} \quad \text{و} \quad C_k = \frac{\int_a^b xw(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\,dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-2}(x)]^2\,dx}$$ ■

تعطي مبرهنة (7.8) عملية إرجاعية لإنشاء مجموعة كثيرات متعامدة، ويُتّبع برهان هذه مبرهنة عن طريق تطبيق الاستقراء الرياضي لدرجة كثيرة الحدود $\phi_n(x)$.

تمهيدية 8.8 لكل $n > 0$ تكون مجموعة دوال كثيرات الحدود $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ المعطاة في مبرهنة (7.8) مستقلة خطيًّا على $[a, b]$، ويكون

$$\int_a^b w(x)\phi_n(x)Q_k(x)\,dx = 0$$

لكل كثيرة حدود $Q_k(x)$ من الرتبة $k < n$. ■

البرهان بما أن $\phi_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، فإن مبرهنة (2.8) تتضمّن أن $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ مجموعة مستقلة خطيًّا.

لتكن $Q_k(x)$ كثيرة حدود من الرتبة k. وفق مبرهنة (3.8) توجد أعداد $c_0, \ldots, c_k$ بحيث $Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j\phi_j(x)$ وهكذا يكون

$$\int_a^b w(x)\,Q_k(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k} c_j \int_a^b w(x)\,\phi_j(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k} c_j \cdot 0 = 0$$

لأن ϕ_n متعامد مع ϕ_j لكل k ,$j = 0, 1, \ldots$. ■ ■ ■

مثال 3 مجموعــة كثيــرات حــدود ليجندر، $\{P_n(x)\}$، متعامدة على $[-1, 1]$ بالنســبة إلــى دّالة الوزن $w(x) \equiv 1$. إن التعريف الكلاســيكي لكثيرات حدود ليجندر يتطلب أن يكون $P_n(1) = 1$ لكل n، وتستخدم علاقة إرجاعية لتوليد كثيرات الحدود عندما $n \geq 2$.

إن هــذا التطبيع لا حاجــة إليه في مناقشــاتنا، فكثيرات الحدود التقريبيــة الناتجة بأي من الحالتين هي نفسها أساسًا.

استخدام العملية الإرجاعية في مبرهنة (7.8) ووضع $P_0(x) \equiv 1$ يعطي

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0 \quad \text{و} \quad P_1(x) = (x - B_1)\,P_0(x) = x$$

أيضًا

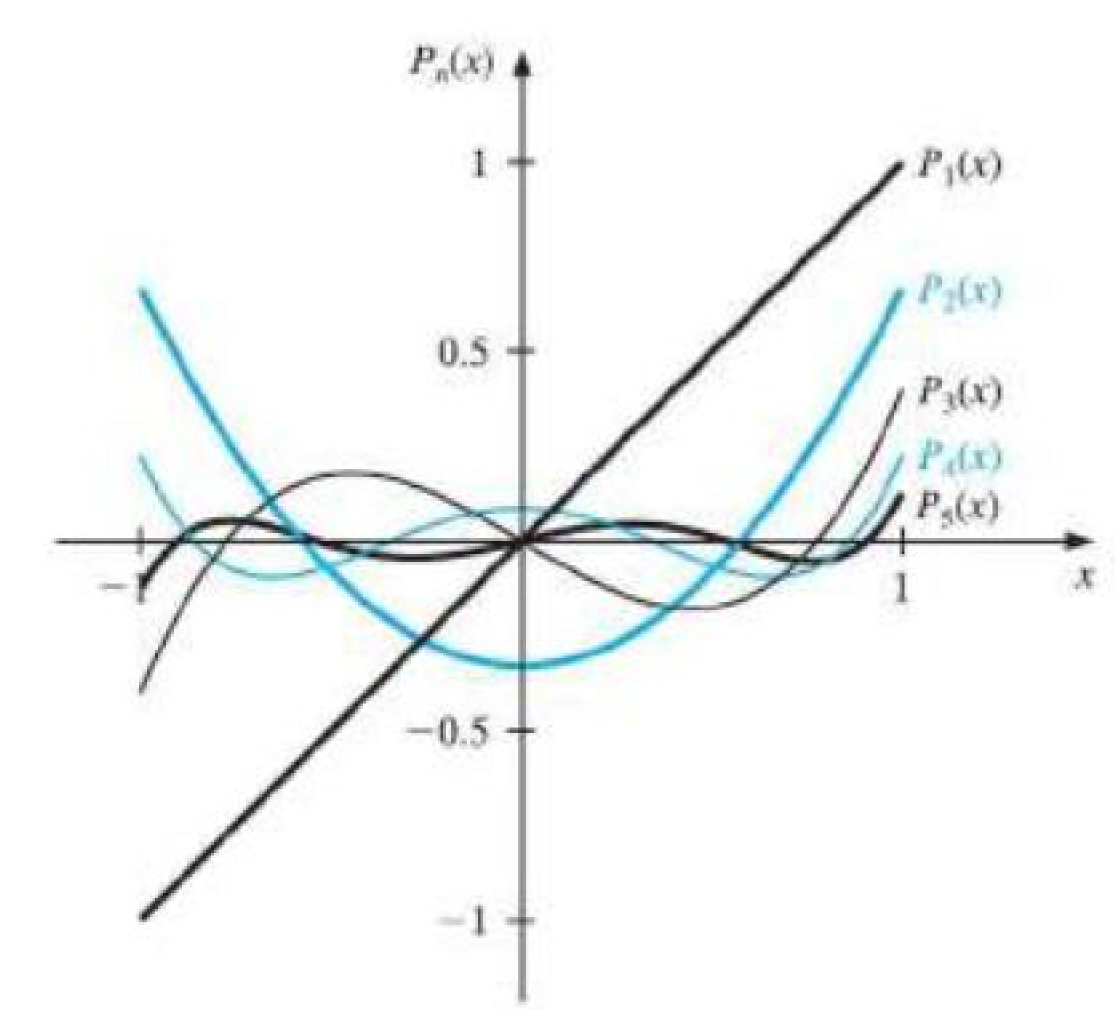
$$B_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = 0 \quad \text{و} \quad C_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \frac{1}{3}$$

ولذلك يكون

$$P_2(x) = (x - B_2)\,P_1(x) - C_2 P_0(x) = (x - 0)x - \frac{1}{3}\cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

لقد حُدِّدت كثيرات حدود ليجندر ذات الدرجات الأعلى بالطريقة ذاتها التي تظهر في شكل (9.8). وعلى الرغم من كون التكامل مضنيًا، إلا أنه ليس صعبًا باستخدام CAS.

شكل 9.8



فعلى سبيل المثال أمر مابل (maple)، int، المستخدم لحساب التكاملات B_3 و C_3:

```
>B3:=int(x*(x^2-1/3)^2,x=-1..1)/int((x^2-1/3)^2,x=-1..1);
>C3:=int(x*(x^2-1/3)*x,x=-1..1)/int(x^2,x=-1..1);
```

يعطي $B_3 = 0$ و $C_3 = \frac{4}{15}$. وهكذا

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{15}x = x^3 - \frac{3}{5}x$$

وتكون كثيرتا حدود ليجندر الآتيتان هما

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \quad \text{و} \quad P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$ ■

ولقد ذُكرت كثيرات حدود ليجندر في الفصل (4.7)، حيث استخدمت جذورها لكونها نقاطًا في عملية جاوس للتكامل.

مجموعة التمارين 2.8 EXERCISE SET

1. أوجد كثيرة الحدود الخطية التي تقرّب الدالة $f(x)$ على الفترة المشار إليها بطريقة المربعات الصغرى إذا كان

أ. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ ، $[0, 1]$ ب. $f(x) = x^3$ ، $[0, 2]$ ج. $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $[1, 3]$

د. $f(x) = e^x$ ، $[0, 2]$ هـ. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x$ ، $[0, 1]$ ز. $f(x) = x\ln x$ ، $[1, 3]$

2. أوجد كثيرة الحدود التي تقرّب بطريقة المربعات الصغرى كل دّالة مما يلي على الفترة [-1,1].

أ. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ب. $f(x) = x^3$ ج. $f(x) = 1/x + 2$

د. $f(x) = e^x$ هـ. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x$ ز. $f(x) = \ln(x + 2)$

3. أوجد كثيرة الحدود من الرتبة الثانية التي تقرب بطريقة المربعات الصغرى كل دالة في التمرين (1) على الفترة المشار إليها.

4. أوجد كثيرة الحدود من الرتبة الثانية بطريقة المربعات الصغرى لتقريب الدّوال في التمرين 2 على الفترة [-1,1].

5. حسب الخطأ E للتقريبات في التمرين (3).

6. احسب الخطأ E للتقريبات في التمرين (4).

7. استخدم طريقة جرام – شميدت لإنشاء $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)$ و $\phi_3(x)$ للفترات الآتية:

أ. $[0, 1]$ ب. $[0, 2]$ ج. $[1, 3]$

8. كرِّر التمرين (1) باستخدام نتائج التمرين (7).

9. أوجد كثيرة الحدود من الرتبة الثالثة بطريقة المربعات الصغرى لتقريب الدّوال في التمرين (1) باستخدام نتائج التمرين (7).

10. كرِّر التمرين (3) باستخدام نتائج التمرين (7).

11. استخدم طريقة جرام – شميدت لحساب L_1, L_2 وL_3 حيث $\{L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)\}$ مجموعة كثيرات الحدود المتعامدة على $(0,\infty)$ بالنسبة إلى دّالة الوزن $w(x) = e^{-x}$ و $L_0(x) \equiv 1$ إن كثيرات الحدود التي نحصل عليها بهذه الطريقة تُسمى كثيرات حدود لاغور (Laguerre polynomials).

12. استخدم كثيرات حدود لاغور التي حُسبت في التمرين (11) لتحسب كثيرات الحدود من الرتبة الأولى والثانية والثالثة بطريقة المربعات الصغرى على الفترة $(0,\infty)$ بالنسبة إلى دالة

الوزن $w(x) = e^{-x}$ للدوال الآتية:

أ. $f(x) = x^2$ ب. $f(x) = e^{-x}$ ج. $f(x) = x^3$ د. $f(x) = e^{-2x}$

١٣. لتكن $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ أي مجموعة مستقلة خطيًّا في $\prod_n$. برهن أنه لكل عنصر $Q \in \prod_n$ توجد ثوابت وحيدة $c_0, c_1, \ldots, c_n$ بحيث

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

14. برهن أنه إذا كان $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ مجموعة دوال متعامدة على $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w، فإن $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ مجموعة مستقلة خطيًّا.

15. برهن أن المعادلات القانونية (6.8) تملك حلًّا وحيدًا.

[إضاءة: برهن أن الحل الوحيد للدالة $f(x) \equiv 0$ هو $a_j = 0, j = 0, 1, \ldots, n$.

اضرب المعادلة (6.8) في العدد a_j، واجمع فوق كل j. بدل إشارة التكامل بإشارة الجمع لتحصل على $\int_a^b [P(x)]^2 dx = 0$، وهكذا يكون $P(x) \equiv 0$ ومن ثم فإن $a_j = 0$ لكل $j = 0, \ldots, n$. إذن تكون مصفوفة المعاملات غير منفردة، ويوجد حل وحيد للمعادلة (6.8).

3.8 كثيرات حدود تشبيشف وترشيد سلسلة القوة
Chebyshev Polynomials and Economization of Power Series

(1821-1894)

Pafnuty Lvovich Chebyshev

عمل تشبيشف أعمالا رياضية رائعة في كثير من الحقول بما فيها الرياضيات التطبيقية، مبرهنة الأعداد، مبرهنة التقريب والاحتمالات.

وفي عام 1852 سافر من سانت بيترسبرج لزيارة علماء رياضيات في فرنسا وإنجلترا وألمانيا. ودرس كل من لاكرانج وليجندر مجموعات منفردة من كثيرات الحدود المتعامدة، ولكن كان تشبيشف أول من رأى النتائج المهمة عموما لدراسة مبرهنة. وطوّر كثيرات حدود تشبيشف لدراسة التقريبات عن طريق المربعات الصغرى والاحتمالات. وبعد ذلك طبّق نتائجه على الاستكمال الداخلي، وطرائق التكامل لتقريبية، وبمجالات أخرى.

كثيرات حدود تشبيشف $\{T_n(x)\}$ متعامدة على (1,1-) بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. وعلى الرغم من إمكانية اشتقاق كثيرات الحدود هذه بطريقة الفصل السابق، فمن الأسهل إعطاء تعريف لها، ثم برهنة أنها تحقق خواص التعامد المطلوبة.

لكلّ $x \in [-1, 1]$، ولكلّ $n \geq 0$ عرّف

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x] \tag{8.8}$$

ليس واضحًا في هذا التعريف أن لكلّ n تكون $T_n(x)$ كثيرة حدود في x. ولكننا سنبرهن ذلك الآن. انظر أولًا أن $T_0(x) = \cos 0 = 1$ و $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$

لكلّ $n \geq 1$، نقدم التعويض $\theta = \arccos x$ لتغيير هذه المعادلة إلى

$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta)$ حيث $\theta \in [0, \pi]$

نشتق علاقة إرجاعية بملاحظة أن

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

و

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$$

وبجمع هاتين المعادلتين نحصل على $T_{n+1}(\theta) = 2\cos(n\theta)\cos\theta - T_{n-1}(\theta)$

وبالرجوع إلى المتغير x، نحصل لكلّ $n \geq 1$ على

$$T_{n+1}(x) = 2x\cos(n \arccos x) - T_{n-1}(x)$$

أو

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{9.8}$$

وبما أن $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$، فإن العلاقة الإرجاعية تعني أن $T_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n بمعامل أول 2^{n-1} عندما $n \geq 1$.

إن كثيرات حدود تشبيشف الثلاث الآتية هي

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

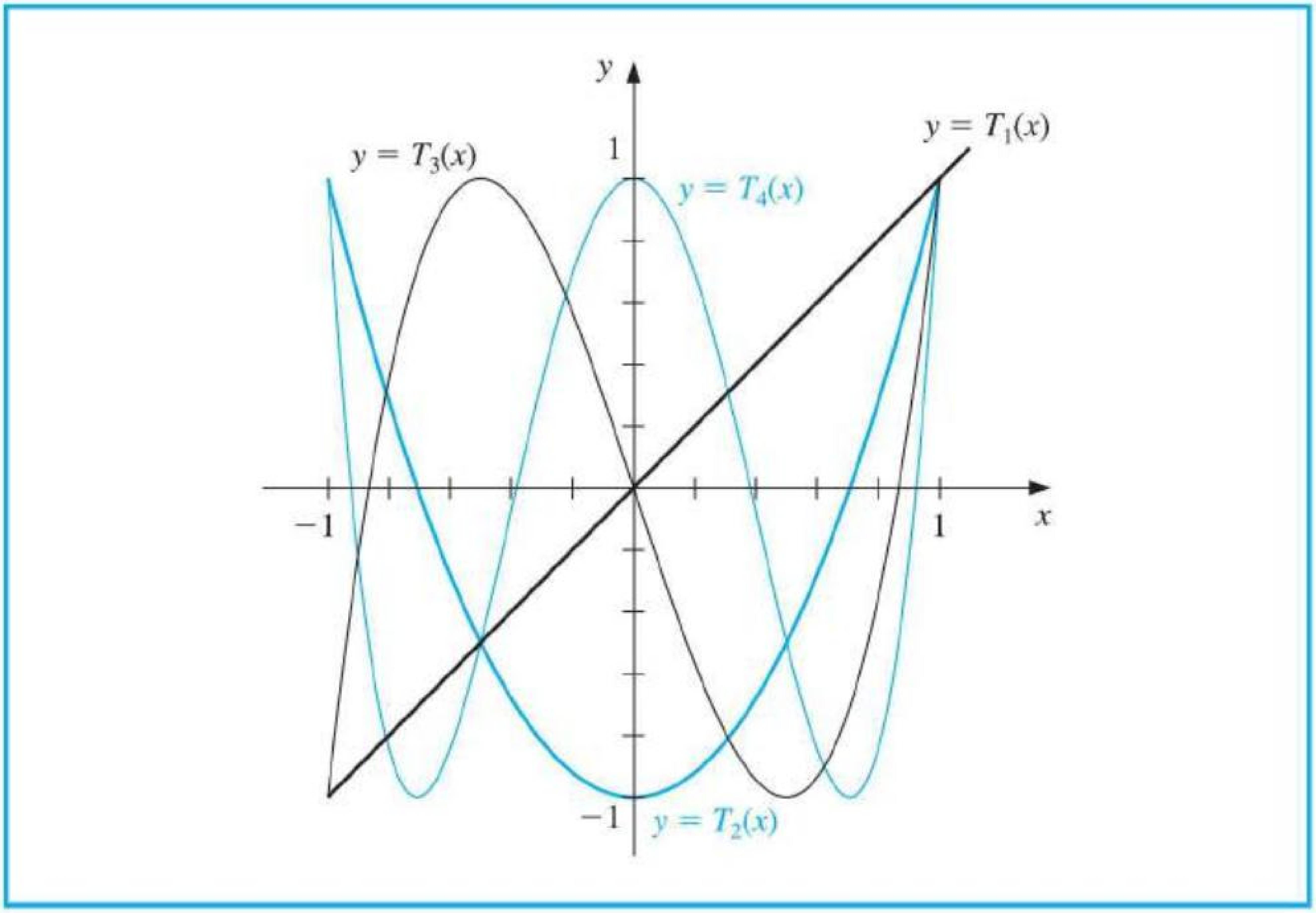
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

و

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

يظهر الرسم البياني لكثيرات الحدود T_4 ، T_1, T_2, T_3 في شكل (10.8).

شكل 10.8



لبرهنة تعامد كثيرات حدود تشبيشف، افترض أن

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos x)\cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

وباستخدام التعويض $\theta = \arccos x$ نحصل على

$$d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

و

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_{\pi}^{0} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta.$$

افترض $n \neq m$. بما أن

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \tfrac{1}{2}[\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta]$$

نحصل على

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n+m)\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n-m)\theta)\,d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2(n+m)}\sin((n+m)\theta) + \frac{1}{2(n-m)}\sin((n-m)\theta)\right]_0^{\pi}$$
$$= 0.$$

وبطريقة مماثلة، يمكن برهنة أنه عندما يكون $n = m$ فإن

$$\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{لكل } n \geq 1 \tag{10.8}$$

تستخدم كثيرات حدود تشبيشف لتصغير خطأ التقريب إلى أكبر حدٍّ ممكن.

وسنرى كيف تستخدم لحل مسألتين من هذا النوع:

- تعيين نقاط الاستكمال الداخلي لجعل الخطأ في استكمال لاكرانج الداخلي أصغر ما يمكن.
- تصغير رتبة كثيرة حدود التقريب بحيث تكون الخسارة في الدقة أقل ما يمكن.

مبرهنة 9.8 إن كثيرة حدود تشبيشف $T_n(x)$ من الرتبة $n \geq 1$ لها أصفار بسيطة عددها n في الفترة $[-1, 1]$ عند

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad \text{لكل } k = 1, 2, \ldots, n$$

وبالإضافة إلى ذلك تقع القيم العظمى المطلقة لكثيرة الحدود $T_n(x)$ عند

$$\bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ مع } T_n(\bar{x}'_k) = (-1)^k \quad \text{لكل } k = 0, 1, \ldots, n$$ ■

البرهان إذا وصفنا

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad \text{لكل } k = 1, 2, \ldots, n$$

فإن

$$T_n(\bar{x}_k) = \cos(n\arccos\bar{x}_k) = \cos\left(n\arccos\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)\right) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0$$

وكل $\bar{x}_k$ هي صفر مميز لـ T_n.

بما أن $T_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، فإن أصفار $T_n(x)$ جميعها يجب أن تكون على تلك الصيغة.

لبرهنة الفقرة الثانية، نلاحظ أولا

$$T'_n(x) = \frac{d}{dx}[\cos(n\arccos x)] = \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

وأنه عندما يكون $k = 1, 2, \ldots, n-1$ فإن

$$T_n'(\bar{x}_k') = \frac{n\sin(n\arccos(\cos(k\pi/n)))}{\sqrt{1-[\cos(k\pi/n)]^2}} = \frac{n\sin(k\pi)}{\sin(k\pi/n)} = 0$$

بما أن $T_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، فإن مشتقته $T_n'(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $(n-1)$، وإن جميع أصفار $T_n'(x)$ تحدث على $(n-1)$ من النقاط.

إن الحالات الأخرى الوحيدة الممكنة للنقاط القصوى لـ $T_n(x)$ تحدث على طرفي الفترة $[-1, 1]$ أي عند $\bar{x}_0' = 1$ و $\bar{x}_n' = -1$ وبما أنه لأي n ، $k = 0, 1, \ldots$، يكون لدينا

$$T_n(\bar{x}_k') = \cos\left(n\arccos\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

وإن القيمة العظمى تقع على كل قيمة زوجية للعدد k والقيمة الصغرى على كل قيمة فردية.

■ ■ ■

نحصل على كثيرات حدود تشبيشف $\tilde{T}_n(x)$ الأحادية (monic) (التي معاملاتها الرئيسة تساوي 1) بقسمة كثيرة حدود تشبيشف $T_n(x)$ على المعامل الرئيس 2^{n-1}.

ومن ثم يكون

$$\tilde{T}_0(x) = 1$$

و

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \qquad \text{(11.8)}$$

لكلِّ $n \geq 1$.

إن العلاقة الإرجاعية التي تحقّقها كثيرات حدود تشبيشف تتضّمن

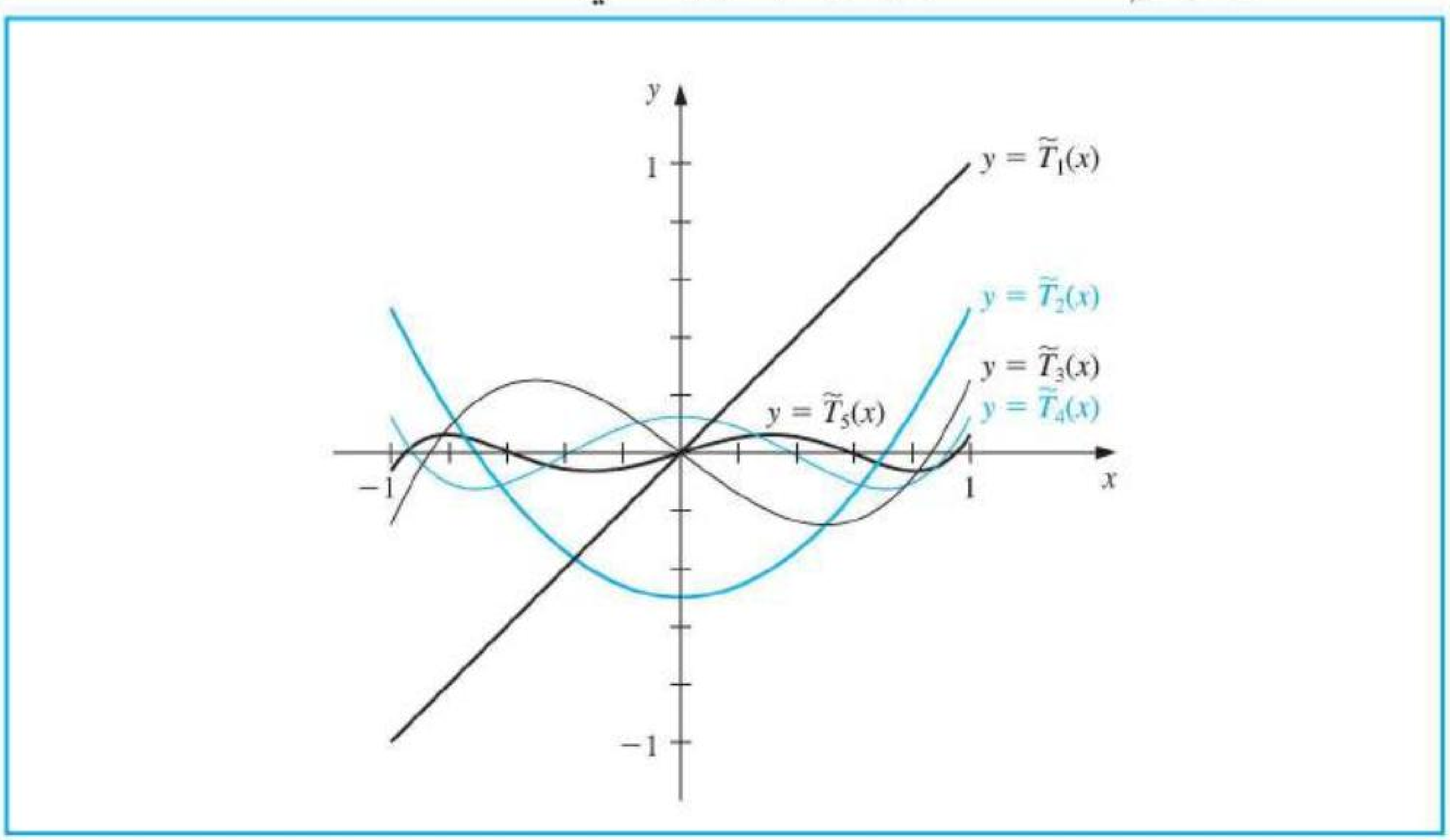
$$\tilde{T}_2(x) = x\tilde{T}_1(x) - \tfrac{1}{2}\tilde{T}_0(x)$$

و

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = x\tilde{T}_n(x) - \tfrac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x) \qquad \text{(12.8)}$$

لكلِّ $n \geq 2$. تظهر الرسوم البيانية لـ $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4$ و $\tilde{T}_5$ في شكل (11.8).

شكل 11.8



بما أن $\tilde{T}_n(x)$ عبارة عن مضاعف لـ $T_n(x)$، فإن مبرهنة (9.8) تتضمَّن أصفارًا $\tilde{T}_n(x)$ تقع أيضًا عند

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

لكلِّ $k = 1, 2, \ldots, n$، وإن القيم القصوى لـ $\tilde{T}_n(x)$ لكلِّ $n \geq 1$، تحدث عند

$$\tilde{T}_n(\bar{x}'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad \text{مع} \quad \bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \tag{13.8}$$

لكلِّ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

لتعبر $\tilde{\prod}_n$ عن مجموعة كثيرات الحدود الأحادية جميعها (monic) من الرتبة n.

إن العلاقة المعبَّر عنها بالمعادلة (13.8) تؤدي إلى خاصية تصغير مهمة تميز $\tilde{T}_n(x)$ عن عناصر $\tilde{\prod}_n$ الأخرى.

مبرهنة 10.8 إن كثيرات الحدود على الصيغة $\tilde{T}_n(x)$، عندما $n \geq 1$ لها الخاصية الآتية

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \quad \text{لـ} \quad P_n(x) \in \tilde{\prod}_n \quad \text{جميعًا}$$

وبالإضافة إلى ذلك تتحقق المساواة فقط إذا كان $P_n = \tilde{T}_n$. ■

البرهان افترض أن $P_n(x) \in \tilde{\prod}_n$، وأن

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)|$$

افترض $Q = \tilde{T}_n - P_n$، بما أن كلًّا من $\tilde{T}_n(x)$ و $P_n(x)$ كثيرة حدود أحادية بدرجة n، فإن $Q(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $(n-1)$ على الأكثر.

بالإضافة إلى ذلك، وعلى النقاط القصوى لـ $\tilde{T}_n(x)$ يكون

$$Q(\bar{x}'_k) = \tilde{T}_n(\bar{x}'_k) - P_n(\bar{x}'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P_n(\bar{x}'_k)$$

بما أن $|P_n(\bar{x}'_k)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ لكلِّ $k = 0, 1, \ldots, n$ نحصل على

$Q(\bar{x}'_k) \leq 0$ عندما يكون k فرديًّا، و $Q(\bar{x}'_k) \geq 0$ عندما يكون k زوجيًّا

بما أن Q متصل، فإن مبرهنة القيمة الوسيطية تتضمَّن أن كثيرة الحدود $Q(x)$ لها صفر واحد على الأقل من بين $\bar{x}'_j$ و $\bar{x}'_{j+1}$. لكلِّ $j = 0, 1, \ldots, n-1$، وهكذا لـ Q n من الأصفار على الأقل في الفترة $[-1, 1]$.

ولكن رتبة $Q(x)$ أقل من n، ولذلك $Q \equiv 0$. وهذا يعني أن $P_n \equiv \tilde{T}_n$. ■ ■ ■

يمكن استخدام مبرهنة (10.8) للإجابة عن التساؤل: أين نعيِّن نقاط الاستكمال الداخلي لكي نجعل خطأ استكمال لاكرانج أصغر ما يمكن؟

إن تطبيق مبرهنة (3.3) على الفترة [-1,1] ينص على أنه إذا كانت $x_0, \ldots, x_n$ أعدادًا متميزة في الفترة [-1,1]، وإذا كان $C^{n+1}[-1, 1]$ فإنه لكلِّ $x \in [-1, 1]$ يوجد عدد $\xi(x)$ في (-1,1) بحيث

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

حيث $P(x)$ كثيرة حدود لاكرانج للاستكمال الداخلي. وعمومًا لا يوجد تحكم في $\xi(x)$، ولذلك كي نجعل الخطأ أصغر ما يمكن بتحديد ذكي للنقاط $x_0, \dots, x_n$، نجد النقاط $x_0, \dots, x_n$ التي تجعل

$$|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$$

أصغر ما يمكن على مدى الفترة $[-1, 1]$.

وبما أن $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ كثيرة حدود أحادية monic من الرتبة $(n + 1)$، فإننا قد رأينا أن القيمة الصغرى تحدث عندما

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \tilde{T}_{n+1}(x)$$

إن القيمة العظمى لـ $|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$ تكون أصغر ما يمكن عندما نختار x_k ليكون الصفر عدد $(k + 1)$ لـ $\tilde{T}_{n+1}$ لكل $k = 0, 1, \dots, n$؛ أي عندما تكون x_k مساوية لـ

$$\bar{x}_{k+1} = \cos \frac{2k + 1}{2(n + 1)} \pi$$

بما أن $\max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_{n+1}(x)| = 2^{-n}$ فإن هذا أيضًا يعني أن

$$\frac{1}{2^n} = \max_{x \in [-1,1]} |(x - \bar{x}_1) \cdots (x - \bar{x}_{n+1})| \le \max_{x \in [-1,1]} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|$$

لكل اختيار للنقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ في الفترة $[-1, 1]$. التمهيدية التالية تأتي من المناقشة السابقة.

تمهيدية 11.8 إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة n على الأكثر بنقاط على جذور $T_{n+1}(x)$ فإن

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P(x)| \le \frac{1}{2^n (n + 1)!} \max_{x \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|$$

لكل $f \in C^{n+1}[-1, 1]$.

■

من الممكن تعميم هذه الطريقة لاختيار النقاط التي تجعل خطأ الاستكمال أصغر ما يمكن، بحيث تطبّق على فترة عامة مغلقة $[a , b]$، وذلك باستخدام تحويل الوسيطات

$$\tilde{x} = \tfrac{1}{2}[(b - a)x + a + b]$$

وذلك لتحويل الأعداد $\bar{x}_k$ في الفترة $[-1, 1]$ إلى ما يقابلها من أعداد $\tilde{x}_k$ في الفترة $[a , b]$ كما هو موضح في المثال (1).

مثال 1 ليكن $f(x) = xe^x$ على $[0, 1.5]$. سنبني اثنتين من كثيرات حدود الاستكمال الداخلي من ثلاث درجات على الأكثر.

أولًا: سنستخدم النقاط المتساوية الأبعاد $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ و $x_3 = 1.5$؛ لنحصل على

$$L_0(x) = -1.3333x^3 + 4.0000x^2 - 3.6667x + 1$$

$$L_1(x) = 4.0000x^3 - 10.000x^2 + 6.0000x$$

$$L_2(x) = -4.0000x^3 + 8.0000x^2 - 3.0000x$$

$$L_3(x) = 1.3333x^3 - 2.000x^2 + 0.66667x$$

القيم المعروضة في العمودين الابتدائيين في جدول (7.8)، وإن كثيرة الحدود الأولى تُعطى بالصيغة

$$P_3(x) = 1.3875x^3 + 0.057570x^2 + 1.2730x$$

جدول 7.8

x	$f(x) = xe^x$	$\tilde{x}$	$f(\tilde{x}) = xe^x$
$x_0 = 0.0$	0.00000	$\tilde{x}_0 = 1.44291$	6.10783
$x_1 = 0.5$	0.824361	$\tilde{x}_1 = 1.03701$	2.92517
$x_2 = 1.0$	2.71828	$\tilde{x}_2 = 0.46299$	0.73560
$x_3 = 1.5$	6.72253	$\tilde{x}_3 = 0.05709$	0.060444

للحصول على كثيرة الحدود الثانية للاستكمال؛ حرِّك الأصفار $\bar{x}_k = \cos((2k+1)/8)\pi$ لكل $k = 0, 1, 2, 3$ من $\tilde{T}_4$ الخاصة بـ $[-1, 1]$ من $[0, 1.5]$ إلى، باستخدام التحويل الخطي

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2}[(1.5-0)\bar{x}_k + (1.5+0)] = 0.75 + 0.75\bar{x}_k$$

لنحصل على

$\tilde{x}_0 = 1.44291$، $\tilde{x}_1 = 1.03701$، $\tilde{x}_2 = 0.46299$ و $\tilde{x}_3 = 0.05709$

بعد ذلك تحسب كثيرات حدود لاكرانج لهذه المجموعة من النقاط بما يلي:

$$\tilde{L}_0(x) = 1.8142x^3 - 2.8249x^2 + 1.0264x - 0.049728$$

$$\tilde{L}_1(x) = -4.3799x^3 + 8.5977x^2 - 3.4026x + 0.16705$$

$$\tilde{L}_2(x) = 4.3799x^3 - 11.112x^2 + 7.1738x - 0.37415$$

$$\tilde{L}_3(x) = -1.8142x^3 + 5.3390x^2 - 4.7976x + 1.2568$$

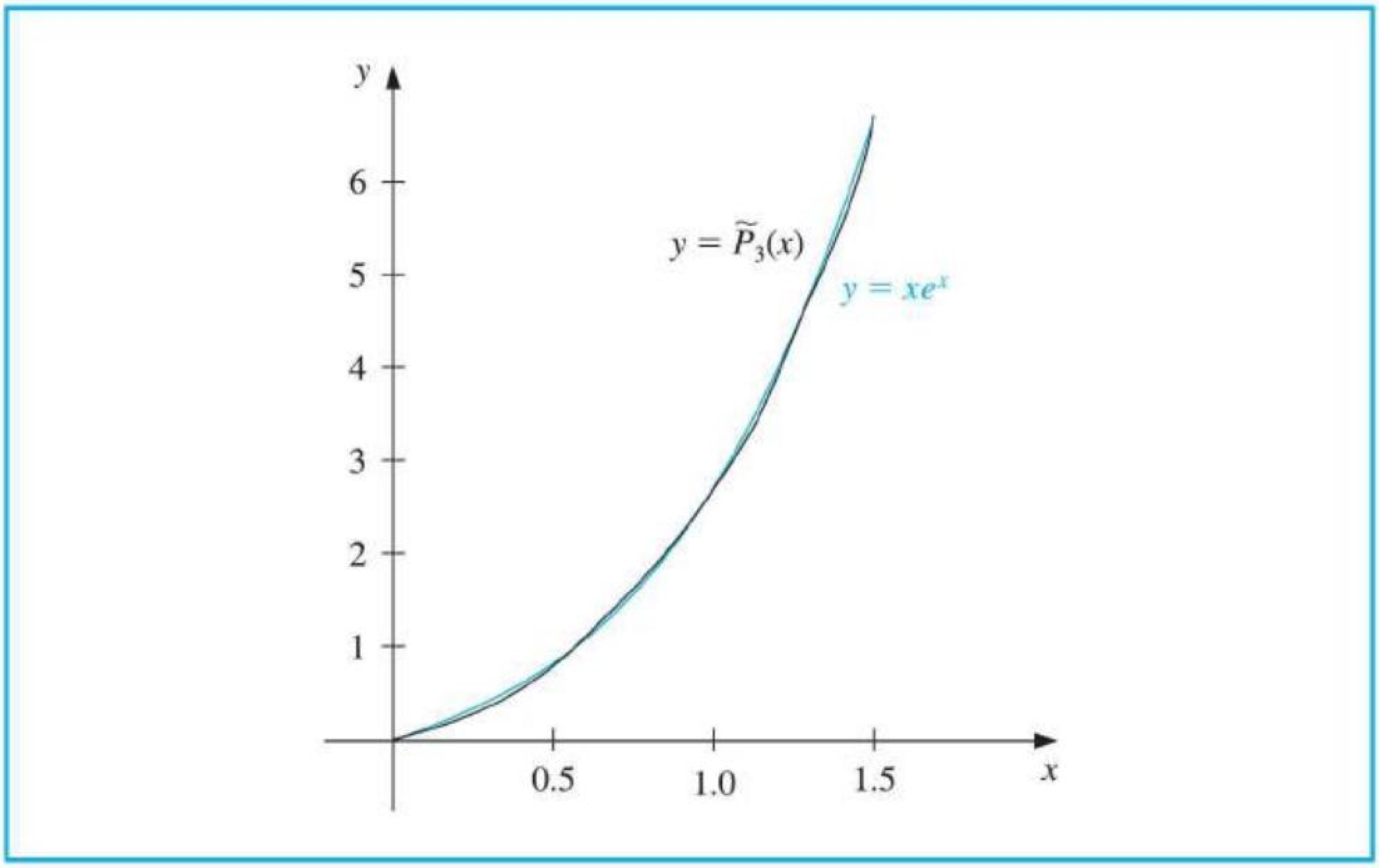
إن القيم الدالية اللازمة لكثيرات الحدود هذه موجودة في العمودين الأخيرين من جدول (7.8). إن كثيرة حدود الاستكمال من الرتبة الثالثة على الأكثر

$$\tilde{P}_3(x) = 1.3811x^3 + 0.044652x^2 + 1.3031x - 0.014352$$

وللمقارنة؛ يعرض جدول (8.8) قيم x المختلفة مع قيم $f(x)$، $P_3(x)$ و $\tilde{P}_3(x)$.
ويمكن أن نستنتج من هذا جدول أنه على الرغم من أن الخطأ باستخدام $P_3(x)$ أقل منه باستخدام $\tilde{P}_3(x)$ قريبًا من منتصف جدول، فإن القيمة القصوى للخطأ باستخدام $\tilde{P}_3(x)$ هي 0.0180.
(انظر شكل 12.8). ■

جدول 8.8

x	$f(x) = xe^x$	$P_3(x)$	$\lvert xe^x - P_3(x)\rvert$	$\tilde{P}_3(x)$	$\lvert xe^x - \tilde{P}_3(x)\rvert$
0.15	0.1743	0.1969	0.0226	0.1868	0.0125
0.25	0.3210	0.3435	0.0225	0.3358	0.0148
0.35	0.4967	0.5121	0.0154	0.5064	0.0097
0.65	1.245	1.233	0.012	1.231	0.014
0.75	1.588	1.572	0.016	1.571	0.017
0.85	1.989	1.976	0.013	1.974	0.015
1.15	3.632	3.650	0.018	3.644	0.012
1.25	4.363	4.391	0.028	4.382	0.019
1.35	5.208	5.237	0.029	5.224	0.016



شكل 12.8

يمكن استخدام كثيرات حدود تشبيشف لتقليل رتبة كثيرة الحدود المستخدمة بخسارة في دقة حدها الأدنى. وبما أن كثيرات حدود تشبيشف تحقِّق القيمة الصغرى للقيمة العظمى المطلقة التي تتوزَّع بالتجانس على الفترة، يمكن استخدامها لتقليل رتبة كثيرة الحدود المستخدمة في التقريب دون تخطي الخطأ المسموح به.

افترض تقريب أي كثيرة حدود من الرتبة n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

على الفترة $[-1, 1]$ باستخدام كثيرة حدود من الرتبة $n-1$ على الأكثر.

إن الغرض هو اختيار $P_{n-1}(x)$ في $\prod_{n-1}$ بحيث يكون

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x) - P_{n-1}(x)|$$

أصغر ما يمكن.

نلاحظ أولًا أن $(P_n(x) - P_{n-1}(x))/\, a_n$ كثيرة حدود أحادية (monic) من الرتبة n، ولذلك فإن تطبيق مبرهنة (10.8) يعطي

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{a_n}(P_n(x) - P_{n-1}(x)) \right| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

تحدث المساواة بالضبط عندما

$$\frac{1}{a_n}(P_n(x) - P_{n-1}(x)) = \tilde{T}_n(x)$$

وهذا يعني أنه يجب أن نختار

$$P_{n-1}(x) = P_n(x) - a_n \tilde{T}_n(x)$$

وبهذا الاختيار نحصل على القيمة الصغرى لِـ

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x) - P_{n-1}(x)| = |a_n| \max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{a_n}(P_n(x) - P_{n-1}(x)) \right| = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

مثال 2 لقد قُرِّبت الدالة $f(x) = e^x$ على الفترة $[-1, 1]$ في كثيرة حدود ماكلورين الرابعة

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

التي لها خطأ القطع

$$|R_4(x)| = \frac{|f^{(5)}(\xi(x))||x^5|}{120} \le \frac{e}{120} \approx 0.023$$

لكل $-1 \le x \le 1$.

افترض أنه يمكن السماح بخطأ مقداره 0.05، وأننا نرغب في تقليل رتبة كثيرة الحدود المستخدمة في التقدير، حيث نبقى ضمن حدود الخطأ.

إن كثيرة الحدود من الرتبة الثالثة أو أقل التي تعطي أفضل تقريب متجانس لـ $P_4(x)$ على الفترة $[-1, 1]$ هي

$$P_3(x) = P_4(x) - a_4\tilde{T}_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{24}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

ونحصل بهذا الاختيار على

$$|P_4(x) - P_3(x)| = |a_4\tilde{T}_4(x)| \le \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{192} \le 0.0053$$

إن جمع حد الخطأ هذا إلى حد خطأ قطع ماكلورين يعطي

$$0.023 + 0.0053 = 0.0283$$

الذي لا يزال ضمن الخطأ المسموح به 0.05.

إن كثيرة الحدود من الرتبة الثانية أو أقل التي تعطي أفضل تقريب متجانس لـ $P_3(x)$ على $[-1, 1]$ هي

$$P_2(x) = P_3(x) - \frac{1}{6}\tilde{T}_3(x)$$

$$= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) = \frac{191}{192} + \frac{9}{8}x + \frac{13}{24}x^2$$

على كل حال، إن

$$|P_3(x) - P_2(x)| = \left|\frac{1}{6}\tilde{T}_3(x)\right| = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{24} \approx 0.042$$

الذي – عند جمعه مع الخطأ المجتمع 0.0283 – يتخطى الخطأ المسموح به 0.05. ومن ثم فإن كثيرة الحدود الأقل رتبة، التي تقرب e^x تقريبًا أفضل على $[-1, 1]$ وبحد خطأ أقل من 0.05 هي

$$P_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

يظهر جدول (9.8) قيم الدالة وكثيرات الحدود المستخدمة لتقريبه على نقاط متعددة في $[-1, 1]$. انظر إلى مدخلات الجدول الخاصة بـ P_2 تقع ضمن الحد المسموح به 0.05 جيدًا على الرغم من أن حد الخطأ لـ $P_2(x)$ يزيد على الحد المسموح به. ■

جدول 9.8

$\|e^x - P_2(x)\|$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	e^x	x
0.01664	0.45573	0.47917	0.47412	0.47237	−0.75
0.03140	0.74740	0.77604	0.77881	0.77880	−0.25
0.00521	0.99479	0.99479	1.00000	1.00000	0.00
0.02587	1.30990	1.28125	1.28402	1.28403	0.25
0.02623	2.14323	2.11979	2.11475	2.11700	0.75

مجموعة التمارين 3.8 EXERCISE SET

1. استخدم أصفار $\tilde{T}_3$ لإنشاء كثيرة حدود من الرتبة الثانية لاستكمال الدّوال الآتية على الفترة $[-1, 1]$:

أ. $f(x) = e^x$ ب. $f(x) = \sin x$ ج. $f(x) = \ln(x + 2)$ د. $f(x) = x^4$

2. استخدم أصفار $\tilde{T}_4$ لإنشاء كثيرة حدود من الرتبة الثالثة لاستكمال الدّوال في التمرين (1).
3. أوجد حدًّا للقيمة العظمى لخطأ التقريب في التمرين 1 على الفترة $[-1, 1]$.
4. كرِّر التمرين 3 للتقريبات المحسوبة في التمرين (2).
5. استخدم أصفار $\tilde{T}_3$ والتحويلات للفترة المعطاة؛ لكي تبني كثيرة حدود من الرتبة الثانية لاستكمال الدّوال الآتية:

أ. $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $[1, 3]$ ب. $f(x) = e^{-x}$ ، $[0, 2]$

ج. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x$ ، $[0, 1]$ د. $f(x) = x \ln x$ ، $[1, 3]$

6. أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة السادسة للدالة xe^x، واستخدم كثيرات حدود تشبيشف؛ للحصول على كثيرة حدود من رتبة أقل تستخدم للتقريب، بحيث تحافظ على إبقاء الخطأ أقل من 0.01 على $[-1, 1]$.
7. أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة السادسة للدالة $\sin x$، واستخدم كثيرات حدود تشبيشف للحصول على كثيرة حدود من رتبة أقل تستخدم للتقريب، بحيث تحافظ على إبقاء الخطأ أقل من 0.01 على $[-1, 1]$.
8. برهن أنه لأي عددين صحيحين i و j حيث $i > j$، نحصل على

$$T_i(x)T_j(x) = \tfrac{1}{2}[T_{i+j}(x) + T_{i-j}(x)]$$

9. برهن أنه لكلِّ كثيرة حدود تشبيشف $T_n(x)$ نحصل على

$$\int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

4.8 تقريب الدّوال النسبية Rational Function Approximation

يتمتع صف كثيرات الحدود الجبرية ببعض المزايا لاستعمال التقريب:

- يوجد عدد كافٍ من كثيرات الحدود لتقريب أي دّالة متصلة على فترة مغلقة ضمن أي خطأ مسموح به.
- يمكن إيجاد قيم كثيرات الحدود على أي قيم مهما اتفق.
- إن مشتقات كثيرات الحدود وتكاملاتها موجودة وسهلة التحديد.

إن السلبية في استخدام كثيرات الحدود للتقريب تكمن في ميلها إلى الاهتزاز. وهذا غالبًا ما يسبب زيادة حدود الخطأ في استخدام كثيرات الحدود للتقريب من معدل خطأ التقريب؛ لأن حدود الخطأ تتعين بقيمة أعلى من خطأ التقريب.

والآن سنفترض توزيع طرائق خطأ التقريب على فترة التقريب على نحو متجانس. إن هذه الطرائق تعتمد على استخدام الدّوال النسبية.

إن الدالة النسبية r من الرتبة N (rational function r) يكون على الصيغة

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث $p(x)$ و $q(x)$ كثيرتا حدود مجموع درجتيهما N.

وبما أن كل كثيرة حدود هي دالة نسبي [ضع $q(x) \equiv 1$ ببساطة]، فإن التقريب بالدوال النسبية يعطي نتائج ليست أسوأ من تلك الناتجة عن طريق التقريب في كثيرات الحدود. على كل حال، فإن الدّوال النسبية التي لبسطها ومقامها الرتبة نفسها تقريبًا، تعطي نتائج تقريب أفضل عمومًا مما تعطيه طرائق كثيرات الحدود باستخدام المقدار نفسه من الجهد في الحساب. (إن هذه العبارة مبنية على افتراض أن مقدار الجهد في الحساب اللازم لعمليات القسمة هو نفسه تقريبًا اللازم لعمليات الضرب)، وللدوال النسبية مزية إضافية، وهي السماح بتقريب كفوير للدوال التي لا نهاية لها من نقاط الانفصال (عدم الاتصال) بالقرب من فترة التقريب وليس خارجها. فالتقريب في كثيرات الحدود غير مقبول عمومًا في هذه الأحوال.

افترض أن r دالة نسبية درجتهما $N = n + m$ على الصيغة

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n}{q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m}$$

وأنه استخدم لتقريب دالة f على فترة مغلقة I تحتوي الصفر. ولكي يكون r معرفًا على الصف يتطلب أن $q_0 \neq 0$. ويمكننا في الحقيقة افتراض $q_0 = 1$؛ لأنه إذا لم تكن كذلك فإننا نضع $q(x)/q_0$ بدلًا من $q(x)$ و $p(x)/q_0$ بدلًا من $p(x)$. ومن ثم يوجد $N + 1$ من البرامترات (الوسيطات) $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ، $p_0, p_1, \ldots, p_n$ متاحة لتقريب f في الدالة r.

طريقة بادي للتقريب (The Pade' approximation) وهي تعميم لكثيرة حدود تايلور لتقريب الدالة النسبي، تختار $N + 1$ من البرامترات بحيث $f^{(k)}(0) = r^{(k)}(0)$ لكل $k = 0, 1, \ldots, N$ وعندما يكون $n = N$ و $m = 0$، فإن طريقة بادي للتقريب تكون كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة N.

هنري بادي (1863 – 1953) قدم لنا دراسة منهجية لما أصبح يعرف بتقريبات بيدي وذلك من خلال أطروحته لنيل شهادة الدكتوراة عام 1892. لقد برهن نتائج وفق تركيبها العام. وكما يبين بوضوح العلاقة بين تقريبات بادي والكسور غير المنتهية وقد درس دانيال بيرلوني هذه الأفكار وغيرها في وقت مبكر يعود إلى عام 1730. وقدم جيمس ستيرلنغ منهجًا مماثلًا في كتابه مناهج التفاضل «Methodus differentialis» الذي نشر في السنة نفسها. كما استخدم يولير تقريبات بيدي لحساب مجموع السلسلة.

افترض الفرق

$$f(x) - r(x) = f(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)q(x) - p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)\sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q(x)}$$

وافترض أن f يتمتع تمديد سلسلة ماكلورين $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ إذًا

$$f(x) - r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q(x)} \qquad (14.8)$$

إن الهدف هو اختيار الثوابت $q_1, q_2, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$ بحيث

$$f^{(k)}(0) - r^{(k)}(0) = 0 \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

وجدنا في الفصل (2.4) (انظر التمرين (12) خصوصًا) أن هذا يكافئ $f - r$ وله صفر بمضاعف $N + 1$ عند $x = 0$. وتمهيدية لذلك نختار

(15.8) $q_1, q_2, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$، بسط الطرف الأيمن للمعادلة (14.8) أي

$$(a_0 + a_1 x + \cdots)(1 + q_1 x + \cdots + q_m x^m) - (p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n)$$

لا يحتوي على حدود من رتبة تساوي N أو أقل.

ولتبسيط الرموز؛ نعرّف

$$q_{m+1} = q_{m+2} = \cdots = q_N = 0 \quad \text{و} \quad p_{n+1} = p_{n+2} = \cdots = p_N = 0$$

ويمكننا بعد ذلك التعبير عن x^k في التعبير (15.8) على الصيغة

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i}\right) - p_k$$

ولذلك فإن الدالة النسبية لتقريب بادي ينتج من حلِّ $N+1$ من المعادلات الخطية

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

في $N+1$ من المجاهيل $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

مثال 1 إن سلسلة ماكلورين للدالة e^{-x} هي

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

إن إيجاد تقريب بادي من الرتبة الخامسة للدالة e^{-x} حيث $n = 3$ و $m = 2$ يتطلب اختيار p_0, p_1, p_2, p_3, q_1 و q_2 بحيث تكون معاملات x^k لكل $k = 0, 1, \ldots, 5$ أصفارًا في التعبير

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)(1 + q_1 x + q_2 x^2) - (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3)$$

وبفك هذا المقدار، وتجميع الحدود نحصل على

$$\begin{aligned}
x^5&: \quad -\tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{24}q_1 - \tfrac{1}{6}q_2 = 0; & x^2&: \quad \tfrac{1}{2} - q_1 + q_2 = p_2\\
x^4&: \quad \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{6}q_1 + \tfrac{1}{2}q_2 = 0; & x^1&: \quad -1 + q_1 = p_1\\
x^3&: \quad -\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}q_1 - q_2 = p_3; & x^0&: \quad 1 = p_0
\end{aligned}$$

ولحلِّ هذا النظام في Maple؛ نستخدم الأوامر الآتية:

```
>eq1:=-1+q1=p1;
>eq2:=1/2-q1+q2=p2;
>eq3:=-1/6+1/2*q1-q2=p3;
>eq4:=1/24-1/6*q1+1/2*q2=0;
>eq5:=-1/120+1/24*q1-1/6*q2=0;
>solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5},{q1,q2,p1,p2,p3});
```

التي تعطي

$$p_0 = 1,\ p_1 = -\tfrac{3}{5},\ p_2 = \tfrac{3}{20},\ p_3 = -\tfrac{1}{60},\ q_1 = \tfrac{2}{5} \quad \text{و} \quad q_2 = \tfrac{1}{20}$$

ولذلك فإن تقريب بادي يكون

$$r(x) = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2}$$

يعرض جدول (10.8) قيم $r(x)$ وقيم كثيرة حدود ماكلورين $P_5(x)$. ومن الواضح في المثال أن تقريب بادي مميز. ■

جدول 10.8

x	e^{-x}	$P_5(x)$	$\|e^{-x} - P_5(x)\|$	$r(x)$	$\|e^{-x} - r(x)\|$
0.2	0.81873075	0.81873067	8.64×10^{-8}	0.81873075	7.55×10^{-9}
0.4	0.67032005	0.67031467	5.38×10^{-6}	0.67031963	4.11×10^{-7}
0.6	0.54881164	0.54875200	5.96×10^{-5}	0.54880763	4.00×10^{-6}
0.8	0.44932896	0.44900267	3.26×10^{-4}	0.44930966	1.93×10^{-5}
1.0	0.36787944	0.36666667	1.21×10^{-3}	0.36781609	6.33×10^{-5}

ويمكن أيضًا استخدام مابل **Maple** مباشرة لحساب تقريب بادي.

نحسب أولًا سلسلة ماكلورين بالأمر

```
>series(exp(-x),x);
```

لنحصل على

$$1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

يحسب تقريب بادي بأخذ $n = 3$ و $m = 2$ باستخدام الأمر

```
>g:=convert(%,ratpo y,3,2);
```

حيث تشير % إلى تمهيدية الحساب السابق، أي السلسلة

$$g := \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2}$$

ثم يمكن حساب $g(0.8)$ على سبيل المثال عن طريق إدخال

```
>evalf(subs(x=0.8,g));
```

لنحصل على **0.4493096647**.

تنفّذ طريقة بادي للتقريب في الخوارزمية **(1.8)**.



تقريب بادي النسبي Pade' Rational Approximation

للحصول على التقريب النسبي

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} q_j x^j}$$

لدالة مفترض $f(x)$:

المدخلات: أعداد صحيحة غير سالبة m و n.

المخرجات: المعاملات $q_0, q_1, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = m + n$.
2	لكل $i = 0, 1, \ldots, N$ ضع $a_i = f^{(i)}(0)/i!$. (إن معاملات كثيرة حدود ماكلورين هي $a_0, \ldots, a_N$ التي يمكن أن تكون في المدخلات بدلًا من حسابها).
3	ضع $q_0 = 1$ $p_0 = a_0$

4	لكل $i = 1, 2, \dots, N$ نفّذ الخطوات 5-10. (أنشئ نظامًا خطيًا في مصفوفة B). (أنشئ نظامًا خطيًا في مصفوفة B).
5	لكل $j = 1, 2, \dots, i - 1$ ، إذا كان $j \le n$ فضع $b_{i,j} = 0$.
6	إذا كان $i \le n$ فضع $b_{i,i} = 1$.
7	لكل $j = i + 1, i + 2, \dots, N$ ضع $b_{i,j} = 0$.
8	لكل $j = 1, 2, \dots, i$ إذا كان $j \le m$ فضع $b_{i,n+j} = -a_{i-j}$.
9	لكل $j = n + i + 1, n + i + 2, \dots, N$ ضع $b_{i,j} = 0$.
10	ضع $b_{i,N+1} = a_i$.(تنفّذ الخطوات 11 – 22 النظام الخطي باستخدام الدوران الجزئي).
11	لكل $i = n + 1, n + 2, \dots, N - 1$ نفّذ الخطوات 12 – 18.
12	افرض k أصغر عدد صحيح بحيث $i \le k \le N$ و $\lvert b_{k,i}\rvert = \max_{i \le j \le N} \lvert b_{j,i}\rvert$ (جد عنصر الدوران).
13	إذا كان $b_{k,i} = 0$ فعندئذ تكون المخرجات ("النظام المنفرد"). توقف.
14	إذا كان $k \ne i$ (فعندئذ بدّل الصف i والصف k). لكل $j = i, i + 1, \dots, N + 1$ ضع $b_{COPY} = b_{i,j}$ $b_{i,j} = b_{k,j}$ $b_{k,j} = b_{COPY}$
15	لكل $j = i + 1, i + 2, \dots, N$ نفّذ الخطوات 16 – 18. (نفّذ عملية الحذف).
16	ضع $xm = b_{j,i}/b_{i,i}$.
17	لكل $k = i + 1, i + 2, \dots, N + 1$ ضع $b_{j,k} = b_{j,k} - xm \cdot b_{i,k}$.
18	ضع $b_{j,i} = 0$.
19	إذا كان $b_{N,N} = 0$ (" النظام منفرد") توقف.
20	إذا كان $m > 0$ فضع $q_m = b_{N,N+1}/b_{N,N}$. (ابدأ بالتعويض الإرجاعي).
21	لكل $i = N - 1, N - 2, \dots, n + 1$ ضع $q_{i-n} = \dfrac{b_{i,N+1} - \sum_{j=i+1}^{N} b_{i,j}q_{j-n}}{b_{i,i}}$
22	لكل $i = n, n - 1, \dots, 1$ ضع $p_i = b_{i,N+1} - \sum_{j=n+1}^{N} b_{i,j}q_{j-n}$.
23	المخرجات $(q_0, q_1, \dots, q_m, p_0, p_1, \dots, p_n)$ (العملية ناجحة). توقف. ■



إنه لمن الممتع أن نقارن بين عدد العمليات الحسابية اللازمة لحساب $P_5(x)$ و $r(x)$ في مثال **(1)**.
باستخدام الضرب المتداخل بين الأقواس، نجد أنه يمكن التعبير عن $P_5(x)$ بالصيغة

$$P_5(x) = \left(\left(\left(\left(-\frac{1}{120}x + \frac{1}{24}\right)x - \frac{1}{6}\right)x + \frac{1}{2}\right)x - 1\right)x + 1$$

بافتراض أن معاملات $1, x, x^2, x^3, x^4$ و x^5 مكتوبة على صورة كسور عشرية، فإن أي عملية منفردة لحساب $P_5(x)$ بالضرب المتداخل تتطلب خمس عمليات ضرب وخمس عمليات جمع/ طرح.
وباستخدام الضرب المتداخل يمكن التعبير عن $r(x)$ بالصيغة

$$r(x) = \frac{\left(\left(-\frac{1}{60}x + \frac{3}{20}\right)x - \frac{3}{5}\right)x + 1}{\left(\frac{1}{20}x + \frac{2}{5}\right)x + 1}$$

ولذلك فإن أي عملية منفردة لحساب $r(x)$ تتطلب خمس عمليات ضرب وخمس عمليات جمع/طرح وعملية قسمة واحدة. يظهر إذن أن جهد الحساب يكون لصالح تقريب كثيرة الحدود. ولكن على كل حال، عند إعادة التعبير عن $r(x)$ بالقسمة المتصلة، يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 12x + 20}{x^2 + 8x + 20} \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{\left(-\frac{152}{3}x - \frac{280}{3}\right)}{x^2 + 8x + 20} \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{-\frac{152}{3}}{\left(\frac{x^2+8x+20}{x+(35/19)}\right)} \end{aligned}$$

أو

$$r(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{-\frac{152}{3}}{\left(x + \frac{117}{19} + \frac{3125/361}{(x+(35/19))}\right)} \qquad (16.8)$$

وعند استخدام هذا التعبير، فإن العملية المنفردة لحساب $r(x)$ تتطلب عملية ضرب واحدة وخمس عمليات جمع/ طرح وعمليتي قسمة.
إذا كان مقدار الحساب اللازم للقسمة مساويًا تقريبًا لذلك المطلوب للضرب، فإن جهد الحساب المطلوب للتقييم $P_5(x)$ يزيد على ذلك المطلوب على نحو ملحوظ لإيجاد قيمة $r(x)$.
إن التعبير عن الدالة النسبية للتقريب بصيغة المعادلة **(16.8)** يسمى التقريب بالكسر المتصل **(Continued – fraction)**.

هناك اهتمام في الوقت الحاضر بطريقة التقريب الكلاسيكية هذه؛ بسبب فاعلية حساب هذا التمثيل. وإنها على كل حال طريقة خاصة، ولن نخوض في البحث فيها أكثر من ذلك. وإن البحث المستفيض في هذا الموضوع والتقريب النسبي عمومًا يمكن الرجوع إليه في **[RR,pp.285 - 322]**. وعلى الرغم من أن تقريب الدوال النسبية في مثال **1** قد أعطى نتائج أفضل من التقريب بكثيرة الحدود من الرتبة نفسها، إلا أن دقته تتغير بصورة واسعة جدًا.
وإن التقريب عند **0.2** ذو دقة ضمن 8×10^{-9}، أما التقريب عند **1.0** فيتطابق مع الدالة فقط ضمن 7×10^{-9}.

إن هذا التغيير في الدقة متوقع؛ لأن تقريب بادي يعتمد على تمثيل كثيرة حدود تايلور للدالة e^{-x}، ولتمثيل تايلور تغير واسع في الدقة في الفترة $[0.2, 1.0]$.

إن استخدام الكسور المتصلة للتقريب النسبي هو موضوع تعود جذوره إلى كلافيوس [Christopher Clavius (1537 - 1612)] ولقد استخدمت في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر على سبيل المثال- من قبل أويلر، لاكرانج وهرمايت.

وللحصول على تقريبات بالدوال النسبية ذات دقة أكثر تجانسًا، نستخدم كثيرات حدود تشبيشف، وهي مجموعة تظهر سلوكًا أكثر تجانسًا.

إن طريقة تشبيشف العامة للتقريب النسبي بالدالة تسير بالنمط نفسه الذي حصلنا به على تقريب بادي، ما عدا استعمالنا لكثيرة حدود تشبيشف من الرتبة k، أي $T_k(x)$ بدلًا من كل x^k المستخدمة في تقريب بادي.

افترض أننا نرغب في تقريب نسبي للدالة f بدالة من الرتبة N، نعبّر عنه بالصيغة

$$r(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)} \quad \text{حيث} \quad N = n + m \quad \text{و} \quad q_0 = 1$$

إن كتابة $f(x)$ بسلسلة عناصر كثيرات حدود تشبيشف على الصيغة

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

تعطي

$$f(x) - r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) - \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)}$$

أو

$$f(x) - r(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) \sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x) - \sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)} \tag{17.8}$$

تُختار المعاملات $q_1, q_2, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$ بحيث تكون معاملات $T_k(x)$ أصفارًا في بسط الطرف الأيمن للمعادلة عندما $k = 0, 1, \ldots, N$.

وإن هذا يتطلب عدم احتواء السلسلة

$$(a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \cdots)(T_0(x) + q_1 T_1(x) + \cdots + q_m T_m(x))$$
$$- (p_0 T_0(x) + p_1 T_1(x) + \cdots + p_n T_n(x))$$

على أي حدود من رتبة تساوي N أو أقل. وتظهر مشكلتان في عملية تشبيشف تجعلان تطبيقها أصعب من طريقة بادي، وتظهر واحدة منهما؛ لأن حاصل ضرب $q(x)$ في سلسلة تمثل $f(x)$ يتطلب ضرب كثيرات حدود تشبيشف. ويمكن حلُّ هذه المشكلة بالاستفادة من العلاقة

$$T_i(x) T_j(x) = \tfrac{1}{2}[T_{i+j}(x) + T_{|i-j|}(x)] \tag{18.8}$$

(انظر التمرين (8) في الفصل 3.8)

أما حلُّ المشكلة الثانية فيعدُّ أصعب، ويتطلب حساب سلسلة تشبيشف للدالة $f(x)$، وهذا ليس صعبًا نظريًّا؛ لأنه إذا كان

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

فإن تعامدية كثيرات حدود تشبيشف تتضمن

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad \text{و} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad k \geq 1 \text{ حيث}$$

أما من حيث التطبيق فمن النادر إمكانية تقييم هذه التكاملات بصيغة مغلقة، ويتطلب الأمر استخدام طريقة تكامل عددية لإيجاد كل قيمة.

مثال 2 الحدود الخمسة الأولى في سلسلة تشبيشف للدالة e^{-x} هي

$$\tilde{P}_5(x) = 1.266066T_0(x) - 1.130318T_1(x) + 0.271495T_2(x) - 0.044337T_3(x) + 0.005474T_4(x) - 0.000543T_5(x)$$

إن إيجاد تقريب تشبيشف النسبي من الرتبة الخامسة حيث $n = 3$ و $m = 2$ يتطلب اختيار p_0، p_1، p_2، p_3، q_1 و q_2 لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ حيث تكون معاملات $T_k(x)$ أصفارًا في السلسلة

$$\tilde{P}_5(x)[T_0(x) + q_1T_1(x) + q_2T_2(x)] - [p_0T_0(x) + p_1T_1(x) + p_2T_2(x) + p_3T_3(x)]$$

وإن استخدام العلاقة (18.8) وتجميع الحدود يعطيان المعادلات

$$\begin{aligned}
T_0&: \quad 1.266066 - 0.565159q_1 + 0.1357485q_2 = p_0\\
T_1&: \quad -1.130318 + 1.401814q_1 - 0.587328q_2 = p_1\\
T_2&: \quad 0.271495 - 0.587328q_1 + 1.268803q_2 = p_2\\
T_3&: \quad -0.044337 + 0.138485q_1 - 0.565431q_2 = p_3\\
T_4&: \quad 0.005474 - 0.022440q_1 + 0.135748q_2 = 0\\
T_5&: \quad -0.000543 + 0.002737q_1 - 0.022169q_2 = 0
\end{aligned}$$

إن حلّ هذا النظام يعطي تقريب الدالة النسبي

$$r_T(x) = \frac{1.055265T_0(x) - 0.613016T_1(x) + 0.077478T_2(x) - 0.004506T_3(x)}{T_0(x) + 0.378331T_1(x) + 0.022216T_2(x)}$$

ولقد وجدنا في بداية الفصل (3.8) أن

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

وإن استخدام هذه القيم لتحويل الدالة النسبي إلى التعبير بقوى x يعطي

$$r_T(x) = \frac{0.977787 - 0.599499x + 0.154956x^2 - 0.018022x^3}{0.977784 + 0.378331x + 0.044432x^2}$$

يظهر جدول (11.8) قيم $r_T(x)$ وقيم $r(x)$ التي حصلنا عليها في مثال (1) لغرض المقارنة. يتضح أن التقريب بالدالة $r(x)$ يفوق ذاك بالدالة $r_T(x)$ للقيمتين 0.4 , X = 0.2، ولكن قيمة الخطأ القصوى لـِ $r(x)$ هي 6.33×10^{-5} مقارنة بالقيمة 9.13×10^{-6} للدالة $r_T(x)$. ■

جدول 11.8

$\lvert e^{-x} - r_T(x)\rvert$	$r_T(x)$	$\lvert e^{-x} - r(x)\rvert$	$r(x)$	e^{-x}	x
5.66×10^{-6}	0.81872510	7.55×10^{-9}	0.81873075	0.81873075	0.2
6.95×10^{-6}	0.67031310	4.11×10^{-7}	0.67031963	0.67032005	0.4
1.28×10^{-6}	0.54881292	4.00×10^{-6}	0.54880763	0.54881164	0.6
9.13×10^{-6}	0.44933809	1.93×10^{-5}	0.44930966	0.44932896	0.8
7.89×10^{-6}	0.36787155	6.33×10^{-5}	0.36781609	0.36787944	1.0

يمكن توليد تقريب تشبيشف باستخدام الخوارزمية (2.8).

ALGORITHM
الخوارزمية
2.8

تقريب تشيبيشف النسبي Chebyshev Rational Approximation

للحصول على التقريب النسبي

$$r_T(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)}$$

للدوال المعلوم $f(x)$:

المدخلات: أعداد صحيحة غير سالبة m و n.

المخرجات: المعاملات $q_0, q_1, \dots, q_m$ و $p_0, p_1, \dots, p_n$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = m + n$.
2	ضع $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\,d\theta$ (يُضاعَف a_0 للحصول على فاعلية في الحساب). لكل $k = 1, 2, \dots, N + m$ ضع $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\,d\theta$ (يمكن إيجاد قيم التكاملات باستخدام طريقة عددية للتكامل، أو أن توضع المعاملات مباشرة).
3	ضع $q_0 = 1$.
4	لكل $i = 0, 1, \dots, N$ نفِّذ الخطوات 5 − 9. (أنشئ نظامًا خطيًّا بالمصفوفة B).
5	لكل $j = 0, 1, \dots, i$، إذا كان $j \le n$ فضع $b_{i,j} = 0$.
6	إذا كان $i \le n$ فضع $b_{i,i} = 1$.
7	لكل $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ ضع $b_{i,j} = 0$.
8	لكل $j = n + 1, n + 2, \dots, N$ إذا كان $i \ne 0$ فضع $b_{i,j} = -\frac{1}{2}(a_{i+j-n} + a_{\lvert i-j+n\rvert})$، وإلا فضع $b_{i,j} = -\frac{1}{2}a_{j-n}$.
9	إذا كان $i \ne 0$ فضع $b_{i,N+1} = a_i$، وإلا فضع $b_{i,N+1} = \frac{1}{2}a_i$. (تنفذ الخطوات 10 − 21 النظام الخطي باستخدام الدوران الجزئي).
10	لكل $i = n + 1, n + 2, \dots, N - 1$ نفِّذ الخطوات 11 − 17.
11	افترض k أصغر عدد صحيح بحيث $i \le k \le N$ و $\lvert b_{k,i}\rvert = \max_{i \le j \le N} \lvert b_{j,i}\rvert$ (أوجد عنصر الدوران).
12	إذا كان $b_{k,i} = 0$ فعندئذ تكون المخرجات ("النظام المنفرد"). توقف.



13	إذا كان $i \neq k$ فبدّل الصف i والصف k . لكل $j = i, i+1, \ldots, N+1$ ضع $b_{COPY} = b_{i,j}$ $b_{i,j} = b_{k,j}$ $b_{k,j} = b_{COPY}$
14	لكل $j = i+1, i+2, \ldots, N$ نفّذ الخطوات 15 − 17. (أجرِ الحذف).
15	ضع $xm = \dfrac{b_{j,i}}{b_{i,i}}$
16	لكل $k = i+1, i+2, \ldots, N+1$ ضع $b_{j,k} = b_{j,k} - xm \cdot b_{i,k}$.
17	ضع $b_{j,i} = 0$.
18	إذا كان $b_{N,N} = 0$ فعندئذ تكون المخرجات ("النظام منفرد"). توقف.
19	إذا كان $m > 0$ فضع $q_m = \dfrac{b_{N,N+1}}{b_{N,N}}$. (ابدأ بالتعويض الإرجاعي).
20	لكل $i = N-1, N-2, \ldots, n+1$ ضع $q_{i-n} = \dfrac{b_{i,N+1} - \sum_{j=i+1}^{N} b_{i,j}q_{j-n}}{b_{i,i}}$
21	لكل $i = n, n-1, \ldots, 0$ ضع $p_i = b_{i,N+1} - \sum_{j=n+1}^{N} b_{i,j}q_{j-n}$.
22	المخرجات $(q_0, q_1, \ldots, q_m, p_0, p_1, \ldots, p_n)$ (العملية ناجحة). توقف.

■

يمكننا الحصول على كل من امتداد سلسلة تشبيشف وتقريب تشبيشف النسبي باستخدام **CAS**. فعلى سبيل المثال: لجعل كثيرات حدود تشبيشف متاحة في مابل **Maple** باستخدام مكتبة كثيرات الحدود المتعامدة **Orthopoly library**؛ ندخل الأمر

```
>with(orthopoly,T);
```

إن عملية حساب سلسلة تشبيشف بوصفها تقريبًا تكون

```
>g:=numapprox[chebyshev](exp(-x),x,0.000001);
```

حيث إن البارامتر الثالث يحدّد الدقة المطلوبة، والتمهيدية هي

$$
\begin{aligned}
g := {} & 1.266065878\,T(0,x) - 1.130318208\,T(1,x) + .2714953396\,T(2,x) \\
& - .04433684985\,T(3,x) + .005474240442\,T(4,x) \\
& - .0005429263119\,T(5,x) + .00004497732296\,T(6,x) \\
& - .3198436462\,10^{-5}\,T(7,x)
\end{aligned}
$$

ونستطيع إيجاد قيمة $g(0.8)$ باستخدام

```
>evalf(subs(x=0.8,g));
```

لنحصل على .4493288893.

للحصول على تقريب تشبيشف النسبي، نبدأ مرة أخرى بسلسلة تشبيشف كالسابق، ثم ندخل

```
>restart;
>numapprox[chebyshev](exp(-x),x,0.000001);
>g:=convert(%,ratpoly,3,2);
```

لينتج

$$g := (1.050531166\,T(0,x) - .6016362122\,T(1,x) + .07417897149\,T(2,x) - .004109558353\,T(3,x))(\,T(0,x) + .3870509565\,T(1,x) + .02365167312\,T(2,x))$$

وبما أننا مسحنا ذاكرة Maple، نحتاج إلى تنزيل مكتبة كثيرات الحدود المتعامدة **orthopoly** بالأمر

```
>with(orthopoly,T);
```

ومن ثم يمكننا إيجاد قيمة $g(0.8)$ بالأمر

```
>evalf(subs(x=0.8,g));
```

لنحصل على .4493317579.

إن طريقة تشبيشف لا تعطي أفضل تقريب نسبي بالدالة، أي التقريب الذي تكون فيه القيمة العظمى لخطأ التقريب أصغر ما يمكن، ولكن يمكن استخدام الطريقة؛ إذ إنها نقطة بداية لطريقة إرجاعية تعرف بخوارزمية رميز الثانية (second Remez algorithm) التي تتقارب إلى أفضل تمثيل. وللمزيد حول هذه الطريقة والخوارزمية يمكنك الرجوع إلى المرجع [RR,pp292 - 305] أو [Po,pp.90 - 92].

طوّر إيفغني رميز [Evgeny Remez'(1896 - 1975)] في عام 1930 طرائق عامة لحساب تقريبات تشبيشف لكثيرات الحدود. ثم طوّر خوارزمية مشابهة صالحة لتقريب الدّوال المتصلة المعرفة على الفترة بالتقريب بالدوال النسبية بدرجة محددة من الدقة. شمل عمله حقولًا مختلفة من مبرهنة التقريب، بالإضافة إلى طرائق تقريب حلول المعادلات التفاضلية.

مجموعة التمارين 4.8 EXERCISE SET

1. أوجد تقريبات بادي Padé جميعها من الرتبة الثانية للدالة $f(x) = e^{2x}$. قارن النتائج بالقيم الفعلية للدالة $f(x_i)$ عند النقاط $x_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. أوجد تقريبات بادي Padé جميعها من الرتبة الثالثة لتقريب $f(x) = x\ln(x+1)$. قارن النتائج بالقيم الفعلية للدالة $f(x_i)$ عند النقاط $x_i = 0.2i$ لـ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ جميعًا.
3. أوجد تقريب بادي Padé من الرتبة الخامسة حيث $n = 2$ و $m = 3$ للدالة $f(x) = e^x$. قارن النتائج بتلك التي تحصل عليها من كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الخامسة عند النقاط $x_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
4. كرِّر التمرين 3 باستخدام تقريب بادي من الرتبة الخامسة حيث $n = 3$ و $m = 2$. قارن النتائج لكل x_i بتلك في التمرين (3).
5. أوجد تقريب بادي من الرتبة السادسة، حيث $n = m = 3$ للدالة $f(x) = \sin x$. قارن النتائج بكلٍّ من النتائج الصحيحة والنتائج التي توصَّلت إليها من كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة السادسة، وذلك عند النقاط $x_i = 0.1i$ لـ $i = 0, 1, \ldots, 5$ جميعًا.
6. أوجد تقريب بادي من الرتبة السادسة، حيث (أ) $n = 2, m = 4$ (ب) $n = 4, m = 2$ للدالة $f(x) = \sin x$ قارن النتائج عند كل x_i بتلك التي حصلت عليها في التمرين (5).
7. يعرض جدول (10.8) نتائج تقريب بادي من الرتبة الخامسة بأخذ $n = 3$ و $m = 2$ ونتائج كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الخامسة، والقيم الصحيحة للدالة $f(x) = e^{-x}$ عندما $x_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4$ و 5.

قارن هذه النتائج بتلك التي نحصل عليها من تقريبات بادي الأخرى في الحالات

أ. $n = 0, m = 5$ ب. $n = 1, m = 4$ ج. $n = 3, m = 2$ د. $n = 4, m = 1$

8. عبّر عن الدّوال النسبية الآتية بصيغة الكسر المتصل

أ. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 1}$ ب. $\dfrac{4x^2 + 3x - 7}{2x^3 + x^2 - x + 5}$

ج. $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x + 4}$ د. $\dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{3x^3 + 2x^2 - x + 1}$

9. أوجد تقريبات تشبيشف النسبية من الرتبة الثانية للدالة $f(x) = e^{-x}$. أيُّها يعطي أحسن التقريبات عند $f(x) = e^{-x}$ at $x = 0.25, 0.5$ و 1 ؟

10. أوجد تقريبات تشبيشف النسبية من الرتبة الثالثة للدالة $f(x) = \cos x$.
أيّها يعطي أفضل التقريبات للدالة $f(x) = \cos x$ عند $x = \pi/4$ و $\pi/3$ ؟

11. أوجد تقريب تشبيشف النسبي من الرتبة الرابعة حيث $n = m = 2$ لـ $f(x) = \sin x$.
قارن النتائج التي تحصل عليها بتلك التي وجدتها في التمرين 5 باستخدام تقريب بادي من الرتبة السادسة، وذلك عند النقاط $x_i = 0.1i$ لـ $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ جميعًا.

12. أوجد جميع تقريبات تشبيشف النسبية من الرتبة الخامسة للدالة $f(x) = e^x$.
قارن نتائجك بتلك التي حصلت عليها في التمرين 3 و 4، وذلك عند النقاط $x_i = 0.2i$ لـ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ جميعًا.

13. لتقريب $f(x) = e^x$ تقريبًا دقيقًا بغرض تضمينه في مكتبة رياضية؛ نحدّد أولًا مجال تعريف الدالة f. وإذا أعطيت عددًا حقيقيًّا x فاقسم على $\ln\sqrt{10}$ لتحصل على العلاقة

$$x = M \cdot \ln\sqrt{10} + s$$

حيث M عدد صحيح، و S عدد حقيقي يحقق $|s| \le \frac{1}{2}\ln\sqrt{10}$

أ. برهن أن $e^x = e^s \cdot 10^{M/2}$.

ب. أنشئ تقريب الدوال النسبية للدالة e^s مستخدمًا $n = m = 3$.
قدّر الخطأ عندما يكون $0 \le |s| \le \frac{1}{2}\ln\sqrt{10}$.

جـ . صمِّم طريقة تنفيذ e^x مستخدمًا نتائج (أ) و(ب) والتقريبات

$$\frac{1}{\ln\sqrt{10}} = 0.8685889638 \quad \text{و} \quad \sqrt{10} = 3.162277660$$

14. لتقريب $\sin x$ و $\cos x$ تقريبًا دقيقًا بغرض تضمينهما في مكتبة رياضية؛ نحدّد أولًا مجال التعريف لكل منهما. لكل عدد حقيقي x، اقسم على π لتحصل على العلاقة $|x| = M\pi + s$ حيث M عدد صحيح و $|s| \le \dfrac{\pi}{2}$.

أ. برهن أن $\sin x = \operatorname{sgn}(x) \cdot (-1)^M \cdot \sin s$.

ب. أنشئ تقريبًا نسبيًّا للدالة $\sin s$ باستخدام $n = m = 4$.
قدّر الخطأ عندما يكون $0 \le |s| \le \pi/2$.

جـ . صمِّم طريقة تنفيذ (تقييم) $\sin x$ باستخدام الفقرتين (أ) و (ب).

د. كرِّر الفقرة (جـ) للدالة $\cos x$ مستخدمًا حقيقة أن $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

5.8 التقريب بكثيرة الحدود المثلثية
Trigonometric Polynomial Approximation

إن استخدام سلاسل دالة الجيب sine وجيب التمام cosine لتمثيل الدّوال كان قد عُرف في بدايات الخمسينيات من القرن الثامن عشر، وكان ذلك بدراسة حركة الزنبرك ذي

الاهتزازات. ولقد بُحث في هذه المسألة من قبل جيين دي ألمبرت Jean d'Alembert ثم من قبل أشهر رياضي في ذلك العصر، ليونارد أويلر Leonhard Euler. ولكن الفضل الأول يعود إلى دانيال بيرنوللي Daniel Bernoulli الذي دعا إلى استخدام المجاميع اللانهائية للجيوب وجيوب التمام بوصفها حلًّا للمسألة. وقد باتت هذه المجاميع الآن تعرف بسلاسل فورييه Fourier series في أوائل القرن التاسع عشر، وقد استخدم جيين بابتست جوزف فورييه هذه السلاسل لدراسة انتقال الحرارة، وطوّر مبرهنة شبه تامة في هذا الموضوع.

إن أولى الملاحظات في تطوير سلاسل فورييه تكمن في أن: لكل عدد صحيح موجب n تكون مجموعة الدّوال $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ متعامدة على $[-\pi, \pi]$ بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x) \equiv 1$ حيث

$$\phi_0(x) = \frac{1}{2}, \quad \phi_k(x) = \cos kx \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

و

$$\phi_{n+k}(x) = \sin kx \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

إن التعامدية هذه تأتي من حقيقة أن: لكل عدد صحيح j تكون تكاملات $w(x) \equiv 1$ و $\cos jx$ على$[-\pi, \pi]$ مساوية للصفر، ويمكننا إعادة كتابة دوال الجيب وجيب التمام على صيغ مجاميع باستخدام المتطابقات المثلثية.

$$\sin t_1 \sin t_2 = \frac{1}{2}[\cos(t_1 - t_2) - \cos(t_1 + t_2)]$$

$$\cos t_1 \cos t_2 = \frac{1}{2}[\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2)]$$

$$\sin t_1 \cos t_2 = \frac{1}{2}[\sin(t_1 - t_2) + \sin(t_1 + t_2)] \qquad (19.8)$$

ضع $\mathcal{T}_n$ لتعبر عن مجموعة توليفات الدّوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}$ جميعها، وتسمى هذه المجموعة مجموعة كثيرات الحدود المثلثية (trigonometric polynomials) من رتبة تساوي n أو أقل.

(تضيف بعض المصادر دالة إضافيًّا إلى المجموعة هو $\phi_{2n}(x) = \sin nx$) إن غرضنا هو إيجاد تقريب لأي دالة $f \in C[-\pi, \pi]$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة باستخدام الدّوال $\mathcal{T}_n$ على الصيغة

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

نشر جوزف فورييه
Josef Fourier (1768 - 1830)
نظريته عن السلاسل المثلثية في
The'orie analytique de la chaleur
وذلك لحلّ مسألة التوزيع الحراري بحالة الاستقرار في المجسم.

بما أن مجموعة الدّوال $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ متعامدة في الفترة $[-\pi, \pi]$ بالنسبة **إلى** $w(x) \equiv 1$ فإن الاختيار المناسب للمعادلات هو

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

و

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

تسمى النهاية لـ $S_n(x)$ عندما $n \to \infty$ سلسلةَ فورييه Fourier series للدالة f.

وإن سلاسل فوريِيه تستخدم لوصف حل المعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلية الجزئية التي تظهر في أحوال فيزيائية.

مثال 1 لتحديد كثيرة الحدود المثلثية في $\mathcal{T}_n$ التي تقرب

$$f(x) = |x|, \quad \text{لكل} \quad -\pi < x < \pi$$

ينبغي إيجاد

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]$$

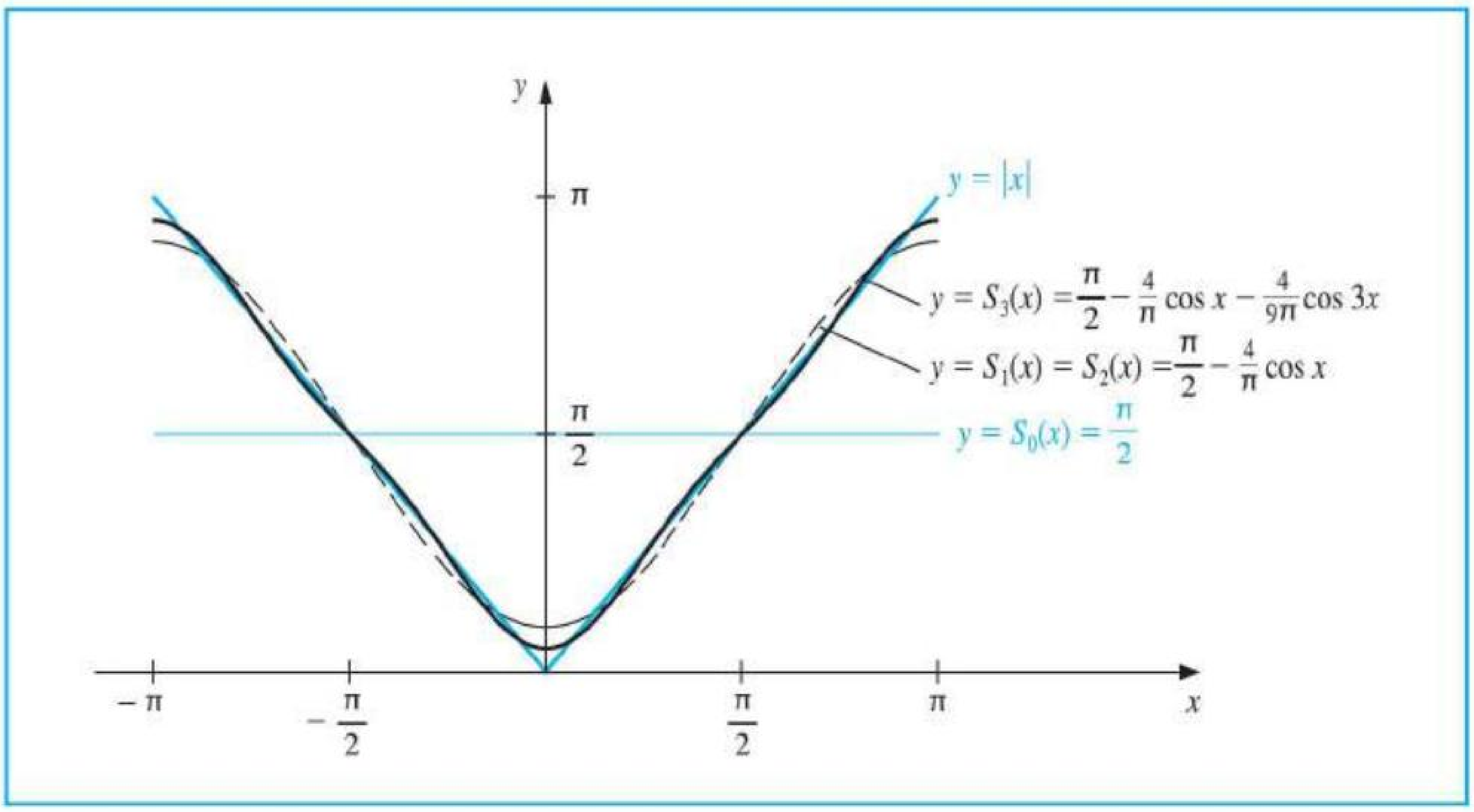
لكل $k = 1, 2, \ldots, n$،

و $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin kx\,dx = 0$ لكل $k = 1, 2, \ldots, n-1$

إن كون b_k جميعًا أصفارًا ينبع من حقيقة أن $g(x) = |x|\sin kx$ هو دالة فردي لكل k، وتكامل أي دالة فردي على أي فترة من النوع $[-a, a]$ هو صفر. (انظر التمرينين 13 و 14)
ومن ثم فإن كثيرة الحدود المثلثية من T_n التي تعطي التقريب للدالة f هي

$$S_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx$$

إن بعض كثيرات الحدود المثلثية للدالة $f(x) = |x|$ تظهر في شكل (13.8).



شكل 13.8

إن سلسلة فورييه للدالة f هي

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx$$

بما أن $|\cos kx| \le 1$، فإن السلسلة تتقارب (converges)، ويكون $S(x)$ موجودًا لقيم x و k جميعها الحقيقية. ■

يوجد تعبير منفصل مماثل لما شُرح، وهو مفيد لحالة التقريب باستخدام المربعات الصغرى المنفصلة (discrete) وعملية الاستكمال الداخلي للكميات الكبيرة من البيانات.

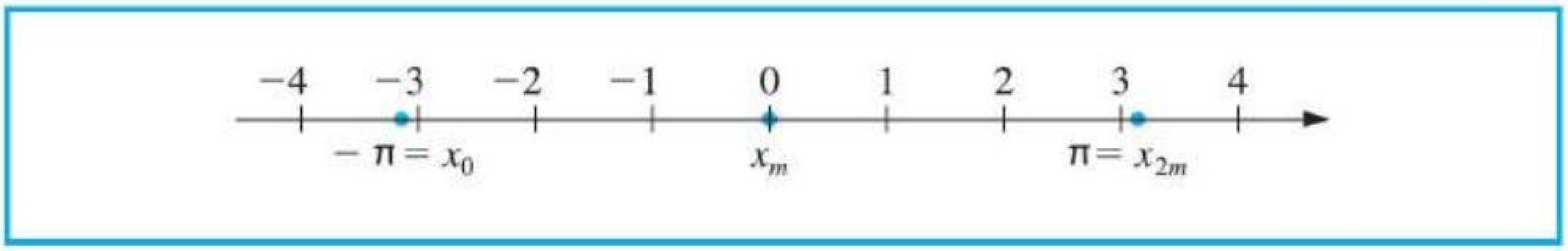
افترض أن لديك $2m$ من نقاط البيانات المزدوجة $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$، إذ تعطي العناصر الأولى في الازدواج تجزئة متساوية لفترة مغلقة.

وللتبسيط، نفترض أن الفترة هي $[-\pi, \pi]$، وعليه كما يظهر في شكل **14.8** يكون

$$x_j = -\pi + \left(\frac{j}{m}\right)\pi \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, 2m-1 \tag{20.8}$$

إذا لم تكن الفترة هي $[-\pi, \pi]$ يمكن تحويل البيانات إلى هذه الصيغة، باستخدام تحويل خطي بسيط.

شكل 14.8



إن الهدف في الحالة المنفصلة هو تحديد كثيرة حدود مثلثية $S_n(x)$ في $\mathcal{T}_n$ بحيث تجعل المقدار

$$E(S_n) = \sum_{j=0}^{2m-1} [y_j - S_n(x_j)]^2$$

أصغر ما يمكن. ولعمل ذلك، نحتاج إلى اختيار الثوابت $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ بحيث يكون

$$E(S_n) = \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ y_j - \left[\frac{a_0}{2} + a_n \cos n x_j + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos k x_j + b_k \sin k x_j) \right] \right\}^2 \tag{21.8}$$

أصغر ما يمكن.

إن تحديد الثوابت يمكن تبسيطه من حقيقة أن $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ متعامدة بالنسبة إلى عملية الجمع على النقاط المتساوية في البعد $\{x_j\}_{j=0}^{2m-1}$ في الفترة $[-\pi, \pi]$.

إننا نعني بهذا أنه لكل $k \neq l$ يكون

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \phi_k(x_j)\phi_l(x_j) = 0 \tag{22.8}$$

ولبرهان التعامد، نستخدم التمهيدية الآتية:

تمهيدية 12.8 إذا لم يكن العدد الصحيح r أحد مضاعفات $2m$ فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos r x_j = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} \sin r x_j = 0$$

وبالإضافة، إلى ذلك إذا لم يكن r أحد مضاعفات m، فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos r x_j)^2 = m \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} (\sin r x_j)^2 = m$$

■

لقد استخدم أويلر الرمز لأول مرّة ليمثل $\sqrt{-1}$ في كتابه
De Formulis Dfferentialibus Angularibus.

البرهان إن معادلة أويلر (Euler's Formula) تنص على أنه إذا كان $i^2 = -1$ فإنه يكون لكل عدد حقيقي z

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad (23.8)$$

إن تطبيق هذه التمهيدية يعطي

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j + i \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = \sum_{j=0}^{2m-1} \left(\cos rx_j + i \sin rx_j\right) = \sum_{j=0}^{2m-1} e^{irx_j}$$

ولكن

$$e^{irx_j} = e^{ir(-\pi + j\pi/m)} = e^{-ir\pi} \cdot e^{irj\pi/m}$$

لذلك فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j + i \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = e^{-ir\pi} \sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m}$$

بما أن $\sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m}$ سلسلة هندسية حدّها الأول 1 أو نسبتها $e^{ir\pi/m} \neq 1$ نحصل على

$$\sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m} = \frac{1 - (e^{ir\pi/m})^{2m}}{1 - e^{ir\pi/m}} = \frac{1 - e^{2ir\pi}}{1 - e^{ir\pi/m}}$$

ولكن $e^{2ir\pi} = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi = 1$

لذلك $1 - e^{2ir\pi} = 0$

و

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j + i \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = e^{-ir\pi} \sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m} = 0$$

إن هذا يتضمَّن أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j = 0$$

إذا لم يكن r أحد مضاعفات m فإن هذه المجاميع تتضمن أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j)^2 = \sum_{j=0}^{2m-1} \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2rx_j\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{2m-1} 1 + \sum_{j=0}^{2m-1} \cos 2rx_j\right] = \frac{1}{2}(2m + 0) = m$$

وبالمثل فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\sin rx_j)^2 = m$$

■ ■ ■

والآن يمكننا برهنة التعامد المنصوص عليه في المعادلة (22.8).

خذ على سبيل المثال الحالة

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \phi_k(x_j)\, \phi_{n+l}(x_j) = \sum_{j=0}^{2m-1} (\cos kx_j)(\sin lx_j)$$

بما أن

$$\cos kx_j \sin lx_j = \tfrac{1}{2}[\sin(l+k)x_j + \sin(l-k)x_j]$$

و $(l+k)$ و $(l-k)$ كليهما أعداد صحيحة ليست من مضاعفات $2m$، فإن تمهيدية (12.8) تضمن أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos kx_j)(\sin lx_j) = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{2m-1} \sin(l+k)x_j + \sum_{j=0}^{2m-1} \sin(l-k)x_j\right] = \frac{1}{2}(0+0) = 0$$

تستخدم هذه الطريقة لبرهنة أن حالة التعامد متحققة لأي زوج من الدّوال، وللحصول على مبرهنة الآتية:

مبرهنة 13.8 إن الثوابت في المجموع

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

التي تجعل مجموع المربعات الصغرى

$$E(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_n(x_j))^2$$

أصغر ما يمكن هي

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

و

$$b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$ ■

تُبرهَن هذه الطريقة بوضع المشتقات الجزئية للمقدار E بالنسبة إلى كل a_k و لكل b_k مساوية للصفر، كما حدث في البندين (1.8) و (2.8)، ثم يستخدم التعامد لتبسيط المعادلات. وعلى سبيل المثال

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b_k} = 2 \sum_{j=0}^{2m-1} [y_j - S_n(x_j)](-\sin kx_j)$$

ومن ثم

$$0 = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j - \sum_{j=0}^{2m-1} S_n(x_j) \sin kx_j$$
$$= \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j - \frac{a_0}{2} \sum_{j=0}^{2m-1} \sin kx_j - a_n \sum_{j=0}^{2m-1} \sin kx_j \cos nx_j$$
$$- \sum_{l=1}^{n-1} a_l \sum_{j=0}^{2m-1} \sin kx_j \cos lx_j - \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1} b_l \sum_{j=0}^{2m-1} \sin kx_j \sin lx_j - b_k \sum_{j=0}^{2m-1} (\sin kx_j)^2$$

إن التعامد يتضّمن أن المجاميع جميعها في الطرف الأيمن، عدا المجموع الأول والمجموع الأخير كلها أصفار، وتنص تمهيدية (12.8) على أن المجموع النهائي يساوي m.

ولذلك يكون

$$b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j$$

مثال 2 ليكن $f(x) = 2x^2 - 9$ لـ x جميعها في $[-\pi, \pi]$. سنجد $S_2(x)$ كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة 2 بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة.

إذا أخذنا $m = 3$ فإن النقاط تكون

$$x_j = \pi + \frac{j}{m}\pi \quad \text{و} \quad y_j = f(x_j) = 2x_j^2 - 9 \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

إن كثيرة الحدود المثلثية هي

$$S_2(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_2 \cos 2x + (a_1 \cos x + b_1 \sin x)$$

حيث

$$a_k = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{5} y_j \cos kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, 2$$

وتكون المعاملات

$$a_0 = \frac{1}{3}\left(f(-\pi) + f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -4.10944566$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(f(-\pi)\cos(-\pi) + f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f(0)\cos 0 + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -8.77298169$$

$$a_2 = \frac{1}{3}\left(f(-\pi)\cos(-2\pi) + f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + f(0)\cos 0 + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2.92432723$$

و

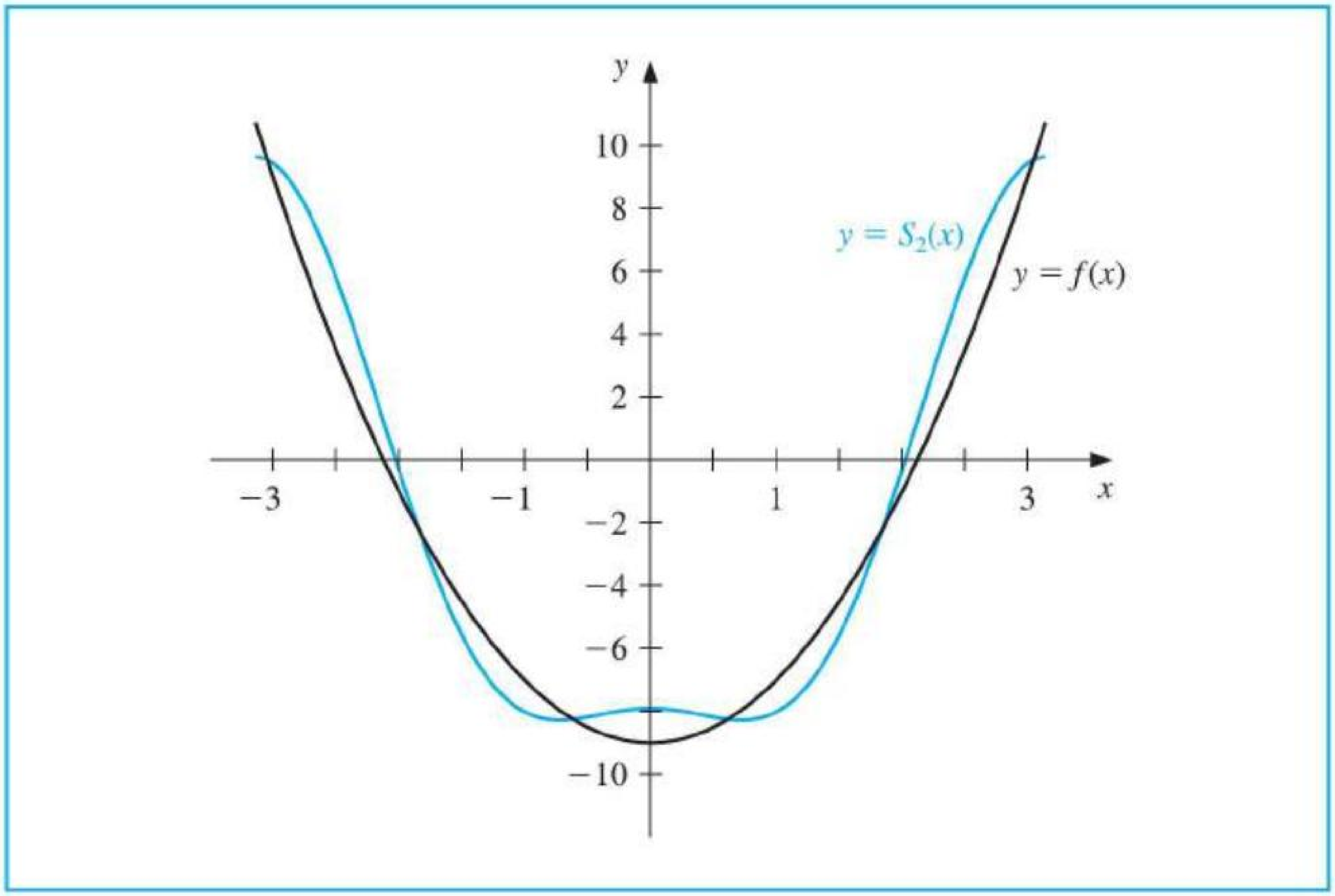
$$b_1 = \frac{1}{3}\left(f(-\pi)\sin(-\pi) + f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f(0)\sin 0 + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 0$$

وهكذا يكون

$$S_2(x) = \tfrac{1}{2}(-4.10944566) - 8.77298169\cos x + 2.92432723\cos 2x$$

يظهر شكل (12.8) الدالة $f(x)$ وكثيرة الحدود المثلثية بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة $S_2(x)$.

شكل 15.8



يوضح المثال الآتي إيجاد التقريب بالمربعات الصغرى لدالة معرفة على أي فترة مغلقة.

مثال 3 ليكن $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - \tan x(x-2)$. إن إيجاد التقريب $S_3(x)$ للبيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{9}$، حيث $x_j = j/5$ و $y_j = f(x_j)$ بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة يتطلب أولاً التحويل من $[0, 2]$ إلى $[-\pi, \pi]$. إن هذا التحويل الخطي هو $z_j = \pi(x_j - 1)$ وتصبح البيانات بعد التحويل بالصيغة

$$\left\{\left(z_j, f\left(1 + \frac{z_j}{\pi}\right)\right)\right\}_{j=0}^{9}$$

ومن ثم تكون كثيرة الحدود المثلثية بطريقة المربعات الصغرى

$$S_3(z) = \frac{a_0}{2} + a_3\cos 3z + \sum_{k=1}^{2}(a_k\cos kz + b_k\sin kz),$$

حيث $a_k = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{9} f\left(1+\frac{z_j}{\pi}\right)\cos kz_j$ لكل $k = 0, 1, 2, 3$

و

$b_k = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{9} f\left(1+\frac{z_j}{\pi}\right)\sin kz_j$ لكل $k = 1, 2$

إن إيجاد قيم هذه المجاميع يعطي التقريب

$$S_3(z) = 0.76201 + 0.77177\cos z + 0.017423\cos 2z + 0.0065673\cos 3z - 0.38676\sin z + 0.047806\sin 2z$$

وبالتحويل إلى المتغير x نحصل على

$$S_3(x) = 0.76201 + 0.77177\cos\pi(x-1) + 0.017423\cos 2\pi(x-1) + 0.0065673\cos 3\pi(x-1) - 0.38676\sin\pi(x-1) + 0.047806\sin 2\pi(x-1)$$

يعرض جدول (12.8) قيم $f(x)$ و $S_3(x)$. ■

جدول 12.8

x	$f(x)$	$S_3(x)$	$\lvert f(x) - S_3(x)\rvert$
0.125	0.26440	0.24060	2.38×10^{-2}
0.375	0.84081	0.85154	1.07×10^{-2}
0.625	1.36150	1.36248	9.74×10^{-4}
0.875	1.61282	1.60406	8.75×10^{-3}
1.125	1.36672	1.37566	8.94×10^{-3}
1.375	0.71697	0.71545	1.52×10^{-3}
1.625	0.07909	0.06929	9.80×10^{-3}
1.875	−0.14576	−0.12302	2.27×10^{-2}

مجموعة التمارين 5.8 EXERCISE SET

1. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_2(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدالة $f(x) = x^2$ on $[-\pi, \pi]$.

2. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدالة $f(x) = x$ on $[-\pi, \pi]$.

3. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_3(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال $f(x) = e^x$ on $[-\pi, \pi]$.

4. أوجد كثيرة الحدود المثلثية العامة $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال $f(x) = e^x$ on $[-\pi, \pi]$.

5. أوجد كثيرة الحدود المثلثية العامة $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{إذا كان } 0 < x < \pi \end{cases}$$

6. أوجد كثيرة الحدود المثلثية العامة $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{إذا كان } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{إذا كان } 0 < x < \pi \end{cases}$$

7. أوجد بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة الكثيرة الحدود المثلثية $S_n(x)$ على الفترة $[-\pi,\pi]$ للدوال الآتية، باستخدام القيم m و n المحدّدة:

أ. $f(x) = \cos 2x$، $m = 4, n = 2$
ب. $f(x) = \cos 3x$، $m = 4, n = 2$
ج. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x + 2\cos \frac{1}{3}x$، $m = 6, n = 3$
د. $f(x) = x^2 \cos x$، $m = 6, n = 3$

8. احسب الخطأ $E(S_n)$ لكل الدّوال في التمرين (7).

9. أوجد بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة كثيرة الحدود المثلثية $S_3(x)$ باستخدام $m = 4$ للدالة $f(x) = e^x \cos 2x$ على الفترة $[-\pi,\pi]$. احسب الخطأ $E(S_3)$.

10. كرِّر التمرين (9) باستخدام $m = 8$. قارن قيم كثيرات الحدود المستخدمة في التقريب بقيم f عند النقاط $\xi_j = -\pi + 0.2j\pi$ لكل $0 \le j \le 10$ فأي تقريب هو الأفضل؟

11. ليكن $f(x) = 2\tan x - \sec 2x$ لكل $2 \le x \le 4$ بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة، أوجد كثيرات الحدود المثلثية $S_n(x)$ باستخدام قيم n و m كما يأتي، ثم احسب الخطأ في كل حالة:

أ. $n = 3, \quad m = 6$
ب. $n = 4, \quad m = 6$

12. أ. بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة، أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_4(x)$، باستخدام $m = 16$ للدالة $f(x) = x^2 \sin x$ على الفترة $[0,1]$.

ب. احسب $\int_0^1 S_4(x)\,dx$. ج. قارن التكامل في (ب) بـ $\int_0^1 x^2 \sin x\,dx$.

13. برهن أنه لكل دّالة فردية متصلة f معرفة على $[-a,a]$ يكون $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

14. برهن أنه لكل دّالة زوجية متصلة f معرفة على الفترة $[-a,a]$ يكون.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

15. برهن أن الدّوال

$$\phi_0(x) = \tfrac{1}{2}, \phi_1(x) = \cos x, \dots, \phi_n(x) = \cos nx, \ _{n+1}(x) = \sin x, \dots, \phi_{2n-1}(x) = \sin(n-1)x$$

متعامدة على الفترة $[-\pi,\pi]$ بالنسبة إلى دّالة الوزن $w(x) \equiv 1$.

16. حُدّد في التمرين (1) سلسلة فورييه للدالة $f(x) = |x|$. استخدم هذه السلسلة وافترض أنها تمثِّل f عند الصفر لكي تجد قيمة السلسلة اللانهائية المتقاربة

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1/(2k+1)^2)$$

6.8 تحويلات فورييه السريعة Fast Fourier Transforms

وجدنا في النصف الثاني من الفصل (5.8) بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة صيغة كثيرة الحدود من الرتبة n على نقاط البيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$ التي عددها $2m-1$، حيث إن $x_j = -\pi + (j/m)\pi$ لكل $j = 0, 1, \dots, 2m-1$.

إن كثيرة الحدود المثلثية للاستكمال الداخلي (interpolatory) في $\mathcal{T}_m$ على نقاط البيانات هذه التي عددها $2m$ هي تقريبًا كثيرة الحدود بالمربعات الصغرى نفسها؛ لأن كثيرة الحدود المثلثية

بطريقة المربعات الصغرى تجعل حد الخطأ

$$E(S_m) = \sum_{j=0}^{2m-1} \left(y_j - S_m(x_j)\right)^2$$

أصغر ما يمكن، وهذا الخطأ لكثيرة الحدود المثلثية للاستكمال يساوي صفرًا، ومن ثم فقد حصلنا على أصغر ما يمكن من الخطأ عندما يكون

$$S_m(x_j) = y_j \text{ لكل } j = 0, 1, \ldots, 2m-1$$

وعلى كل حال هناك حاجة إلى تعديل صيغة كثيرة الحدود إذا ما أردنا أن تتخذ المعاملات الصيغة نفسها كما في حالة المربعات الصغرى.

لقد وجدنا في تمهيدية (12.8) أنه إذا لم يكن r أحد مضاعفات m فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos r x_j)^2 = m$$

إن الاستكمال الداخلي يتطلب بدلًا من ذلك حساب

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos m x_j)^2$$

الذي يأخذ القيمة $2m$. (انظر التمرين 8)

ويتطلب هذا أن تكتب كثيرة الحدود الاستيفائية على الصيغة

$$S_m(x) = \frac{a_0 + a_m \cos mx}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{24.8}$$

إذا أردنا أن تتفق الصيغتان a_k و b_k مع صيغ كثيرة الحدود بطريقة المربعات الصغرى، أي حيثما

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, m \tag{25.8}$$

و

$$b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{26.8}$$

وفي حالة وجود مقادير كبيرة من البيانات المتساوية البعد، يكون الاستكمال عن طريق كثيرات الحدود المثلثية قادرًا على إعطاء نتائج دقيقة جدًّا.

إنها طريقة التقريب المناسبة في حقول تتضمن ترشيحات عددية، مثل نماذج الهوائيات الميكانيكا الكمية، البصريات، والكثير من مسائل المحاكاة.

وعلى كل حال حتى في أواسط الستينيات من القرن العشرين، لم تكن هذه الطريقة تحت التطبيق الشائع؛ بسبب العمليات الحسابية اللازمة لتحديد الثوابت في التقريب.

إن الاستكمال في بيانات مؤلفة من $2m$ من النقاط باستخدام تقنية الحساب المباشر تتطلب $(2m)^2$ من عمليات الضرب و $(2m)^2$ من عمليات الجمع. وإن تقريب عدة آلاف من نقاط البيانات أمر شائع في الحقول التي تتطلب الاستكمال المثلثي، ولذلك فإن الطرائق المباشرة لإيجاد قيم الثوابت تتطلب عمليات ضرب وجمع تصل إلى الملايين.

إن خطأ التدوير المرتبط بهذا العدد من الحسابات يفوق التقريب عمومًا.

في عام 1965 ظهرت ورقة بحثية للمؤلفين كولي وتيوكي J.W.Cooley و J.W.Tukey في مجلة Mathematics of Computation[CT] شرحت طريقة مختلفة لحساب الثوابت في كثيرات الحدود المثلثية للاستكمال .

وإن هذه الطريقة تتطلب $O(m \log_2 m)$ فقط من عمليات الضرب و $O(m \log_2 m)$ من عمليات الجمع ، على أن تختار m بطريقة مناسبة.

إن هذا ينقص عدد العمليات من الملايين إلى الآلاف في أي عملية تحتوي على الآلاف من نقاط البيانات. وقد اكتشفت هذه الطريقة في الحقيقة منذ عدة سنوات قبل ظهور بحث كولي وتيوكي، ولكنه مرّ دون التنبه إليه.

إن [Brigh,pp,8-9] يحتوي ملخصًا تاريخيًّا قصيرًا، إلا أنه مثير للاهتمام بهذه الطريقة.

تعرف طريقة كولي وتيوكي بواحد من الاسمين خوارزمية كولي – تيوكي (Cooley - Tukey algorithm) أو خوارزمية تحويل فورييه السريع Fast Fourier transform(FFT)algorithm وقد أدت إلى ثورة في استخدام كثيرات الحدود المثلثية في الاستكمال.

تتألف الطريقة بتنظيم المسألة؛ إذ يمكن تحليل عدد نقاط البيانات بسهولة على قوى العدد اثنين خصوصًا.

وبدلًا من إيجاد قيم الثابتين a_k و b_k مباشرة فإن طريقة تحويل فورييه السريع تحسب المعاملات المركبة c_k في

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} \tag{27.8}$$

حيث

$$c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, \ 2m-1 \tag{28.8}$$

وبمجرد تحديد الثوابت c_k فإنه يمكن استرجاع a_k و b_k. ولعمل ذلك؛ نستخدم معادلة أويلر $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ لكل $k = 0, 1, \ldots, \ m$ يكون

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}c_k(-1)^k = \frac{1}{m}c_k e^{-i\pi k} &= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} e^{-i\pi k} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik(-\pi+(\pi j/m))} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \left(\cos k\left(-\pi + \frac{\pi j}{m}\right) + i \sin k\left(-\pi + \frac{\pi j}{m}\right)\right) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j (\cos kx_j + i \sin kx_j)
\end{aligned}$$

لذلك

$$a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{m} c_k \tag{29.8}$$

ولسهولة التعبير؛ يُضاف b_0 و b_m إلى المجموعة، ولكنهما يساويان صفرًا، ولا يساهمان في المجموع الناتج.

إن خاصية تقليل العمليات في تحويل فورييه السريع ناتجة عن حساب المعاملات c_k في عناقيد، واستعمال علاقة رئيسة تنص على أنه لأي عدد صحيح n يكون

$$e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n$$

افترض $m = 2^p$ لعدد صحيح موجب p. لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$ يكون

$$c_k + c_{m+k} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} + \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{i(m+k)\pi j/m} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}(1 + e^{\pi ij})$$

ولكن

$$1 + e^{i\pi j} = \begin{cases} 2, & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \\ 0, & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \end{cases}$$

لذلك يوجد m فقط من الحدود غير الصفرية في عملية الجمع.

إذا وضعنا $2j$ بدلًا من j في مؤشر الجمع أمكننا كتابة المجموع على الصيغة

$$c_k + c_{m+k} = 2\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi(2j)/m}$$

أي أن

$$c_k + c_{m+k} = 2\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi j/(m/2)} \qquad (30.8)$$

وبطريقة مماثلة

$$c_k - c_{m+k} = 2e^{ik\pi/m}\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j+1} e^{ik\pi j/(m/2)} \qquad (31.8)$$

وبما أنه يمكن استرجاع كل من c_k و c_{m+k} من المعادلتين (30.8) و (31.8)، فإن هذه العلاقات تحدد المعاملات c_k جميعها.

يتضح أن المجاميع في المعادلتين (30.8) و (31.8) أيضًا لها الصيغة نفسها كالمجموع في المعادلة (28.8)، باستثناء وضع المؤشر $m/2$ بدلًا من m.

يوجد $2m$ من المعادلات $c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ الواجب حسابها.

إن استخدام المعادلة الرئيسة (28.8) يتطلب $2m$ من عمليات الضرب المركبة لكل معامل، وبما مجموعه $(2m)^2$ من العمليات.

تتطلب المعادلة (30.8) m من عمليات الضرب المركبة لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$، أما المعادلة (31.8) فتتطلب $m + 1$ من عمليات الضرب المركبة لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

وإن استخدام هذه المعادلات لحساب $c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ يخفّض عمليات الضرب المركبة من $(2m)^2 = 4m^2$ إلى $m \cdot m + m(m+1) = 2m^2 + m$.

بما أن المجاميع في المعادلة (30.8) و (31.8) لها الصيغة نفسها الرئيسة والعدد m هو على صيغة قوى 2، فإنه يمكن إعادة تطبيق عملية التخفيض في المعادلتين (30.8) و (31.8).

ويوضع بدلًا منهما مجموعان من $j = 0$ إلى $j = (m/2) - 1$. إن هذا يخفض الفقرة $2m^2$ في المجموع إلى

$$2\left[\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{2} + 1\right)\right] = m^2 + m$$

ومن ثم يكون المجموع الكلي $(m^2 + m) + m = m^2 + 2m$ من عمليات الضرب المركبة التي نحتاج إليها.

إن تطبيق الطريقة مرة أخرى يعطينا أربعة مجاميع في كل منها $m/4$ من الحدود، ويخفض الفقرة m^2 من هذا المجموع إلى

$$4\left[\left(\frac{m}{4}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4}+1\right)\right] = \frac{m^2}{2} + m$$

الذي يؤدي إلى مجموع جديد يساوي $(m^2/2) + 3m$ من عمليات الضرب المركبة، وبتكرار العملية r مرّة يخفض العدد الكلي من عمليات الضرب المركبة اللازمة إلى

$$\frac{m^2}{2^{r-2}} + mr$$

وتكتمل العملية عندما $r = p + 1$؛ لأن $m = 2^p$ و $2m = 2^{p+1}$.

وهكذا بعد $r = p + 1$ من تخفيضات هذا النوع فإن عدد عمليات الضرب المركبة ينخفض إلى

$$\frac{(2^p)^2}{2^{p-1}} + m(p+1) = 2m + pm + m = 3m + m\log_2 m = O(m\log_2 m)$$

وبسبب طريقة ترتيب الحسابات، فإن عدد عمليات الجمع المركبة يمكن رصدها ومقارنتها.

ولشرح أهمية هذا التخفيض؛ افترض أن لدينا $m = 2^{10} = 1024$

وعند الحساب المباشر يتطلب

$$(2m)^2 = (2048)^2 \approx 4{,}200{,}000$$

من عمليات الحساب. أما طريقة تحويل فوربيه السريع فتخفض عدد الحسابات إلى

$$3(1024) + 1024\log_2 1024 \approx 13{,}300$$

مثال 1 افترض تطبيق طريقة تحويل فوربيه السريع لنقاط البيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{7}$ التي عددها $8 = 2^3$ حيث $x_j = -\pi + j\pi/4$ لكل $j = 0, 1, \ldots, 7$.

في هذه الحالة $2m = 8$، ولذلك $m = 4 = 2^2$ و $p = 2$.

من المعادلة (24.8) نحصل على

$$S_4(x) = \frac{a_0 + a_4\cos 4x}{2} + \sum_{k=1}^{3}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

حيث

$a_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j\cos kx_j$ و $b_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j\sin kx_j$ لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4$ عرّف

$$F(x) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} c_k e^{ikx}$$

حيث

$c_k = \sum_{j=0}^{7} y_j e^{ik\pi j/4}$ لكل $k = 0, 1, \ldots, 7$

ثم نحصل من المعادلة (29.8) لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4$ على $\frac{1}{4}c_k e^{-ik\pi} = a_k + ib_k$.

بالحساب المباشر، تعطي الثوابت المركبة ما يلي:

$$c_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$c_1 = y_0 + ((i+1)/\sqrt{2})y_1 + iy_2 + ((i-1)/\sqrt{2})y_3 - y_4 - ((i+1)/\sqrt{2})y_5 - iy_6 - ((i-1)/\sqrt{2})y_7$$

$$c_2 = y_0 + iy_1 - y_2 - iy_3 + y_4 + iy_5 - y_6 - iy_7$$

$$c_3 = y_0 + ((i-1)/\sqrt{2})y_1 - iy_2 + ((i+1)/\sqrt{2})y_3 - y_4 - ((i-1)/\sqrt{2})y_5 + iy_6 - ((i+1)/\sqrt{2})y_7$$

$$c_4 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7;$$

$$c_5 = y_0 - ((i+1)/\sqrt{2})y_1 + iy_2 - ((i-1)/\sqrt{2})y_3 - y_4 + ((i+1)/\sqrt{2})y_5 - iy_6 + ((i-1)/\sqrt{2})y_7$$

$$c_6 = y_0 - iy_1 - y_2 + iy_3 + y_4 - iy_5 - y_6 + iy_7$$

$$c_7 = y_0 - ((i-1)/\sqrt{2})y_1 - iy_2 - ((i+1)/\sqrt{2})y_3 - y_4 + ((i-1)/\sqrt{2})y_5 + iy_6 + ((i+1)/\sqrt{2})y_7$$

بالتمهيد للحجم الصغير لمجموعة نقاط البيانات؛ فإن كثيرًا من معاملات y_j في هذه المعادلات تكون 1 أو 1- . وسيقل هذا التكرار في التطبيقات الكبرى، ولكي نعد عددًا من عمليات الحساب بدقة؛ فسندخل عمليات الضرب في 1 أو 1- في حسابنا على الرغم من أن ذلك غير ضروري في مثالنا هذا. ومع أخذ هذا الفهم في الحسبان، نجد أن 64 عملية ضرب/ قسمة، و56 عملية جمع/ طرح هي عدد العمليات اللازمة للحساب المباشر للثوابت $c_0, c_1, \ldots, c_7$.

لتطبيق تحويل فورييه السريع بأخذ $r = 1$، نعرّف أولًا:

$$d_0 = \tfrac{1}{2}(c_0 + c_4) = y_0 + y_2 + y_4 + y_6$$

$$d_1 = \tfrac{1}{2}(c_0 - c_4) = y_1 + y_3 + y_5 + y_7$$

$$d_2 = \tfrac{1}{2}(c_1 + c_5) = y_0 + iy_2 - y_4 - iy_6$$

$$d_3 = \tfrac{1}{2}(c_1 - c_5) = ((i+1)/\sqrt{2})(y_1 + iy_3 - y_5 - iy_7)$$

$$d_4 = \tfrac{1}{2}(c_2 + c_6) = y_0 - y_2 + y_4 - y_6;$$

$$d_5 = \tfrac{1}{2}(c_2 - c_6) = i(y_1 - y_3 + y_5 - y_7)$$

$$d_6 = \tfrac{1}{2}(c_3 + c_7) = y_0 - iy_2 - y_4 + iy_6$$

$$d_7 = \tfrac{1}{2}(c_3 - c_7) = ((i-1)/\sqrt{2})(y_1 - iy_3 - y_5 + iy_7)$$

ثم نعرّف القيمة $r = 2$.

$$e_0 = \tfrac{1}{2}(d_0 + d_4) = y_0 + y_4$$

$$e_1 = \tfrac{1}{2}(d_0 - d_4) = y_2 + y_6$$

$$e_2 = \tfrac{1}{2}(id_1 + d_5) = i(y_1 + y_5)$$

$$e_2 = \frac{1}{2}(id_1 + d_5) = i(y_1 + y_5)$$

$$e_3 = \frac{1}{2}(id_1 - d_5) = i(y_3 + y_7)$$

$$e_4 = \frac{1}{2}(d_2 + d_6) = y_0 - y_4$$

$$e_5 = \frac{1}{2}(d_2 - d_6) = i(y_2 - y_6)$$

$$e_6 = \frac{1}{2}(id_3 + d_7) = ((i - 1)/\sqrt{2})(y_1 - y_5)$$

$$e_7 = \frac{1}{2}(id_3 - d_7) = i((i - 1)/\sqrt{2})(y_3 - y_7)$$

وأخيرًا نعرّف القيمة $r = p + 1 = 3$

$$f_0 = \frac{1}{2}(e_0 + e_4) = y_0$$

$$f_1 = \frac{1}{2}(e_0 - e_4) = y_4$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(ie_1 + e_5) = iy_2$$

$$f_3 = \frac{1}{2}(ie_1 - e_5) = iy_6$$

$$f_4 = \frac{1}{2}(((i + 1)/\sqrt{2})e_2 + e_6) = ((i - 1)/\sqrt{2})y_1$$

$$f_5 = \frac{1}{2}(((i + 1)/\sqrt{2})e_2 - e_6) = ((i - 1)/\sqrt{2})y_5$$

$$f_6 = \frac{1}{2}(((i - 1)/\sqrt{2})e_3 + e_7) = (-(i + 1)/\sqrt{2})y_3$$

$$f_7 = \frac{1}{2}(((i - 1)/\sqrt{2})e_3 - e_7) = (-(i + 1)/\sqrt{2})y_7$$

إن $e_0, \ldots, e_7$, $d_0, \ldots, d_7$, $c_0, \ldots, c_7$ و $f_0, \ldots, f_7$ مستقلة عن نقاط البيانات الخاصة، وتعتمد على حقيقة أن $m = 4$ فقط. لكل m مجموعة ثوابت وحيدة

$$\{e_k\}_{k=0}^{2m-1}, \{d_k\}_{k=0}^{2m-1}, \{c_k\}_{k=0}^{2m-1}, \text{ و } \{f_k\}_{k=0}^{2m-1}$$

إن هذه الفقرة من التطبيق لا حاجة إليها في التطبيق الخاص. إن الحسابات المطلوبة هي الآتية فقط:

1. $f_0 = y_0;\quad f_1 = y_4;\quad f_2 = iy_2;\quad f_3 = iy_6;$
   $f_4 = ((i-1)/\sqrt{2})y_1;\quad f_5 = ((i-1)/\sqrt{2})y_5;\quad f_6 = (-(i+1)/\sqrt{2})y_3$
   $f_7 = (-(i+1)/\sqrt{2})y_7.$

2. $e_0 = f_0 + f_1;\quad e_1 = -i(f_2 + f_3);\quad e_2 = ((-i+1)/\sqrt{2})(f_4 + f_5)$
   $e_3 = ((-i-1)/\sqrt{2})(f_6 + f_7);\quad e_4 = f_0 - f_1;\quad e_5 = f_2 - f_3;$
   $e_6 = f_4 - f_5;\quad e_7 = f_6 - f_7$

3. $d_0 = e_0 + e_1;\quad d_1 = -i(e_2 + e_3);\quad d_2 = e_4 + e_5;\quad d_3 = -i(e_6 + e_7)$
   $d_4 = e_0 - e_1;\quad d_5 = e_2 - e_3;\quad d_6 = e_4 - e_5;\quad d_7 = e_6 - e_7$

4. $c_0 = d_0 + d_1;\quad c_1 = d_2 + d_3;\quad c_2 = d_4 + d_5;\quad c_3 = d_6 + d_7$
   $c_4 = d_0 - d_1;\quad c_5 = d_2 - d_3;\quad c_6 = d_4 - d_5;\quad c_7 = d_6 - d_7$

إن حساب الثوابت $c_0, c_1, \ldots, c_7$ بهذه الطريقة يتطلب عدد العمليات التي تظهر في جدول (13.8). يتضح مرة ثانية أن الضرب في 1 أو 1- قد أدخل في العد على الرغم من أن هذا لا يتطلب جهدًا في الحسابات.

جدول 13.8

الخطوة	ضرب/قسمة	جمع/طرح
(1)	8	0
(2)	8	8
(3)	8	8
(4)	0	8
مجموع	24	24

إن عدم وجود عمليات الضرب/ القسمة في الخطوة **4** يعكس حقيقة أنه لكل m تُحسَب المعاملات $\{c_k\}_{k=0}^{2m-1}$ من $\{d_k\}_{k=0}^{2m-1}$ بالطريقة نفسها

$c_k = d_{2k} + d_{2k+1}$ و $c_{k+m} = d_{2k} - d_{2k+1}$ لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$

ولذلك لا توجد عمليات ضرب مركبة.

والخلاصة أن الحساب المباشر لمعاملات $c_0, c_1, \ldots, c_7$ يتطلب **64** عملية ضرب/ قسمة و**56** عملية جمع/طرح. وإن طريقة تحويل فورييه السريع يخفض الحسابات إلى **24** عملية ضرب/ قسمة و**24** عملية جمع/ طرح.

تنفذ الخوارزمية **(3.8)** تحويل فورييه السريع عندما $m = 2^p$ حيث p عدد صحيح موجب. يمكن إجراء تعديلات على هذه الطريقة عندما يأخذ m صيغًا أخرى.

ALGORITHM

الخوارزمية

3.8

تحويل فورييه السريع Fast Fourier Transform

لحساب المعاملات في المجموع

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k(\cos kx + i\sin kx)$$ حيث $i = \sqrt{-1}$ الخاص بالبيانات

$\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$ حيث $m = 2^p$ و $x_j = -\pi + j\pi/m$ لكل $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$.

المدخلات: $m, p; y_0, y_1, \ldots, y_{2m-1}$

المخرجات: الأعداد المركبة $c_0, \ldots, c_{2m-1}$

الأعداد الحقيقية $a_0, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{m-1}$

الخطوة	المضمون
1	ضع $M = m$ $q = p$ $\zeta = e^{\pi i/m}$
2	لكل $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$ ضع $c_j = y_j$.
3	لكل $j = 1, 2, \ldots, M$ ضع $\xi_j = \zeta^j$ $\xi_{j+M} = -\xi_j$
4	ضع $K = 0$ $\xi_0 = 1$
5	لكل $L = 1, 2, \ldots, p+1$ نفّذ الخطوات 6 – 12.
6	ما دام $K < 2m-1$ فنفّذ الخطوات 7 – 11.

7	لكل $j = 1, 2, \dots, M$ نفذ الخطوات 8 – 10.
8	ضع $K = k_p \cdot 2^p + k_{p-1} \cdot 2^{p-1} + \dots + k_1 \cdot 2 + k_0$. (حلل k.) ضع $K_1 = K/2^q = k_p \cdot 2^{p-q} + \dots + k_{q+1} \cdot 2 + k_q$ $K_2 = k_q \cdot 2^p + k_{q+1} \cdot 2^{p-1} + \dots + k_p \cdot 2^q$
9	ضع $\eta = c_{K+M}\xi_{K_2}$ $c_{K+M} = c_K - \eta$ $c_K = c_K + \eta$
10	ضع $K = K + 1$.
11	ضع $K = K + M$.
12	ضع $K = 0$ $M = M/2$ $q = q - 1$
13	ما دام $K < 2m - 1$ فنفّذ الخطوات 14 – 16.
14	ضع $K = k_p \cdot 2^p + k_{p-1} \cdot 2^{p-1} + \dots + k_1 \cdot 2 + k_0$ (تحليل k) ضع $j = k_0 \cdot 2^p + k_1 \cdot 2^{p-1} + \dots + k_{p-1} \cdot 2 + k_p$
15	إذا كان $K > j$ بدّل c_j بـ c_k.
16	ضع $K = K + 1$.
17	ضع $a_0 = c_0/m$ $a_m = \mathrm{Re}(e^{-i\pi m}c_m/m)$
18	لكل $j = 1, \dots, m-1$ ضع $a_j = \mathrm{Re}(e^{-i\pi j}c_j/m)$ $b_j = \mathrm{Im}(e^{-i\pi j}c_j/m)$
19	المخرجات $(c_0, \dots, c_{2m-1}; a_0, \dots, a_m; b_1, \dots, b_{m-1})$. توقف.

■

مثال 2 وجدنا في مثال (2) من الفصل (5.8) كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الثانية بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة إلى $f(x) = 2x^2 - 9$ على $[-\pi, \pi]$.

والآن سنجد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الثانية لاستكمال البيانات $\{(x_j, f(x_j))\}_{j=0}^{3}$ حيث

$$a_k = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\cos(kx_j) \quad \text{لكل } k = 0, 1, 2 \quad \text{و} \quad b_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\sin(x_j)$$

إن هذا يعطي

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -3.19559339,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi)\cos(-\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f(0)\cos 0 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= -9.86960441$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi)\cos(-2\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\pi) + f(0)\cos 0 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi)\right)$$
$$= 4.93480220$$

و

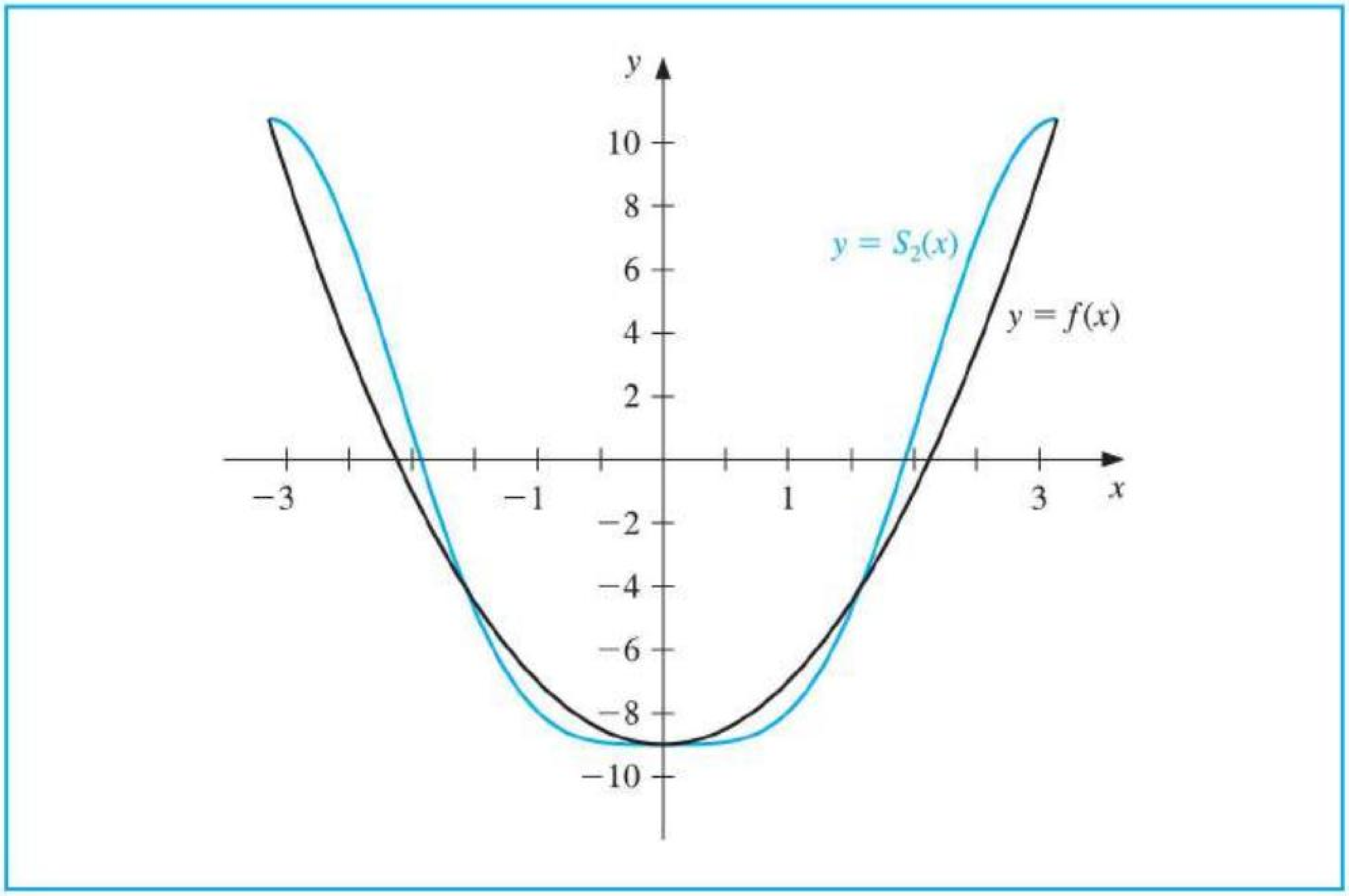
$$b_1 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi)\sin(-\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f(0)\sin 0 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

لذلك

$$S_2(x) = \tfrac{1}{2}(-3.19559339 + 4.93480220\cos 2x) - 9.86960441\cos x.$$

يظهر شكل (16.8) الدالة $f(x)$ وكثيرة الحدود المثلثية للاستكمال $S_2(x)$. ■

شكل 16.8



يشرح المثال الآتي إيجاد كثيرة الحدود لاستكمال دالة معرفة على أي فترة مغلقة.

مثال 3 ليكن $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - \tan x(x-2)$. إن إيجاد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة لاستكمال البيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{7}$ حيث $x_j = j/4$ و $y_j = f(x_j)$ يتطلب تحويل الفترة [0, 2] إلى $[-\pi, \pi]$.

وإن هذا التحويل يعطى بالمعادلة

$$z_j = \pi(x_j - 1)$$

ولذلك فإن مدخلات البيانات في الخوارزمية (3.8) هي

$$\left\{z_j, f\left(1 + \frac{z_j}{\pi}\right)\right\}_{j=0}^{7}$$

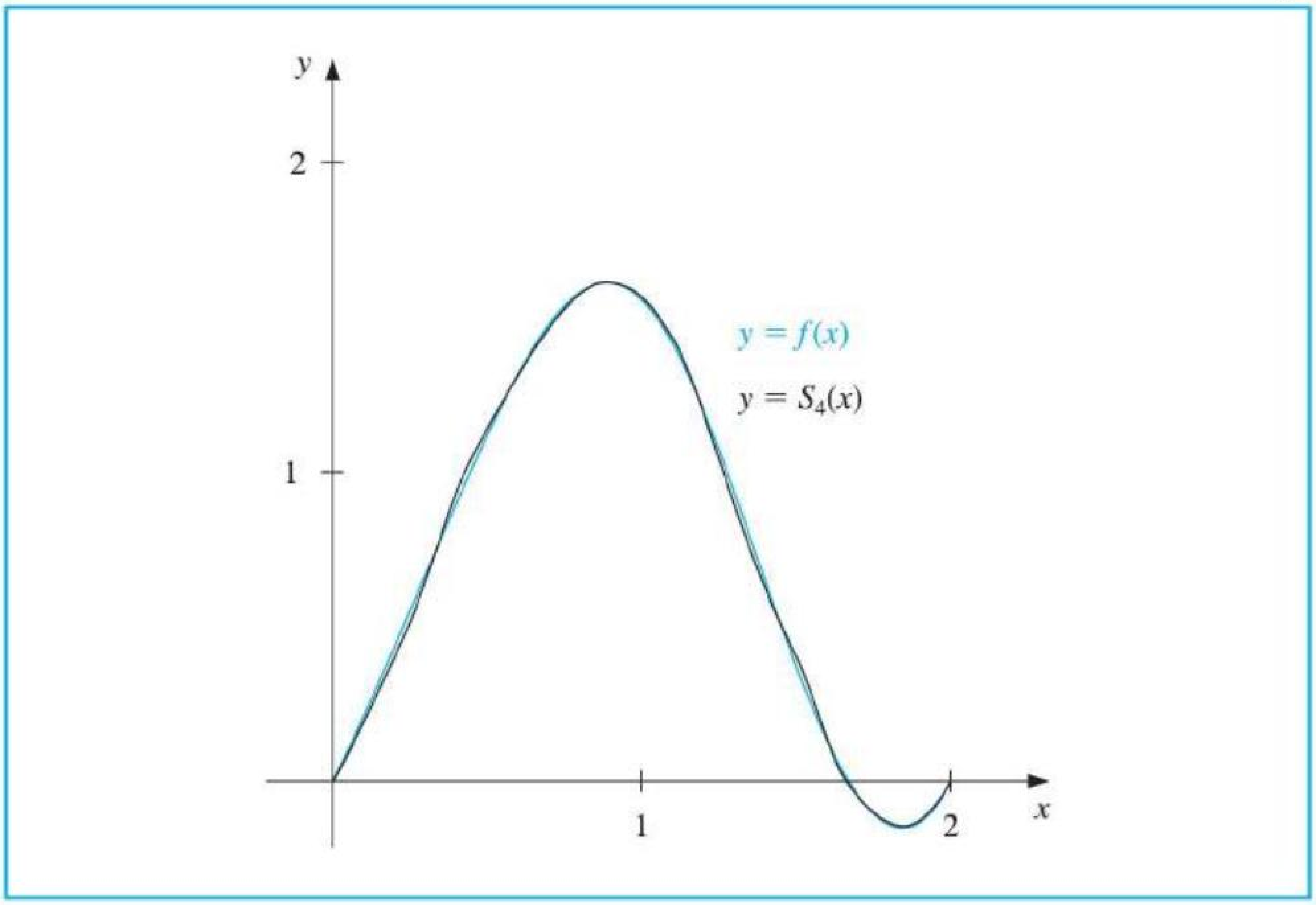
إن كثيرة حدود الاستكمال بدلالة z هي

$$S_4(z) = 0.761979 + 0.771841\cos z + 0.0173037\cos 2z + 0.00686304\cos 3z - 0.000578545\cos 4z - 0.386374\sin z + 0.0468750\sin 2z - 0.0113738\sin 3z$$

نجد كثيرة الحدود المثلثية $S_4(x)$ على $[0, 2]$ بتعويض $z = \pi(x-1)$ في $S_4(z)$. ■

يظهر شكل (17.8) الرسم البياني لكل من $y = f(x)$ و $y = S_4(x)$. تظهر قيم $f(x)$ و $S_4(x)$ في جدول (14.8).

شكل 17.8



جدول 14.8

x	$f(x)$	$S_4(x)$	$\|f(x) - S_4(x)\|$
0.125	0.26440	0.25001	1.44×10^{-2}
0.375	0.84081	0.84647	5.66×10^{-3}
0.625	1.36150	1.35824	3.27×10^{-3}
0.875	1.61282	1.61515	2.33×10^{-3}
1.125	1.36672	1.36471	2.02×10^{-3}
1.375	0.71697	0.71931	2.33×10^{-3}
1.625	0.07909	0.07496	4.14×10^{-3}
1.875	−0.14576	−0.13301	1.27×10^{-2}

لمزيد من التفاصيل عن التحقق من صدق طريقة تحويل فورييه السريع يمكن الرجوع إلى [Ham] الذي يعرض الطريقة من منحى رياضي، أو الرجوع إلى [Brac] حيث تبنى الطريقة على جوانب أكثر ما تكون مألوفة لدى المهندسين.

إن [AHU, pp. 252–269] مرجع جيد للبحث في جوانب حساب هذه الطريقة.

إن التعديل على الطريقة في الحالة التي لا يكون فيها m على صيغة قوى (2) موجود في [Win].

إن عرض الطرائق والمادة المتعلقة بها من وجهة نظر الجبر المجرد التطبيقي موجود في [Lau, pp. 438–465].

EXERCISE SET مجموعة التمارين 6.8

1. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_2(x)$ من الرتبة 2 على الفترة $[-\pi,\pi]$ لاستكمال الدّوال الآتية، وارسم $f(x) - S_2(x)$:

أ. $f(x) = \pi(x-\pi)$
ب. $f(x) = x(\pi - x)$
ج. $f(x) = |x|$
د. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

2. أوجد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة لاستكمال الدالة $f(x) = x(\pi - x)$ على الفترة $[-\pi,\pi]$ باستخدام:

أ. الحساب المباشر

ب. خوارزمية تحويل فورييه السريع

3. استخدم خوارزمية تحويل فورييه السريع لحساب كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة لاستكمال الدّوال الآتية على $[-\pi,\pi]$:

أ. $f(x) = \pi(x-\pi)$
ب. $f(x) = |x|$
ج. $f(x) = \cos \pi x - 2\sin \pi x$
د. $f(x) = x\cos x^2 + e^x \cos e^x$

4. أ. أوجد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة $S_4(x)$ لاستكمال $f(x) = x^2 \sin x$ على الفترة $[0, 1]$.

ب. احسب $\int_0^1 S_4(x)\,dx$.

ج. قارن التكامل في (b) بـِ $\int_0^1 x^2 \sin x\,dx$.

5. استخدم التقريبات التي حصلت عليها في التمرين (3) لتقريب التكاملات الآتية، وقارن نتائجك بالقيم الفعلية:

أ. $\int_{-\pi}^{\pi} \pi(x-\pi)\,dx$
ب. $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx$
ج. $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \pi x - 2\sin \pi x)\,dx$
د. $\int_{-\pi}^{\pi} (x\cos x^2 + e^x \cos e^x)\,dx$

6. استخدم خوارزمية تحويل فورييه السريع لإيجاد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة السادسة عشرة للدالة $f(x) = x^2 \cos x$ على $[-\pi,\pi]$.

7. استخدم خوارزمية تحويل فورييه السريع لإيجاد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة والستين للدالة $f(x) = x^2 \cos x$ على $[-\pi,\pi]$.

8. استخدم متطابقة مثلثية لبرهنة أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos m x_j)^2 = 2m$$

9. برهن أن $c_0, \ldots, c_{2m-1}$ في الخوارزمية (3.8) معطاة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \cdots & \zeta^{2m-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \cdots & \zeta^{4m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta^{2m-1} & \zeta^{4m-2} & \cdots & \zeta^{(2m-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2m-1} \end{bmatrix}$$

حيث $\zeta = e^{\pi i/m}$.

10. في المناقشة السابقة للخوارزمية (3.8) شُرح مثال فيه $m = 4$.

عرّف المتجهات c , d , e , f كما يلي :

$$c = (c_0, c_1, \ldots , c_7)'$$

$$d = (d_0, d_1, \ldots , d_7)'$$

$$e = (e_0, e_1, \ldots , e_7)'$$

$$f = (f_0, f_1, \ldots , f_7)'$$

$$y = (y_0, y_1, \ldots , y_7)'$$

أوجد مصفوفات A, B, C, D بحيث $c = Ad, d = Be, e = Cf$ و $f = Dy$.

7.8 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Methods & Software

لقد شرحنا في هذا الباب تقريب البيانات والدوال باستخدام دوال ابتدائية (elementary). وإن هذه الدّوال الابتدائية التي استخدمت كانت كثيرات حدود، وكانت الدّوال النسبية كثيرات حدود مثلثية. وافترضنا نوعين من التقريبات: المنفصل والمتصل. وتبرز التقريبات المنفصلة عند تقريب مجموعة منتهية من البيانات بدالة ابتدائية، وتستخدم التقريبات المتصلة عندما تكون الدالة المطلوب تقريبها معلومة.

وينصح باستخدام طرائق المربعات الصغرى المنفصلة عندما تكون الدالة محدّدة بمجموعة من البيانات التي من المكن ألا تمثّلها تمامًا، فإن مطابقة البيانات بطريقة المربعات الصغرى قد تأخذ صيغة خطية أو تقريبًا بكثيرة حدود أخرى أو حتى صيغة أسيّة. وتحسب هذه التقريبات بحلّ مجموعات من المعادلات القانونية كما مرَّ في الفصل (1.8).

وإذا كانت البيانات دورية فإن مطابقة المربعات الصغرى المثلثية قد تكون مناسبة.

بسبب التعامدية القانونية لقاعدة الدّوال المثلثية، فإن التقريب المثلثي بطريقة المربعات الصغرى لا يتطلب حلّ نظام خطي. وفي المقادير الكبيرة من البيانات الدورية، يكون الاستكمال بكثيرات الحدود المثلثية محبّبًا أيضًا.

إن إحدى الطرائق الفاعلة في حساب كثيرات الحدود المثلثية للاستكمال هي تحويل فورييه السريع. وعندما يكون الدالة المطلوب تقريبها قابلة للتقييم عند أي قيمة فإن التقريبات تعنى أن يكون التكامل أصغر ما يمكن بدلًا من المجموع.

لقد نُوقشت التقريبات بكثيرات الحدود بطريقة المربعات الصغرى المتصلة في الفصل (2.8). وإن الحساب الفعال لكثيرات الحدود بطريقة المربعات الصغرى يؤدي إلى مجموعات كثيرات الحدود المتعامدة قانونيًا، مثل كثيرات حدود ليجندر وتشبيشف.

تمت دراسة التقريب بالدوال النسبية في الفصل (4.8)، حيث عرض تقريب بادي بوصفه تعميمًا لكثيرة حدود ماكلورين وامتداده لتقريب تشبيشف بالدالة النسبية. وتسمح كلتا الطريقتين بعملية

تقريب أكثر تجانسًا من كثيرات الحدود.

إن التقريب بطريقة المربعات الصغرى عن طريق الدّوال المثلثية قد تمت دراسته في الفصل (5.8) وخصوصًا ارتباطه بسلاسل فورييه.

تقدم مكتبة IMSL عددًا من البرمجيات للتقريب. ويعطي البرنامج RLINE خطًّا توفيقيًا لمجموعة من النقاط بطريقة المربعات الصغرى، ومقاييس إحصائية كالوسيطيات الحسابية والتباينات.

إن البرنامج FNLSQ يحسب التقريب بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة وفق اختيار المستخدم لدوال الأساس، وأما BSLSQ فيحسب تقريب الشريحة بطريقة المربعات الصغرى.

ويحسب البرنامج RATCH تقريب تشبيشف النسبي الموزون للدوال المتصل على $[a, b]$، ويحسب FFTCB تحويل فورييه السريع لمجموعة من البيانات بطريقة مماثلة للخوارزمية (3.8).

تحوي مكتبة NAG كثيرًا من البرامج لتقريب الدّوال. والتقريب بكثيرات الحدود بطريقة المربعات الصغرى موجود في البرنامج E02ADF. إن هذا البرنامج متعدد الاتجاهات؛ إذ يحسب بطريقة المربعات الصغرى كثيراتِ الحدود بدرجات متعددة، ويقدِّم أخطاءها بالمربعات الصغرى.

إنه يستخدم كثيرات حدود تشبيشف لتصغير خطأ التدوير لأدنى حد وتحسين الدقة.

يمكن استخدام البرنامج E02AEF لتقييم التقريب الناتج من E02ADF. ويعطي NAG البرنامج E02BAF أيضًا لحساب توفيق الشريحة التكعيبي بطريقة المربعات الصغرى، كما يقدِّم E02GAF حسابًا أفضل لتوفيق خطي L_1، ويعطي E02GCF حسابًا أحسن لتوفيق L_∞. وإن البرنامج E02RAF يحسب تقريب بادي. وتحتوي مكتبة NAG برمجيات كثيرة أيضًا لتحويلات فورييه السريعة، إحداها C06ECF. إن مكتبة نتلب (netlib) تحتوي البرامج polfit.f في حقيبة slatec لحساب تقريب كثيرة الحدود لمجموعة من النقاط المنفصلة بطريقة المربعات الصغرى، ويمكن استخدام البرنامج pvalue.f لإيجاد قيم كثيرة الحدود من polfit.f وأي من مشتقاته عند أي نقطة. للمزيد من المعلومات حول مبرهنة العامة لمبرهنة التقريب ينصح بالرجوع إلى Cheney [Ch] أو Davis [Da]، Powell[Po]. وهناك مرجع جيد لطرائق المربعات الصغرى، ألا وهو Lawson & Hanson [LH]، أما للمعلومات عن تحويلات فورييه فيمكن الرجوع إلى Briggs & Hanson [BH] و Van Loan [Van].

الباب 9

تقريب القيم المميزة

Approximating Eigenvalues

مقدمة

تتضح الاهتزازات الطولية لقضيب مرن ذي صلابة $p(x)$ وكثافة $\rho(x)$ من خلال المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right]$$

حيث تمثِّل $v(x,t)$ معدل الإزاحة الطولية لجزء من القضيب، يبدأ من موقع توازنه x عند الزمن t، ويمكن كتابة الاهتزازات على صورة مجموع اهتزازات متناسقة

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x) \cos\sqrt{\lambda_k}(t - t_0)$$

حيث إن

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_k}{dx}(x)\right] + \lambda_k \rho(x) u_k(x) = 0$$

فإذا كان طول القضيب l ومثبتًا عند طرفيه، فإن هذه المعادلة التفاضلية متحقِّقة عند $0 < x < l$ و $v(0) = v(l) = 0$. ونظام المعادلات التفاضلية هذه يسمى "نظام ستورم – ليوفيل Sturm–Liouville system" والأعداد λ_k هي القيم المميزة مع الدوال المميزة $u_k(x)$ المقابلة لها.

افترض أن القضيب بطول 1m مع صلابة منتظمة $p(x) = p$ وكثافة منتظمة $\rho(x) = \rho$. ولتقريب u و λ، ضع $h = 0.2$. ومن ثم فإن $x_j = 0.2j$ عند $0 \le j \le 5$، وبالإمكان استخدام صيغة الفرق المركزي (5.4) من الفصل (1.4) لتقريب المشتقات الأولى. وهذا يعطي النظام الخطي

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = -0.04\frac{\rho}{p}\lambda \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = -0.04\frac{\rho}{p}\lambda \mathbf{w}$$

في هذا النظام $w_j \approx u(x_j)$ عند $1 \le j \le 4$ و $w_0 = w_5 = 0$. إن القيم المميزة الأربع لـ A تقرب القيم المميزة للنظام *Sturm–Liouville system*، وإنه تقريب للقيم المميزة التي سوف نتناولها في هذا الباب. إن تطبيق Sturm–Liouville يناقَش في التمرين (13) من الفصل (4.9).

1.9 الجبر الخطي والقيم المميزة
Linear Algebra and Eigenvalues

تناولنا القيم المميزة والمتجهات المميزة في الفصل السابع من خلال ربطها بتقارب طرائق التكرار لتقريب الحل لنظام خطي. ولتحديد القيم المميزة لمصفوفة A بحجم $n \times n$؛ نبني كثيرة حدودِ الخاصية

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

ومن ثم تحديد أصفاره. إن إيجاد محددة مصفوفة بحجم $n \times n$ مكلف حسابيًا، كما أن إيجاد تقريبات جيدة لجذور $p(\lambda)$ صعب أيضًا. وسنكتشف في هذا الفصل وسائل أخرى لتقريب القيم المميزة للمصفوفة.

وجدنا في الباب السابع أن أسلوب التكرار لحلّ نظام خطي سيتقارب إذا كانت القيم المميزة جميعها المرتبطة بالمسألة تقل عن الواحد. والقيم الحقيقية للقيم المميزة في هذه الحالة ليست ذات ضرورة رئيسة، وإنما هي منطقة المستوى المركب فقط الذي تقع ضمنه.

وحتى عندما نحتاج إلى معرفة القيم المميزة، فإن كون العديد من أساليب تقريبها ذات صفة إعادة يؤدي إلى أن تحديد المناطق التي تقع ضمنها هو الخطوة الأولى في اتجاه تحديد التقريب؛ لأنه يزودنا بالتقريب الابتدائي الذي تحتاج إليه طرائق التكرار.

وقبل تناول نتائج أخرى تتعلق بالقيم المميزة والمتجهات المميزة، فإننا نحتاج إلى بعض التعريفات والنتائج من الجبر الخطي. وكل النتائج العامة التي نحتاج إليها في بقية هذا الفصل معروضة هنا؛ لتسهيل الرجوع إليها بوصفها مصدرًا. ويمكن إيجاد براهين النتائج غير المعطاة في معظم الكتب الرئيسة في الجبر الخطي (انظر على سبيل المثال [ND]). يوازي التعريف الأول تعريف الاستقلالية الخطية للدوال الموضحة في الفصل (2.8).

تعريف 1.9 لتكن $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\}$ مجموعة متجهات. نقول: إن هذه المجموعة مستقلة خطيًا linearly independent إذا كان

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{v}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{v}^{(2)} + \alpha_3 \mathbf{v}^{(3)} + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}^{(k)}$$

يقتضي أن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0$. وبخلاف ذلك فإن مجموعة المتجهات تكون مرتبطة خطيًا linearly dependent.

لاحظ أن أي مجموعة متجهات تحتوي المتجه الصفري تكون مرتبطة خطيًا. ■

مبرهنة 2.9 إذا كانت $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مجموعة من المتجهات المستقلة خطيًا في فضاء المتجهات $\mathbb{R}^n$، وكان $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ فيمكن كتابه $\mathbf{x}$ بطريقة وحيدة كترتيب خطي.

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{v}^{(1)} + \beta_2 \mathbf{v}^{(2)} + \beta_3 \mathbf{v}^{(3)} + \cdots + \beta_n \mathbf{v}^{(n)}$$

حيث $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}^n$. ■

البرهان افترض أن A مصفوفة أعمدتها المتجهات $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$. لذا فإن المجموعة $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ تكون مستقلة خطيًا إذا وفقط إذا كانت معادلة المصفوفة $A\boldsymbol{\alpha} = 0$ لها حلٌّ وحيد هو $\boldsymbol{\alpha} = 0$. ولكن من خلال مبرهنة (16.6) فإن هذا يكافئ كون معادلة المصفوفة $A\mathbf{b} = \mathbf{x}$

لها حلٌّ وحيد لكل متجه $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. ومن ثم يكون مكافئًا للتعبير بأنه لكل $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ فإن

$$\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{v}^{(1)} + \beta_2\mathbf{v}^{(2)} + \cdots + \beta_n\mathbf{v}^{(n)}$$

عند مجموعة وحيدة من الثوابت $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$. ■ ■ ■

إن أي مجموعة n من المتجهات المستقلة خطيًّا ضمن $\mathbb{R}^n$ تسمى أساسًا basis لـ $\mathbb{R}^n$.

مثال 1 ليكن $\mathsf{v}^{(1)} = (1, 0, 0)^t, \mathsf{v}^{(2)} = (-1, 1, 1)^t, \mathsf{v}^{(3)} = (0, 4, 2)^t$. فإذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ عبارة عن أعداد بحيث

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v}^{(1)} + \alpha_2\mathbf{v}^{(2)} + \alpha_3\mathbf{v}^{(3)}$$

فإن

$$(0, 0, 0)^t = \alpha_1(1, 0, 0)^t + \alpha_2(-1, 1, 1)^t + \alpha_3(0, 4, 2)^t = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3)^t$$

ومن ثم فإن

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \; \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

ولأن الحل الوحيد لهذا النظام هو $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$، فإن المجموعة $\{\mathsf{v}^{(1)}, \mathsf{v}^{(2)}, \mathsf{v}^{(3)}\}$ تكون مستقلة خطيًّا ضمن $\mathbb{R}^3$، وهي أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

إن أي متجه $\mathsf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ ضمن $\mathbb{R}^3$ يمكن كتابته بالصيغة

$$\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{v}^{(1)} + \beta_2\mathbf{v}^{(2)} + \beta_3\mathbf{v}^{(3}$$

باختيار

$$\beta_1 = x_1 - x_2 + 2x_3, \quad \beta_2 = 2x_3 - x_2, \quad \beta_3 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_3)$$ ■

ستُستخدم النتيجة الآتية في الفصل الآتي لتطوير الطريقة الفائقة Power method لتقريب القيم المميزة، وقد افترض برهان هذه النتيجة في التمرين (12).

مبرهنة 3.9 إذا كانت A مصفوفة، و $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ قيمًا مميزة مختلفة لـ A تقابل متجهات مميزة $\mathsf{x}^{(1)}, \mathsf{x}^{(2)}, \ldots, \mathsf{x}^{(k)}$ فإن $\{\mathsf{x}^{(1)}, \mathsf{x}^{(2)}, \ldots, \mathsf{x}^{(k)}\}$ مستقلة خطيًّا. ■

مثال 2 انظر المثال (1) من الفصل (2.7) تجد أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

لها كثيرة حدود الخاصية

$$p(\lambda) = p(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$

ولذا فإن القيم المميزة لـ A هي $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 2$. ولقد وُجدت ثلاثة متجهات مميزة مستقلة خطيًّا لـ A. وللقيمة المميزة $\lambda_1 = 3$ متجه مميز $\mathsf{x}_1 = (0, 1, 1)^t$، وللقيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ اثنان من المتجهات المميزة والمستقلة خطيًّا هما $\mathsf{x}_2 = (0, 2, 1)^t$ و $\mathsf{x}_3 = (-2, 0, 1)^t$.

افترض أن المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ولهذه المصفوفة أيضًا كثيرة حدود الخاصية

$$p(\lambda) = p(B - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$

لذا فإن القيم المميزة لـ B هي نفسها لـ A، بمعنى أن $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 2$. وليس صعبًا أن نرى أن $\lambda_1 = 3$ لها متجه مميز $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 1)^t$، ولكن هذا المتجه المميز ليس بذي أهمية خاصة. إنها حالة القيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ لـ B التي تختلف عما لـ A.

لتحديد المتجه المميز لـ B عند القيمة المميزة $\lambda_2 = 2$، نحتاج إلى حلِّ النظام $(B - 2 \cdot I)\mathbf{x} = 0$ لذلك

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وفي هذه الحالة فإن المتجه المميز بحاجة إلى أن يحقِّق المعادلتين $x_2 = 0$ و $x_3 = 0$، وإذا قمنا بتطبيع المتجه بجعل $x_1 = 1$ سيكون لدينا الحل الوحيد $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)^t$. لذلك فليس هناك متجهان مميزان مستقلان خطيًّا لـ $\lambda_2 = 2$ و B مثلما هو الحال لـ $\lambda_2 = 2$ و A، وهناك متجهان مميزان فقط مستقلان خطيًّا للمصفوفة B بحجم 3×3. وسنرى أنه عندما لا يكون عدد المتجهات المميزة المستقلة خطيًّا مماثلاً لحجم المصفوفة، ستكون هناك صعوبات في طرائق التقريب لإيجاد القيم المميزة. ■

لقد افتُرضت مجاميع الدوال المتعامدة والمنطبعة في الفصل (2.8). وتعرّف المتجهات بهذه الخصائص بالأسلوب نفسه.

تعريف 4.9 تسمى مجموعة المتجهات $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ متعامدة orthogonal إذا كانت $(\mathbf{v}^{(i)})^t \mathbf{v}^{(j)} = 0$ لكل $i \neq j$. وإذا كان $(\mathbf{v}^{(i)})^t \mathbf{v}^{(i)} = 1$ أيضًا لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ فإن المجموعة حيادية التعامد orthonormal. ■

ولأن $\mathbf{x}^t\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2$، فإن مجموعة المتجهات المتعامدة $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ تكون طبيعية التعامد إذا وفقط إذا كان $\|\mathbf{v}^{(i)}\|_2 = 1$ لكل من $i = 1, 2, \ldots, n$.

مثال 3 المتجهات $\mathbf{v}^{(1)} = (0, 4, 2)^t, \mathbf{v}^{(2)} = (-1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5})^t, \mathbf{v}^{(3)} = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3})^t$ تشكل مجموعة متعامدة. ومعايير l_2 لهذه المتجهات هي

$$\|\mathbf{v}^{(1)}\|_2 = 2\sqrt{5}, \quad \|\mathbf{v}^{(2)}\|_2 = \frac{\sqrt{30}}{5}, \quad \|\mathbf{v}^{(3)}\|_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

والنتيجة أن المتجهات

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|_2} = \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^t$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \frac{\mathbf{v}^{(2)}}{\|\mathbf{v}^{(2)}\|_2} = \left(-\frac{\sqrt{30}}{6}, -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}\right)^t$$

$$\mathbf{u}^{(3)} = \frac{\mathbf{v}^{(3)}}{\|\mathbf{v}^{(3)}\|_2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^t$$

تشكل مجموعة متعامدة؛ لأنها ترث التعامدية من $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}$، وبالإضافة إلى ذلك فإن

$$\|\mathbf{u}^{(1)}\|_2 = \|\mathbf{u}^{(2)}\|_2 = \|\mathbf{u}^{(3)}\|_2 = 1$$ ■

وقد أخذ برهان النتيجة الآتية في الحسبان في التمرين (9).

مبرهنة 5.9 مجموعة المتجهات المتعامدة اللاصفرية تكون مستقلة خطيًّا.

والمصطلحات في التعريف الآتي ناتجة عن حقيقة كون أعمدة المصفوفة المتعامدة ستشكل مجموعة متجهات متعامدة. (انظر التمرين(10)

تعريف 6.9 يقال للمصفوفة Q: إنها مصفوفة متعامدة orthogonal إذا كان $Q^{-1} = Q^t$. ■

من الأفضل تسمية هذه المصفوفات بالطبيعية التعامد Orthonormal، لأن الأعمدة تشكل مجاميع طبيعية متعامدة من المتجهات

مصفوفات التبديلات التي نُوقِشت في الفصل (5.6) لها هذه الخاصية، لذلك فهي متعامدة. ■

مثال 4 ظهرت المصفوفة المتعامدة Q المتشكلة عن مجموعة متجهات متعامدة في مثال (2)، وهي

$$Q = [\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

انظر

$$QQ^t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{30}}{6} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون $Q^tQ = I$ صحيحًا أيضًا، لذلك $Q^t = Q^{-1}$. ■

تعريف 7.9 المصفوفتان A و B متماثلتان similar إذا كانت هناك مصفوفة غير مفردة S مع $A = S^{-1}BS$. ■

للمصفوفات المتماثلة صفة مهمة وهي أن لها القيم المميزة نفسها.

مبرهنة 8.9 افترض أن A و B مصفوفتان متماثلتان مع $A = S^{-1}BS$، وأن λ قيمة مميزة لِـ A مع متجه مميز x. لذلك فإن λ قيمة مميزة لِـ B مع متجه مميز Sx. ■

البرهان افترض أن $\mathrm{x} \neq 0$ بحيث

$$S^{-1}BS\mathrm{x} = A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$$

وبالضرب من اليسار في المصفوفة S نحصل على

$$BS\mathrm{x} = \lambda S\mathrm{x}$$

ولأن $\mathrm{x} \neq 0$ و S غير مفردة، فإن $S\mathrm{x} \neq 0$. لذلك فإن Sx هي متجه مميز لِـ B مقترنة بقيمتها المميزة λ. ■ ■ ■

إن أمر **Maple**، IsSimilar(A,B)، في مكتبة الجبر الخطي LinearAlgebra تعطي "صحيحة *true* " إذا كانت A و B متماثلتين، وتعطي " خطأ *false* " فيما عدا ذلك.

إن تحديد القيم المميزة يكون سهلاً لمصفوفة مثلثية A؛ لأنه في هذه الحالة تكون λ حلًّا للمعادلة

$$0 = \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda)$$

إذا وفقط إذا كانت $\lambda = a_{ii}$ عند قيمة ما i. وتوضح النتيجة الآتية علاقة تسمى "تحويلاً تماثليًّا similarity transformation " بين مصفوفات معينة ومصفوفات مثلثية.

مبرهنة 9.9 schur

لتكن A مصفوفة عندئذ، توجد مصفوفة قابلة للعكس U تحقق الخاصية $T = U^{-1}AU$ حيث مصفوفة مثلثية علوية عناصر قطرها قيم مميزة للمصفوفة A ■

عساي شور (1875–1941) Issai Schur مشهور أساسًا بسبب أبحاثه في مبرهنة الزمر، ولكنه أيضًا بحث في مبرهنة الأعداد، والتحليل، وحقول أخرى. لقد نشر عام 1909 ما هو معروف الآن بمبرهنة شور.

تحقق المصفوفة U التي وجودها مضمون في مبرهنة (9.9) الشرط $\|U\mathrm{x}\|_2 = \|\mathrm{x}\|_2$ لأي متجه x. وإن مصفوفات بهذه الصفة تسمى "وحدانية unitary ". وعلى الرغم من أننا لن نستخدم خاصية المعيار هذه، إلا أنها تزيد من تطبيق مبرهنة شور Schur's Theorem.

مبرهنة (9.9) هي مبرهنة موجودة، وتضمن وجود مصفوفة مثلثية T، ولكنها لا تعطي وسائل إنشاء لإيجاد T؛ لكونها تتطلب معلومات حول القيم المميزة لِـ A. ونجد في أغلب الحالات أنه من الصعوبة تحديد مصفوفة التحويل التماثلي U. يقلّل الشرط الآتي التعقيد في مبرهنة (9.9) للمصفوفات المتماثلة؛ لأن مصفوفة التحويل في هذه الحالة تكون متعامدة.

إن المعيار l_2 لمصفوفة الباب هو 1 ، ولذلك فلها قيمة الباب.

مبرهنة 10.9 إذا كانت A مصفوفة متماثلة وD مصفوفة مثلثية عناصرها القطرية القيم المميزة لِـ A، فإنه توجد مصفوفة متعامدة Q بحيث تكون $D = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$. ■

توضح النتائج الآتية للمبرهنة (10.9) بعض الخصائص المفيدة للمصفوفات المتماثلة.

تمهيدية 11.9 لتكن A مصفوفة متماثلة من الدرجة $n \times n$. عندئذ يوجد n من القيم المميزة للمصفوفة A تكون مجموعة عيارية متعامدة، وأن القيم المميزة للمصفوفة A أعداد حقيقية. ■

البرهان إذا كانت $Q = (q_{ij})$ و $D = (d_{ij})$ تمثِّل المصفوفات المنوه بها في مبرهنة (10.9) فإن $D = Q^{-1}AQ$ تؤدي إلى $AQ = QD$.

ليكن $1 \le i \le n$ و $\mathbf{v}_i = (q_{1i}, q_{2i}, \ldots, q_{ni})^t$ عبارة عن العمود i في Q. لذلك فإن

$$A\mathbf{v}_i = d_{ii}\mathbf{v}_i$$

حيث إن d_{ii} عبارة عن قيمة مميزة لِـ A مع متجه مميز $\mathbf{v}_i$ يقابلها، ويمثِّل العمود i في Q. ولأن أعمدة Q متعامدة؛ فإن المتجهات المميزة لـ A متعامدة.

وبضرب هذه المعادلة من اليسار في المقدار $\mathbf{v}_i^t$ نحصل على

$$\mathbf{v}_i^t A\mathbf{v}_i = d_{ii}\mathbf{v}_i^t\mathbf{v}_i$$

ولأن $\mathbf{v}_i^t A\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_i^t\mathbf{v}_i$ عددان حقيقيان و $\mathbf{v}_i^t\mathbf{v}_i = 1$؛ فإن القيمة المميزة $d_{ii} = \mathbf{v}_i^t A\mathbf{v}_i$ عدد حقيقي لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■ ■ ■

تذكر من الفصل (6.6) أن المصفوفة المتماثلة A تسمى موجبة التحديد positive definite في حال وجود $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ عند كل المتجهات اللاصفرية $\mathbf{x}$. تشخص مبرهنة الآتية مصفوفات موجبة التحديد من حيث القيم المميزة، وتجعل هذه الخاصية المتعلقة بالقيمة المميزة المصفوفات موجبة التحديد ضرورية في التطبيقات.

تمهيدية 12.9 المصفوفة المتماثلة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا كانت القيم المميزة جميعها لِـ A موجبة. ■

البرهان افترض أولاً أن A موجبة التحديد، وأن λ عبارة عن قيمة مميزة لِـ A مع متجه مميز يقابلها $\mathbf{x}$. لذا فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^t\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|_2^2$$

ومن ثم $\lambda > 0$. لذلك فإن أي قيمة مميزة لمصفوفة موجبة التحديد تكون موجبة.

ولإثبات العكس؛ افترض أن A متماثلة مع قيم مميزة موجبة. ومن خلال النتيجة (11.9) فإن A لها n من المتجهات المميزة $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$، وتشكل مجموعة متعامدة ومستقلة خطيًّا من خلال مبرهنة (5.9). وبذلك فعند أي $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ يجب وجود مجموعة وحيدة من الثوابت اللاصفرية $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ بحيث يكون

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}^{(i)}$$

وبالضرب في المقدار $\mathbf{x}^t A$ نحصل على

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \mathbf{x}^t \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i A\mathbf{v}^{(i)}\right) = \mathbf{x}^t \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i \mathbf{v}^{(i)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_j\beta_i\lambda_i (\mathbf{v}^{(j)})^t\mathbf{v}^{(i)}$$

لكن المتجهات $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$ تشكِّل مجموعة متعامدة، لذلك

$$(\mathbf{v}^{(j)})^t\mathbf{v}^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } i \neq j \\ 1, & \text{إذا كان } i = j \end{cases}$$

هذا مع حقيقة كون λ_i جميعًا موجبة، مما يؤدي إلى أن

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_j\beta_i\lambda_i(\mathbf{v}^{(j)})^t\mathbf{v}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\beta_i^2 > 0$$

ومن ثم فإن A موجبة التحديد. ■ ■ ■

إن الحصيلة النهائية للبند تأخذ في الحسبان حدود التقريب للقيم المميزة.

مبرهنة 13.9 دائرة جرسجورن Geršgorin Circle

ارشاد: جرسجورين S.A Gers~gorin (1901-1933) برهن نتيجته الأصلية المتعلقة بتقدير القيم المميزة لمصفوفة بعناصر مركبة في ورقة [Ger] ثم نشرها عام 1931 ريتشارد فارجا Richard Varga قد كتب حينئذ كتابا [Var2] حول نتائج جرسجورين ومبرهنة الدائرة.

لتكن A مصفوفة بحجم $n \times n$ وتمثِّل R_i الدائرة في المستوى المركب بمركز a_{ii} ونصف قطر $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$، بمعنى أن

$$R_i = \left\{ z \in \mathcal{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

حيث تمثِّل $\mathcal{C}$ المستوى المركب. تكون القيم المميزة لـ A ضمن $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$، وأبعد من ذلك، فإن اتحاد أي عدد k من هذه الدوائر التي لا تتقاطع مع بقية الـ $(n-k)$ من الدوائر تتضمن بالتأكيد (حاسبين المضاعفات) k من القيم المميزة. ■

البرهان افترض أن λ قيمة مميزة لـ A مع متجه مقابل لها $\mathbf{x}$، حيث $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$. ولأن $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$، فإن التمثيل الماثل للمركبة يكون

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i$$

لكل

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

فإذا كانت k عبارة عن عدد صحيح مع $|x_k| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 1$، فإن هذه المعادلة عند $i = k$ تؤدي إلى أن

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = \lambda x_k$$

وبذلك فإن

$$\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j = \lambda x_k - a_{kk}x_k = (\lambda - a_{kk})x_k$$

و

$$|\lambda - a_{kk}| \cdot |x_k| = \left| \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j|$$

وحيث إن $|x_k| = 1 \geq |x_j|$ لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ فإن

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

وبذلك فإن $\lambda \in R_k$، الذي يبرهن الفقرة الأول من مبرهنة. ويتطلب الفقرة الثاني لهذه مبرهنة استمرارية مداخلة ماهرة. وثمة برهان يمكن قراءته موجود في [Or2 p. 48]. ■ ■ ■

مثال 5 للمصفوفة

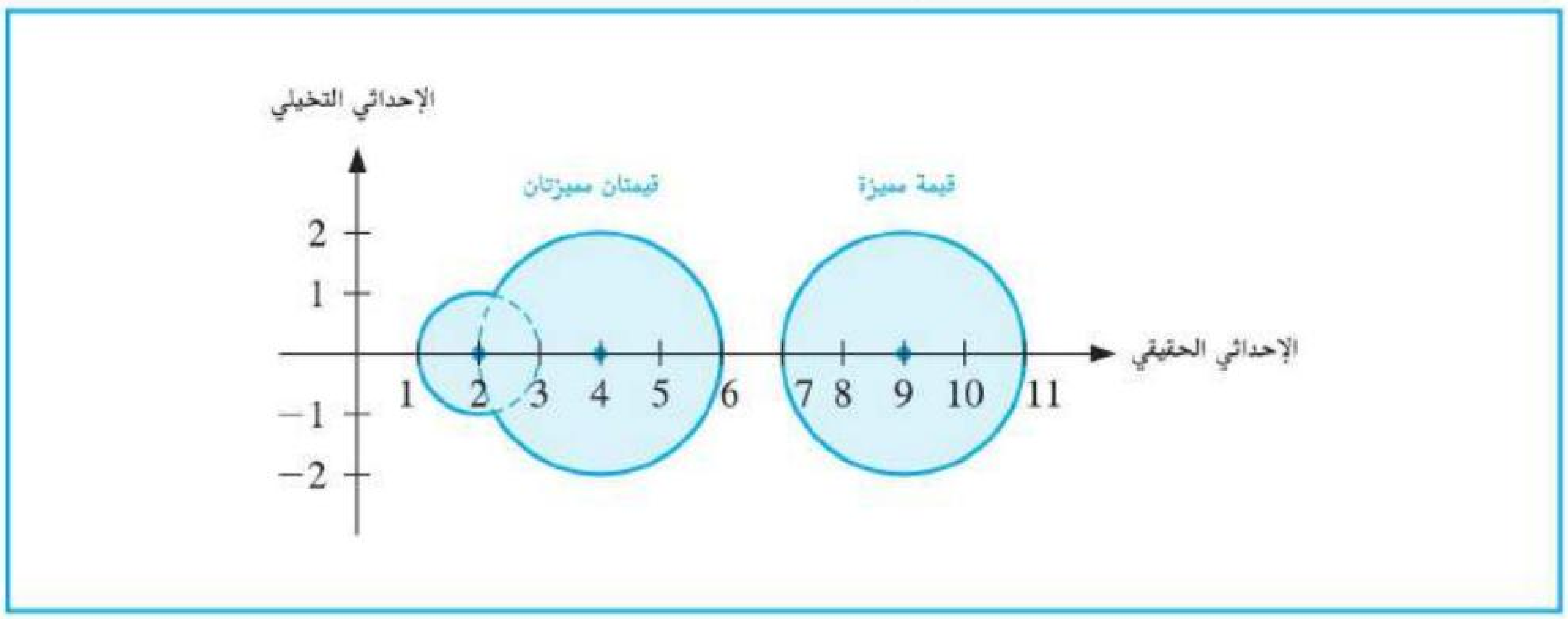
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

تكون الدوائر في مبرهنة Geršgorin Circle (انظر شكل 1.9)

$$R_1 = \{ z \in \mathcal{C} \mid |z - 4| \leq 2\}$$
$$R_2 = \{ z \in \mathcal{C} \mid |z - 2| \leq 1\}$$
$$R_3 = \{ z \in \mathcal{C} \mid |z - 9| \leq 2\}$$

ولكون R_1 و R_2 منفصلة عن R_3؛ فإن هناك قيمتين مميزتين ضمن $R_1 \cup R_2$ وواحدة ضمن R_3. وكذلك لأن $\rho(A) = \max_{1\leq i\leq 3} |\lambda_i|$ يكون لدينا $7 \leq \rho(A) \leq 11$.

شكل 1.9



مجموعة التمارين 1.9 EXERCISE SET

1. أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة لها للمصفوفات بحجم 3 × 3 الآتية، هل هناك مجموعة متجهات مميزة مستقلة خطيًّا؟

أ. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة لها للمصفوفات بحجم 3×3 الآتية، هل هناك مجموعة متجهات مميزة مستقلة خطيًّا؟

أ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. المصفوفات في التمرين 1(ب) و (ج) متماثلة.

أ. هل هي موجبة التحديد؟

ب. خذ المصفوفات موجبة التحديد في (أ). ابنِ مصفوفة متعامدة Q بحيث $Q^tAQ = D$ مصفوفة متماثلة، مستخدمًا المتجهات المميزة التي وُجدت في التمرين (1).

4. المصفوفات في التمرين 2(ب) و (ج) متماثلة.

أ. هل هي موجبة التحديد؟

ب. خذ المصفوفات موجبة التحديد في (أ). ابنِ مصفوفة متعامدة Q، حيث $Q^tAQ = D$ مصفوفة قطرية، مستخدمًا المتجهات المميزة التي وُجدت في التمرين (2).

5. استخدم مبرهنة Geršgorin Circle Theorem لتحديد حدود القيم المميزة للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$

6. استخدم مبرهنة Geršgorin Circle Theorem لتحديد حدود القيم المميزة للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

7. أثبت أن $\vec{v_1} = (2, -1)^t, \vec{v_2} = (1, 1)^t, \vec{v_3} = (1, 3)^t$ تكون معتمدة خطيًّا.

8. أثبت أن أي أربعة متجهات ضمن $\mathbb{R}^3$ تكون معتمدة خطيًّا.

9. أثبت أن مجموعة $\{v_1, \ldots, v_k\}$ المكونة من k من المتجهات المتعامدة واللاصفرية تكون مستقلة خطيًّا.

10. لتكن Q مصفوفة متعامدة:

أ. أثبت أن أعمدة Q تشكِّل مجموعة متعامدة من المتجهات.

ب. أثبت أن $\|Q\|_2 = 1$ و $\|Q^t\|_2 = 1$.

11. لتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ عبارة عن مجموعة من المتجهات المتعامدة واللاصفرية ضمن $\mathbb{R}^n$، وأن $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. حدّد القيم c_k عند $k = 1, 2, \ldots, n$ إذا كان

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$$

12. أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة بحجم $n \times n$ مع عدد n من القيم المميزة المختلفة فإن A لها عدد n من المتجهات المميزة المستقلة خطيًّا.

13. في التمرين (31) من الفصل (6.6)، استُخدمت المصفوفة المتماثلة

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix}$$

في توضيح معدل أطوال جناح ذباب الفاكهة الناتجة من تزاوج ثلاثة أنواع من الذباب. ويمثّل العنصر a_{ij} معدل طول جناح ذبابة وليدة ذكر من النوع i وأنثى من النوع j.

أ. أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة لها لهذه المصفوفة.

ب. استخدم مبرهنة (12.9) في الإجابة عن السؤال الذي ورد في الفقرة (ب) من التمرين (31) من الفصل (6.6). هل هذه المصفوفة موجبة التحديد؟

14. مصفوفة persymmetric matrix هي مصفوفة متماثلة حول كلا القطرين، بمعنى أن مصفوفة $A = (a_{ij})$ بحجم $N \times N$ تكون persymmetric إذا كانت $a_{ij} = a_{ji} = a_{N+1-i, N+1-j}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, N$ و $j = 1, 2, \ldots, N$. ويتضمن عدد من المسائل في مبرهنة الاتصالات حلولاً للقيم المميزة والمتجهات المميزة لمصفوفات بصيغة persymmetric matrix. وعلى سبيل المثال، المتجه المميز المقابل للقيمة المميزة الصغرى للمصفوفة persymmetric matrix بحجم 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

يعطي وحدة الاستجابة لدفعة قناة الطاقة عند متتالية خطأ محدد بطول 2، ثم الوزن الأقل لأي متتالية خطأ محتملة.

أ. استخدم مبرهنة Geršgorin Circle Theorem لإثبات أنه إذا كانت A كما في أعلاه وλ هي القيمة المميزة الصغرى لها فإن $|\lambda - 4| = \rho(A - 4I)$، حيث تمثّل ρ نصف القطر الطيفي.

ب. أوجد القيمة المميزة الصغرى للمصفوفة A من خلال إيجاد للقيم المميزة جميعها $A-4I$ وحساب نصف قطرها الطيفي، ومن ثم أوجد المتجه المميز المقابل لها.

ج. استخدم مبرهنة Geršgorin Circle Theorem لإثبات أنه إذا كانت λ هي القيمة المميزة الصغرى للمصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن $|\lambda - 6| = \rho(B - 6I)$.

د. كرِّر الفقرة (ب) مستخدمًا المصفوفة B ونتيجة الفقرة (ج).

2.9 طريقة القوة The power Method

إن طريقة القوة Power method عبارة عن أسلوب إعادة يُستخدم في تحديد القيمة المميزة المهيمنة dominant eigenvalue للمصفوفة، أي القيمة المميزة ذات الحجم الأكبر. ومن خلال

إن اسم طريقة القوة مشتق من حقيقة كـون التكـرارات تضخـم الحجم النسبي لسمات القيم المميزة.

بإجراء تعديل بسيط للطريقة، يمكن استخدامها لتحديد قيم مميزة أخرى أيضًا. وإحدى السمات المفيدة لطريقة القوة هي أنها لا تنتج قيمة مميزة فقط، بل تنتج المتجه المميز المقابل لها أيضًا. وفي الحقيقة إن طريقة القوة تُطبّق غالبًا لإيجاد متجه مميز لقيمة مميزة حدّدت بأساليب أخرى.

ولتطبيق طريقة القوة؛ نفترض أن المصفوفة A بحجم $n \times n$ لها n من القيم المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ مع مجموعة المتجهات المميزة المستقلة خطيًّا والمقابلة لها $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$.

ونفترض بالإضافة إلى ذلك أن لـ A بالتحديد قيمة مميزة وحيدة λ_1 هي القيمة الأكبر، وعليه $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq 0$.

يوضح مثال (2) في الفصل (2.9) أن مصفوفة بحجم $n \times n$ لا تحتاج إلى أن يكون لها عدد n من المتجهات المميزة، وإذا كانت كذلك فإن طريقة القوة ما تزال ناجحة، ولكن نجاحها غير مضمون.

وإذا كانت $\mathbf{x}$ أي متجه ضمن $\mathbb{R}^n$ فإن حقيقة كون $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مستقلة خطيًّا، يؤدي إلى وجود الثوابت $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ مع

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{v}^{(j)}$$

وبضرب كلا طرفي المعادلة في المقادير $A, A^2, \ldots, A^k$ نحصل على

$$A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j A\mathbf{v}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \mathbf{v}^{(j)}$$

$$A^2\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j A\mathbf{v}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^2 \mathbf{v}^{(j)}$$

$$\vdots$$

$$A^k\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^k \mathbf{v}^{(j)}$$

وإذا عومِل λ_1^k من كل حدٍّ في الجهة اليمنى للمعادلة الأخيرة فإن

$$A^k\mathbf{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}^{(j)}$$

ولأن $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ لكل $j = 2, 3, \ldots, n$؛ يكون لدينا $\lim_{k\to\infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$

و

$$\lim_{k\to\infty} A^k\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \beta_1 \mathbf{v}^{(1)} \tag{1.9}$$

تتقارب هذه المتتالية إلى الصفر إذا كان $|\lambda_1| < 1$، وتتباعد إذا كان $|\lambda_1| > 1$، بشرط $\beta_1 \neq 0$ بطبيعة الحال.

ويمكن عمل إيجابية ما للعلاقة المبينة في المعادلة (1.9) من خلال تدريج القوى لـ $A^k\mathbf{x}$ وفق أسلوب مناسب لضمان أن النهاية في المعادلة (1.9) منتهية وليست صفرًا. ويبدأ التدريج باختيار $\mathbf{x}$ لتكون متجهًا حياديًّا $\mathbf{x}^{(0)}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$ واختيار مركبة $x_{p_0}^{(0)}$ لـ $\mathbf{x}^{(0)}$ مع

$$x_{p_0}^{(0)} = 1 = \|\mathbf{x}^{(0)}\|_\infty$$

ليكن $\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)}$، عرف $\mu^{(1)} = y^{(1)}_{p_0}$. فيكون

$$\mu^{(1)} = y^{(1)}_{p_0} = \frac{y^{(1)}_{p_0}}{x^{(0)}_{p_0}} = \frac{\beta_1\lambda_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j\lambda_j v^{(j)}_{p_0}}{\beta_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j v^{(j)}_{p_0}} = \lambda_1\left[\frac{\beta_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j(\lambda_j/\lambda_1)v^{(j)}_{p_0}}{\beta_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j v^{(j)}_{p_0}}\right]$$

ليكن p_1 أدنى عدد صحيح بحيث

$$|y^{(1)}_{p_1}| = \|\mathbf{y}^{(1)}\|_\infty$$

وعرف $\mathbf{x}^{(1)}$ من خلال

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}}\mathbf{y}^{(1)} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}}A\mathbf{x}^{(0)}$$

ولذلك يكون

$$x^{(1)}_{p_1} = 1 = \|\mathbf{x}^{(1)}\|_\infty$$

والآن عرف

$$\mathbf{y}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}}A^2\mathbf{x}^{(0)}$$

و

$$\mu^{(2)} = y^{(2)}_{p_1} = \frac{y^{(2)}_{p_1}}{x^{(1)}_{p_1}} = \frac{\left[\beta_1\lambda_1^2 v^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j\lambda_j^2 v^{(j)}_{p_1}\right]\Big/ y^{(1)}_{p_1}}{\left[\beta_1\lambda_1 v^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j\lambda_j v^{(j)}_{p_1}\right]\Big/ y^{(1)}_{p_1}}$$

$$= \lambda_1\left[\frac{\beta_1 v^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j(\lambda_j/\lambda_1)^2 v^{(j)}_{p_1}}{\beta_1 v^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j(\lambda_j/\lambda_1)v^{(j)}_{p_1}}\right]$$

ليكن p_2 أصغر عدد صحيح مع $|y^{(2)}_{p_2}| = \|\mathbf{y}^{(2)}\|_\infty$ h، عرف

$$\mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{y^{(2)}_{p_2}}\mathbf{y}^{(2)} = \frac{1}{y^{(2)}_{p_2}}A\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{y^{(2)}_{p_2}y^{(1)}_{p_1}}A^2\mathbf{x}^{(0)}$$

وبالأسلوب نفسه، استنتج تعريف متتاليات المتجهات $\{\mathbf{x}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ و $\{\mathbf{y}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ومتتالية تدريجات $\{\mu^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ من خلال

$$\mathbf{y}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)}$$

$$\mu^{(m)} = y^{(m)}_{p_{m-1}} = \lambda_1\left[\frac{\beta_1 v^{(1)}_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^{n}(\lambda_j/\lambda_1)^m\beta_j v^{(j)}_{p_{m-1}}}{\beta_1 v^{(1)}_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^{n}(\lambda_j/\lambda_1)^{m-1}\beta_j v^{(j)}_{p_{m-1}}}\right] \tag{2.9}$$

$$\mathbf{x}^{(m)} = \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{y^{(m)}_{p_m}} = \frac{A^m\mathbf{x}^{(0)}}{\prod_{k=1}^{m} y^{(k)}_{p_k}}$$

حيث يُستخدم عند كل خطوة p_m لتمثيل أصغر عدد صحيح بحيث

$$|y^{(m)}_{p_m}| = \|\mathbf{y}^{(m)}\|_\infty$$

ومن خلال فحص المعادلة (2.9)، نرى أنه ما دام $|\lambda_j/\lambda_1| < 1$ لكل $j = 2, 3, \ldots, n$، فإن

$\lim_{m\to\infty}\mu^{(m)}=\lambda_1$ على أن يُختار $x^{(0)}$ بحيث $\beta_1 \neq 0$. والأكثر من ذلك، فإن متتالية المتجهات $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ تتقارب إلى متجه مميز مقترنًا مع λ_1 الذي له المعيار l_∞ واحد.

إن لطريقة القوة نقطة سلبية، وهي مجهولة إذا كان للمصفوفة عند البداية، قيمة مهيمنة وحيدة. كما أنه ليس معلومًا كيفية اختيار $x^{(0)}$ لضمان تمثيلها بدلالة المتجهات المميزة لمصفوفة تتضمن مساهمة لاصفرية من قبل المتجه المميز المقترن بالقيمة المميزة المهيمنة في حالة وجودها.

تنفذ الخوارزمية (1.9) طريقة القوة.



طريقة القوة Power Method

لتقريب القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقترن بها للمصفوفة A بحجم $n \times n$ وبشرط متجه لاصفري x:

المدخلات: البعد n، مصفوفة A، متجه x، حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرارات N.

المخرجات: تقريب القيمة المميزة μ، تقريب المتجه المميز x (مع $\|x\|_\infty = 1$) أو عبارة تفيد بأن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	أوجد أصغر عدد صحيح p مع $1 \le p \le n$ و $\|x_p\| = \|x\|_\infty$.
3	ضع $x = x/x_p$
4	ما دام $(k \le N)$ فنفّذ الخطوات 5 - 11.
5	ضع $y = Ax$
6	ضع $\mu = y_p$
7	أوجد أصغر عدد صحيح p مع $1 \le p \le n$ و $\|y_p\| = \|y\|_\infty$.
8	إذا كانت $y_p = 0$ فإن المخرجات (المتجه المميز x). المخرجات (A له قيمة مميزة 0، اختر متجهًا جديدًا x وابدأ من جديد). توقف.
9	ضع $ERR = \|x - (y/y_p)\|_\infty$ $x = y/y_p$
10	إذا كان $ERR < TOL$ فإن المخرجات (μ, x) (العملية كانت ناجحة). توقف.
11	ضع $k = k + 1$.
12	المخرجات (إن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه). (العملية كانت فاشلة). توقف.

■

وعند اختيارنا في الخطوة (7) أصغر عدد صحيح p_m بحيث $\|y^{(m)}\|_\infty = |y_{p_m}^{(m)}|$، سيصبح هذا

المؤشر في نهاية الأمر ثابتًا عمومًا. إن المعدل الذي يتقارب عنده $\{\mu^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ إلى λ_1 يُحدّد بالتناسبات $|\lambda_j/\lambda_1|^m$ عند $j = 2, 3, \ldots, n$، من خلال $|\lambda_2/\lambda_1|^m$ خصوصًا. إن معدل التقارب هو $O(|\lambda_2/\lambda_1|^m)$ (انظر [IK, p. 148])، ولذلك هناك ثابت k بحيث إذا كانت m كبيرة تكون

$$|\mu^{(m)} - \lambda_1| \approx k\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m \text{ الذي يؤدي إلى } \lim_{m\to\infty}\frac{|\mu^{(m+1)} - \lambda_1|}{|\mu^{(m)} - \lambda_1|} \approx \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$$

لذلك فالمتتالية $\{\mu^{(m)}\}$ تتقارب خطيًّا إلى λ_1، وإن عملية Aitken's Δ^2 التي تناولناها في الفصل (5.2) يمكن استخدامها لتسريع التقارب. إن تنفيذ عملية Δ^2 في الخوارزمية (1.9) يتحقق من خلال تعديل الخوارزمية وفق الآتي:

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$ $\mu_0 = 0$ $\mu_1 = 0$
6	ضع $\mu = y_p$ $\hat{\mu} = \mu_0 - \dfrac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{\mu - 2\mu_1 + \mu_0}$
10	إذا كان $ERR < TOL$ و $k \geq 4$ فإن المخرجات $(\hat{\mu}, \mathbf{x})$. توقف.
11	ضع $k = k + 1$ $\mu_0 = \mu_1$ $\mu_1 = \mu$

في الواقع، ليس من الضروري أن يكون للمصفوفة قيم مميزة مختلفة حتى تتقارب طريقة القوة. وإذا كانت لها قيمة مميزة مهيمنة وحيدة λ_1 مع تعددية r أكبر من 1، و $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(r)}$ هي متجهات مميزة مستقلة خطيًّا مقابلة لـ λ_1، فإن العملية ستبقى على تقارب إلى λ_1. إن متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ ستكون في هذه الحالة متقاربة إلى متجه مميز مقترن مع λ_1 بمعيار l_∞ واحد يعتمد على اختيار المتجه الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$، ويكون عبارة عن تركيب خطي من $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(r)}$

مثال 1 المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

لها قيم مميزة $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$، ولذلك فإن طريقة القوة الموضحة في الخوارزمية (1.9) ستتقارب. ليكن $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ لذلك

$$\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)} = (10, 8, 1)^t$$

ومن ثم فإن

$$\|\mathbf{y}^{(1)}\|_\infty = 10, \quad \mu^{(1)} = y_1^{(1)} = 10, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \frac{\mathbf{y}^{(1)}}{10} = (1, 0.8, 0.1)^t$$

جدول 1.9

m	$(\mathrm{x}^{(m)})^t$	$\mu^{(m)}$	$\hat{\mu}^{(m)}$
0	$(1, 1, 1)$		
1	$(1, 0.8, 0.1)$	10	6.266667
2	$(1, 0.75, -0.111)$	7.2	6.062473
3	$(1, 0.730769, -0.188803)$	6.5	6.015054
4	$(1, 0.722200, -0.220850)$	6.230769	6.004202
5	$(1, 0.718182, -0.235915)$	6.111000	6.000855
6	$(1, 0.716216, -0.243095)$	6.054546	6.000240
7	$(1, 0.715247, -0.246588)$	6.027027	6.000058
8	$(1, 0.714765, -0.248306)$	6.013453	6.000017
9	$(1, 0.714525, -0.249157)$	6.006711	6.000003
10	$(1, 0.714405, -0.249579)$	6.003352	6.000000
11	$(1, 0.714346, -0.249790)$	6.001675	
12	$(1, 0.714316, -0.249895)$	6.000837	

يؤدي الاستمرار بهذا النمط إلى القيم التي تظهر في جدول (1.9)، حيث تمثِّل $\hat{\mu}^{(m)}$ المتتالية المتولدة من خلال عملية Aitken's Δ^2. إن تقريب القيمة المميزة المهيمنة 6 عند هذه المرحلة هو $\hat{\mu}^{(10)} = 6.000000$ مع وحدة تقريب متجه مميز $(1, 0.714316, -0.249895)^t$.
وعلى الرغم من أن التقريب إلى القيمة المميزة صحيح بالنسبة إلى الخانات الموضحة، فإن تقريب المتجه المميز أقل دقة مقارنة بالمتجه المميز الحقيقي $(1, 0.714286, -0.25)^t$.
عندما يكون A متماثلًا، قد يحدث اختلاف في اختيار المتجهات $\mathrm{x}^{(m)}, \mathrm{y}^{(m)}$ وتدريجات $\mu^{(m)}$ لتحسين معدل التقارب للمتتالية $\{\mu^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ وللقيمة المميزة المهيمنة λ_1 معنويًّا. ومع أن معدل التقارب لطريقة القوة العامة هو $O(|\lambda_2/\lambda_1|^m)$، فإن معدل التقارب للعملية المعدلة المعطاة في الخوارزمية (2.9) للمصفوفة المتماثلة هو $O(|\lambda_2/\lambda_1|^{2m})$. (انظر [IK, pp. 149 ff])، ولأن المتتالية $\{\mu^{(m)}\}$ ما زالت متقاربة خطيًّا؛ فإنه يمكن تطبيق عملية Aitken's Δ^2.
تنفذ الخوارزمية (1.9) طريقة القوة المتماثلة.

ALGORITHM
الخوارزمية
2.9

طريقة القوة المتماثلة Symmetric Power Method

لتقريب القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقترن بها للمصفوفة A بحجم $n \times n$، وبشرط متجه لاصفري x:

المدخلات: البعد n، مصفوفة A، متجه x، حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرارات N .

المخرجات: تقريب القيمة المميزة μ، تقريب المتجه المميز x (مع $\|\mathrm{x}\|_2 = 1$) أو عبارة تفيد بأن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$ $\mathrm{x} = \mathrm{x}/\|\mathrm{x}\|_2$
2	ما دام $(k \le N)$ فنفِّذ الخطوات 3-8.



3	ضع $y = Ax$.
4	ضع $= x^t y$.
5	إذا كانت $\|y\|_2 = 0$ فإن المخرجات (المتجه المميز x). المخرجات (لـ A قيمة مميزة 0، اختر متجهًا جديدًا x وابدأ من جديد). توقف.
6	ضع $ERR = \left\| x - \frac{y}{\|y\|_2} \right\|_2$ $x = y / \|y\|_2$
7	إذا كان $ERR < TOL$ فإن المخرجات (x ,). (العملية كانت ناجحة). توقف.
8	ضع $k = k + 1$.
9	المخرجات (إن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه). (العملية كانت فاشلة). توقف.

■

مثال 2

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

متماثلة مع قيم مميزة $\lambda_1 = 6$، $\lambda_2 = 3$، $\lambda_3 = 1$. يتضمن جدول (2.9) نتائج طريقة القوة، أما النتائج في جدول (3.9) فهي لطريقة القوة المتماثلة، مفترضين في كل حالة أن $y^{(0)} = x^{(0)} = (1, 0, 0)^t$، انظر معنوية التحسن التي تحققها طريقة القوة المتماثلة. تتقارب تقريبات المتجهات المميزة المنتجة بطريقة القوة إلى المتجه $(1, -1, 1)^t$ مع $\|(1, -1, 1)^t\|_\infty = 1$. وفي طريقة القوة المتماثلة، فإن التقارب يكون إلى المتجه المتوازي $(\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)^t$ مع $\|(\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)^t\|_2 = 1$.

جدول 2.9 طريقة القوة لـ Aitken's Δ^2

m	$(y^{(m)})^t$	$^{(m)}$	$\hat{}^{(m)}$	$(x^{(m)})^t$ مع $\|x^{(m)}\|_\infty = 1$
0				(1, 0, 0)
1	(4, −1, 1)	4		(1, −0.25, 0.25)
2	(4.5, −2.25, 2.25)	4.5	7	(1, −0.5, 0.5)
3	(5, −3.5, 3.5)	5	6.2	(1, −0.7, 0.7)
4	(5.4, −4.5, 4.5)	5.4	6.047617	$(1, -0.833\overline{3}, 0.833\overline{3})$
5	$(5.66\overline{6}, -5.166\overline{6}, 5.166\overline{6})$	$5.66\overline{6}$	6.011767	(1, −0.911765, 0.911765)
6	(5.823529, −5.558824, 5.558824)	5.823529	6.002931	(1, −0.954545, 0.954545)
7	(5.909091, −5.772727, 5.772727)	5.909091	6.000733	(1, −0.976923, 0.976923)
8	(5.953846, −5.884615, 5.884615)	5.953846	6.000184	(1, −0.988372, 0.988372)
9	(5.976744, −5.941861, 5.941861)	5.976744		(1, −0.994163, 0.994163)
10	(5.988327, −5.970817, 5.970817)	5.988327		(1, −0.997076, 0.997076)

جدول 3.9 طريقة القوة لـِ Aitken's Δ^2

m	$(\mathbf{y}^{(m)})^t$	$\mu^{(m)}$	$\hat{\mu}^{(m)}$	$(\mathbf{x}^{(m)})^t$ مع $\|\mathbf{x}^{(m)}\|_2 = 1$
0	(1, 0, 0)			(1, 0, 0)
1	(4, −1, 1)	4	7	(0.942809, −0.235702, 0.235702)
2	(4.242641, −2.121320, 2.121320	5	6.047619	(0.816497, −0.408248, 0.408248)
3	(4.082483, −2.857738, 2.857738)	5.666667	6.002932	(0.710669, −0.497468, 0.497468)
4	(3.837613, −3.198011, 3.198011)	5.909091	6.000183	(0.646997, −0.539164, 0.539164)
5	(3.666314, −3.342816, 3.342816)	5.976744	6.000012	(0.612836, −0.558763, 0.558763)
6	(3.568871, −3.406650, 3.406650)	5.994152	6.000000	(0.595247, −0.568190, 0.568190)
7	(3.517370, −3.436200, 3.436200)	5.998536	6.000000	(0.586336, −0.572805, 0.572805)
8	(3.490952, −3.450359, 3.450359)	5.999634		(0.581852, −0.575086, 0.575086)
9	(3.477580, −3.457283, 3.457283)	5.999908		(0.579603, −0.576220, 0.576220)
10	(3.470854, −3.460706, 3.460706)	5.999977		(0.578477, −0.576786, 0.576786)

مبرهنة 14.9 تعطي المبرهنة الآتية حد خطأ لتقريب القيم المميزة لمصفوفة متماثلة.

إذا كانت A مصفوفة متماثلة بحجم $n \times n$ مع قيم مميزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ و $\|A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\|_2 < \varepsilon$ لعدد ما حقيقي λ ومتجه $\mathbf{x}$ مع $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$، فإن

$$\min_{1 \le j \le n} |\lambda_j - \lambda| < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

البرهان افترض أن $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$ تشكل مجموعة متعامدة من المتجهات المميزة لـِ A ومقترنة على التوالي بالقيم المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

ووفقًا للنظريتين (5.9) و (2.9)؛ فإنه يمكن وضع $\mathbf{x}$ لمجموعة وحيدة من الثوابت $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ على الصورة

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{v}^{(j)}$$

ومن ثم فإن

$$\|A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j(\lambda_j - \lambda)\mathbf{v}^{(j)} \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2 |\lambda_j - \lambda|^2 \ge \min_{1 \le j \le n} |\lambda_j - \lambda|^2 \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2$$

ولكن

$$\sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 = 1$$

لذا فإن

$$\varepsilon \ge \|A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\|_2 > \min_{1 \le j \le n} |\lambda_j - \lambda| \qquad \blacksquare\ \blacksquare\ \blacksquare$$

إن طريقة القوة المعكوسة Inverse Power method عبارة عن تعديل لطريقة القوة لتعطي تقاربًا أسرع. وتُستخدم لتحديد القيمة المميزة لـِ A القريبة من العدد المحدد q.

افترض أن للمصفوفة A قيمًا مميزة $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مع متجهات مميزة مستقلة خطيًا $v^{(n)}$, ... , $v^{(1)}$. إن القيم المميزة لِـ $(A-qI)^{-1}$ حيث $q \neq \lambda_i$ عند $i = 1, 2, \ldots, n$ تكون

$$\frac{1}{\lambda_1 - q}, \quad \frac{1}{\lambda_2 - q}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\lambda_n - q}$$

مع متجهات مميزة $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$. (انظر التمرين 13 من الفصل 2.7) بتطبيق طريقة القوة لِـ $(A-qI)^{-1}$ نحصل على

$$\mathbf{y}^{(m)} = (A - qI)^{-1}\mathbf{x}^{(m-1)}$$

$$\mu^{(m)} = y^{(m)}_{p_{m-1}} = \frac{y^{(m)}_{p_{m-1}}}{x^{(m-1)}_{p_{m-1}}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{1}{(\lambda_j - q)^m} v^{(j)}_{p_{m-1}}}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{1}{(\lambda_j - q)^{m-1}} v^{(j)}_{p_{m-1}}} \tag{3.9}$$

و

$$\mathbf{x}^{(m)} = \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{y^{(m)}_{p_m}}$$

حيث يمثِّل p_m عند كل خطوة أصغر عدد صحيح لتكون $|y^{(m)}_{p_m}| = \| \mathbf{y}^{(m)} \|_\infty$. وتتقارب المتتالية $\{\mu^{(m)}\}$ في المعادلة (3.9) إلى $1/(\lambda_k - q)$ حيث إن

$$\frac{1}{|\lambda_k - q|} = \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{|\lambda_i - q|}$$

و $\lambda_k \approx q + 1/\mu^{(m)}$ هي القيمة المميزة لِـ A والأقرب إلى q .

ومع معلومية k، يمكن كتابة المعادلة (3.9) على الصورة

$$\mu^{(m)} = \frac{1}{\lambda_k - q} \left[\frac{\beta_k v^{(k)}_{p_{m-1}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \beta_j \left[\frac{\lambda_k - q}{\lambda_j - q}\right]^m v^{(j)}_{p_{m-1}}}{\beta_k v^{(k)}_{p_{m-1}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \beta_j \left[\frac{\lambda_k - q}{\lambda_j - q}\right]^{m-1} v^{(j)}_{p_{m-1}}} \right] \tag{4.9}$$

ولذلك فإن اختيار q يحدد التقارب، على أن تكون $1/(\lambda_k - q)$ قيمة مميزة مهيمنة لِـ $(A-qI)^{-1}$ (مع أنه من الممكن أن تكون قيمة مميزة مضاعفة). وكلما اقتربت q من القيمة المميزة λ_k تسارع التقارب؛ لأن التقارب من رتبة

$$O\left(\left|\frac{(\lambda - q)^{-1}}{(\lambda_k - q)^{-1}}\right|^m\right) = O\left(\left|\frac{(\lambda_k - q)}{(\lambda - q)}\right|^m\right)$$

حيث تمثِّل λ القيمة المميزة لِـ A وثاني أقرب قيمة لِـ q.

يوجد المتجه $\mathbf{y}^{(m)}$ من المعادلة

$$(A - qI)\mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{x}^{(m-1)}$$

يمكن استخدام تقليص جاوس مع الدوران لحلِّ هذا النظام عمومًا.

وعلى الرغم من أن طريقة القوة المعكوسة تتطلب حلَّ النظام بحجم $n \times n$ عند كل خطوة إلا أنه يمكن حفظ المضاعفات لتقليل الحسابات. إن اختيار q يمكن أن يستند إلى مبرهنة Geršgorin Circle Theorem أو إلى وسائل أخرى لتحديد موقعين لقيمة مميزة.

تحسب الخوارزمية (3.9) q من تقريب ابتدائي للمتجه المميز $\mathbf{x}^{(0)}$ من خلال

$$q = \frac{\mathbf{x}^{(0)t} A \mathbf{x}^{(0)}}{\mathbf{x}^{(0)t}\mathbf{x}^{(0)}}$$

إن هذا الاختيار لِـ q ناتج من تأمل أنه لو كانت $\mathbf{x}$ عبارة عن متجه مميز لِـ A نسبة إلى القيمة المميزة λ، فإن $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. ومن ثم فإن $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^t\mathbf{x}$ و

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^t A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^t\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^t A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$$

وإذا كانت q قريبة من قيمة مميزة، فإن التقارب سيكون نوعًا ما سريعًا، ولكن يجب استخدام أسلوب الدوران في الخطوة (6) لتجنب التلويث بخطأ تقريب.

تُستخدم الخوارزمية (3.9) غالبًا في تقريب متجه مميز، عندما يكون تقريب القيمة المميزة معلومًا.

ALGORITHM
الخوارزمية
3.9

طريقة القوة المعكوسة Inverse Power Method

لتقريب القيمة المميزة والمتجه المميز المقترن بها للمصفوفة A بحجم $n \times n$ وبشرط متجه لاصفري $\mathbf{x}$؛

المدخلات: البعد n، مصفوفة A، متجه $\mathbf{x}$، حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرارات N.

المخرجات: تقريب القيمة المميزة μ، تقريب المتجه المميز $\mathbf{x}$ (مع $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$) أو عبارة تفيد بأن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $q = \frac{\mathbf{x}^t A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^t\mathbf{x}}$
2	ضع $k = 1$
3	أوجد أصغر عدد صحيح p مع $1 \le p \le n$ و $\|\mathbf{x}\|_\infty = \|x_p\|$.
4	ضع $\mathbf{x} = \mathbf{x}/x_p$
5	ما دام $(k \le N)$ فنفِّذ الخطوات 6-12.
6	حلّ النظام الخطي $(A - qI)\mathbf{y} = \mathbf{x}$
7	إذا كان النظام ليس له حل وحيد فإن المخرجات (q هي قيمة مميزة، q). توقف.
8	ضع $\mu = y_p$
9	أوجد أصغر عدد صحيح p مع $1 \le p \le n$ و $\|\mathbf{y}\|_\infty = \|y_p\|$
10	ضع $ERR = \left\|\mathbf{x} - (\mathbf{y}/y_p)\right\|_\infty$ $\mathbf{x} = \mathbf{y}/y_p$
11	إذا كان $ERR < TOL$ فضع $\mu = (1/\mu) + q$. المخرجات $(\mu, \mathbf{x})$. (العملية كانت ناجحة). توقف.

12	ضع $k = k + 1$.
13	المخرجات (إن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه). (العملية كانت فاشلة). توقف.

■

ولتقارب طريقة القوة المعكوسة خطيًّا؛ فإن عملية Aitken Δ^2 يمكن استخدامها مرة أخرى في تسريع التقارب. ويوضح مثال الآتي التقارب السريع لطريقة القوة المعكوسة إذا كانت q قريبة من قيمة مميزة.

مثال 3 تناولنا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

في مثال (1). أعطت الخوارزمية (1.9) التقريب $\mu^{(12)} = 6.000837$ باستخدام $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ ومع $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$، يكون لدينا

$$q = \frac{\mathbf{x}^{(0)t} A \mathbf{x}^{(0)}}{\mathbf{x}^{(0)t}\mathbf{x}^{(0)}} = \frac{19}{3} = 6.333333$$

إن نتائج تطبيق الخوارزمية (3.9) موجودة في جدول (4.9)، ويتضمّن العمود الأيمن نتائج طريقة Aitken's Δ^2 مطبقة على $\mu^{(m)}$. ■

جدول 4.9

m	$\mathbf{x}^{(m)t}$	$\mu^{(m)}$	$\hat{\mu}^{(m)}$
0	(1, 1, 1)		
1	(1, 0.720727, −0.194042)	6.183183	6.000116
2	(1, 0.715518, −0.245052)	6.017244	6.000004
3	(1, 0.714409, −0.249522)	6.001719	6.000004
4	(1, 0.714298, −0.249953)	6.000175	6.000003
5	(1, 0.714287, −0.250000)	6.000021	
6	(1, 0.714286, −0.249999)	6.000005	

لأي عدد حقيقي q، إذا كانت A متماثلة فإن $(A - qI)^{-1}$ متماثلة أيضًا، ومن ثم يمكن تطبيق طريقة القوة المتماثلة – الخوارزمية (2.9)– على $(A - qI)^{-1}$ لتسريع التقارب إلى

$$O\left(\left|\frac{\lambda_k - q}{\lambda - q}\right|^{2m}\right)$$

تتوافر أساليب عديدة لإيجاد تقريب القيم المميزة الأخرى لمصفوفة عند حساب تقريب القيمة المميزة المهيمنة. وسيقتصر عرضنا هنا على أساليب الانكماش deflation techniques.

تتضمّن أساليب الانكماش تشكيل مصفوفة جديدة B قيمها المميزة هي نفسها لِـ A، باستثناء القيمة المميزة المهيمنة لِـ A فإنها تُستبدل بالقيمة المميزة 0 في B.

والنتيجة الآتية تبرر تلك العملية، ويمكن إيجاد برهان هذه مبرهنة في [Wil2, p. 596].

مبرهنة 15.9 افترض أن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ عبارة عن قيم مميزة لـ A ومتجهات مميزة $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$ مقترنة بها، وأن لـ λ_1 مضاعفًا هو 1. ليكن $\mathbf{x}$ متجهًا مع $\mathbf{x}^t\mathbf{v}^{(1)} = 1$. لذا فإن للمصفوفة

$$B = A - \lambda_1\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{x}^t$$

قيمًا مميزة $0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ مع متجهات مميزة $\mathbf{w}^{(n)}, \ldots, \mathbf{w}^{(3)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{v}^{(1)}$، حيث إن $\mathbf{v}^{(i)}$ و$\mathbf{w}^{(i)}$ مترابطان من خلال المعادلة

$$\mathbf{v}^{(i)} = (\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{w}^{(i)} + \lambda_1(\mathbf{x}^t\mathbf{w}^{(i)})\mathbf{v}^{(1)} \tag{5.9}$$

لكل $i = 2, 3, \ldots, n$. ■

هلمت وايلاند Helmut Wielandt (1910-2001) عمل بالأصل في مجاميع التباديل، ولكنه خلال الحرب العالمية الثانية انشغل في بحث حول الأرصاد الجوية، التشفير، والديناميكا الهوائية. هذا تضمن مسائل الاهتزاز التي تتطلب تقديرًا للقيم المميزة المرتبطة بالمعادلات التفاضلية والمصفوفات.

يمكن استخدام العديد من الاختيارات للمتجه $\mathbf{x}$ في مبرهنة (15.9). ويظهر انكماش ويلاندت Wielandt deflation من تعريف

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}}(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})^t \tag{6.9}$$

حيث إن $v_i^{(1)}$ إحداثي لاصفري للمتجه المميز $\mathbf{v}^{(1)}$، وإن القيم $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ هي العناصر في الصف i للمصفوفة A.

مع هذا تعريف

$$\mathbf{x}^t\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}}[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}](v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)})^t = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j^{(1)}$$

حيث إن الجمع هو الإحداثي i لحاصل الضرب $A\mathbf{v}^{(1)}$. ولأن $A\mathbf{v}^{(1)} = \lambda_1\mathbf{v}^{(1)}$، يكون لدينا

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j^{(1)} = \lambda_1 v_i^{(1)}$$

الذي يؤدي إلى أن

$$\mathbf{x}^t\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}}(\lambda_1 v_i^{(1)}) = 1$$

وبذلك فإن $\mathbf{x}$ تحقق فرضيات مبرهنة (15.9). وأكثر من ذلك، (انظر التمرين 20) فإن الصف i لـ $B = A - \lambda_1\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{x}^t$ يتضمّن عناصر صفرية كاملة.

إذا كانت $\lambda \neq 0$ قيمة مميزة مع متجه مميز مقابل لها $\mathbf{w}$ فإن العلاقة $B\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ تؤدي إلى أن الإحداثي i لـ $\mathbf{w}$ يجب أن يكون صفرًا أيضًا. والنتيجة أن العمود i للمصفوفة B لا يضيف أي مساهمة تجاه $B\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. ولذلك فإن المصفوفة B يمكن استبدالها بمصفوفة B' بحجم $(n-1) \times (n-1)$، ونحصل عليها من خلال حذف الصف والعمود i من B. وللمصفوفة B'. قيم مميزة $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. فإذا كانت $|\lambda_2| > |\lambda_3|$ فإن طريقة القوة يعاد تطبيقها على المصفوفة B' لتحديد هذه القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز $\mathbf{w}^{(2)'}$، المقترن بـ λ_2 بالنسبة إلى المصفوفة B'. لإيجاد المتجه المميز المقترن $\mathbf{w}^{(2)}$ للمصفوفة B؛ أدخل الإحداثي "صفر" بين الإحداثيين $w_{i-1}^{(2)'}$ و$w_i^{(2)'}$ للمتجه $w_i^{(2)'}$ ذي الأبعاد $(n-1)$، ومن ثم احسب $\mathbf{v}^{(2)}$ باستخدام المعادلة (5.9).

مثال 4 نعرف من المثال (2) أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

لهـا قيم مميزة $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$. افترض أن القيمة المميزة المهيمنة $\lambda_1 = 6$ والمتجه المميز المقترن بها $v^{(1)} = (1, -1, 1)^t$ قد حسبا، فالعملية التي اتضحت توًّا لإيجاد λ_2 تكون كما يلي:

$$x = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)^t$$

$$v^{(1)}x^t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}, & -\frac{1}{6}, & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

و

$$B = A - \lambda_1 v^{(1)} x^t = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

وبحذف الصف الأول والعمود الأول نحصل على

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

الذي له قيم مميزة $\lambda_2 = 3$ و $\lambda_3 = 1$، وإن المتجه المميز $w^{(2)'}$ يمكن إيجاده من خلال حلِّ النظام الخطي $(B' - 3I)w^{(2)'} = 0$ ليعطينا $w^{(2)'} = (1, -1)^t$.

وبإضافــة صفر إلى المركبــة الأولى نحصل على $w^{(2)} = (0, 1, -1)^t$، ومن المعادلــة (5.9) لدينا المتجه المميز $v^{(2)}$ للمصفوفة A المقترن بـ $x_2 = 3$ وهو

$$v^{(2)} = (3-6)(0, 1, -1)^t + 6\left[\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}\right)(0, 1, -1)^t\right](1, -1, 1)^t = (-2, -1, 1)^t$$ ■

وعلــى الرغــم من أن عملية الانكماش هذه يمكن اســتخدامها في إيجاد تقريبات للقيم جميعها والمتجهات المميزة للمصفوفة، فإن العملية معرضة لخطأ تقريب. وبعد استخدام الانكماش لتقريب قيمة مميزة لمصفوفة، فإن التقريب يجب استخدامه بمنزلة قيمة البداية لطريقة القوة المعكوسة التي طبّقت على المصفوفة الأصلية. وهذا ســوف يضمن تقارب القيمة المميزة للمصفوفة الأصلية، وليس للمصفوفــة التي صُغّرت والتي غالبًا ما تتضمَّن أخطاءً. وعندما تكون القيم المميزة جميعها لمصفوفة ما مطلوبة، فإنه يمكن استخدام الأساليب المبينة في الفصل (4.9) المستندة إلى تحويلات التشابه.

نغلق هذا الفصل في الخوارزمية (4.9) التي تحســب ثاني قيمة مميزة مهيمنة لمصفوفة والمتجه المميز المقترن بها، بعدما حدّدت القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقابل لها.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.9

انكماش وايلنت Wielantdt Deflaion

لتقريب ثاني قيمة مميزة مهيمنة والمتجه المميز المقابل لها لمصفوفة A بحجم $n \times n$، بوجود التقريب λ للقيمة المميزة المهيمنة، والتقريب $\mathbf{v}$ للمتجه المميز المقابل لها، ومتجه $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$:

المدخلات: البعد n، مصفوفة A، قيمة تقريبية للقيمة المميزة λ مع متجه مميز $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$، متجه $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$، حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرارات N.

المخرجات: تقريب القيمة المميزة μ، تقريب المتجه المميز $\mathbf{u}$ أو عبارة تفيد بأن الطريقة فاشلة.

الخطوة	المضمون
1	ليكن i أصغر عدد صحيح مع $1 \le i \le n$ و $\lvert v_i \rvert = \max_{1 \le j \le n} \lvert v_j \rvert$.
2	إذا كان $i \neq 1$، لكل $k = 1, \ldots, i-1$ ولكل $j = 1, \ldots, i-1$ فضع $b_{kj} = a_{kj} - \dfrac{v_k}{v_i} a_{ij}$.
3	إذا كان $i \neq 1$ و $i \neq n$ لكل $k = i, \ldots, n-1$ ولكل $j = 1, \ldots, i-1$ فضع $b_{kj} = a_{k+1,j} - \dfrac{v_{k+1}}{v_i} a_{ij}$ $b_{jk} = a_{j,k+1} - \dfrac{v_j}{v_i} a_{i,k+1}$
4	إذا كان $i \neq n$ لكل $k = i, \ldots, n-1$ ولكل $j = i, \ldots, n-1$ فضع $b_{kj} = a_{k+1,j+1} - \dfrac{v_{k+1}}{v_i} a_{i,j+1}$.
5	نفِّذ طريقة القوة على المصفوفة $B' = (b_{kj})$ بحجم $(n-1) \times (n-1)$ مع كون $\mathbf{x}$ تقريبًا ابتدائيًا.
6	إذا ما فشلت الطريقة فإن المخرجات (الطريقة فشلت). توقف. ما عدا ذلك، لتكن μ القيمة المميزة التقريبية و $\mathbf{w}' = (w'_1, \ldots, w'_{n-1})^t$ المتجه المميز التقريبي.
7	إذا كان $i \neq 1$ لكل $k = 1, \ldots, i-1$ فضع $w_k = w'_k$
8	ضع $w_i = 0$.
9	إذا كان $i \neq n$ ، لكل $k = i+1, \ldots, n$ فضع $w_k = w'_{k-1}$
10	لكل $k = 1, \ldots, n$ ضع $u_k = (\mu - \lambda) w_k + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \right) \dfrac{v_k}{v_i}$ (احسب المتجه المميز مستخدمًا المعادلة 5.9).
11	المخرجات $(\mu, \mathbf{u})$ (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

EXERCISE SET مجموعة التمارين 2.9

1. أوجد أول ثلاث تكرارات نتيجة تطبيق طريقة القوة على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$

ب. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 2, 1)^t$

د. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -2, 0, 3)^t$

2. أوجد أول ثلاث تكرارات نتيجة تطبيق طريقة القوة على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 1)^t$

ب. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, 1)^t$

ج. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, -3)^t$

د. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 1)^t$

3. كرِّر التمرين (1) مستخدمًا طريقة معكوس القوة.

4. كرِّر التمرين (2) مستخدمًا طريقة معكوس القوة.

5. أوجد أول ثلاث تكرارات نتيجة تطبيق طريقة القوة المتماثلة على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$

ب. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$

ج. $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^t$

د. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0, 0)^t$

6. أوجد أول ثلاث تكرارات نتيجة تطبيق طريقة القوة المتماثلة على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$

ب. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^t$

د. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, -3)^t$

7. استخدم طريقة القوة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (1). استمر بالتكرار حتى تحقق حد السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

8. استخدم طريقة القوة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (2). استمر بالتكرار حتى تحقق حد السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

9. استخدم طريقة معكوس القوة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (1). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

10. استخدم طريقة معكوس القوة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (2). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

11. استخدم طريقة القوة المتماثلة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (5). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

12. استخدم طريقة القوة المتماثلة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (6). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

13. استخدم طريقة انكماش وايلندت لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (7). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

14. استخدم طريقة انكماش وايلندت لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (8). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

15. كرِّر التمرين (7) مستخدمًا أسلوب Aitken's Δ^2 وطريقة القوة للقيمة المميزة المهيمنة.

16. كرِّر التمرين (8) مستخدمًا أسلوب Aitken's Δ^2 وطريقة القوة للقيمة المميزة المهيمنة.

17. انكماش هوتلنك Hotelling Deflation . افترض أنه قد وُجدت أكبر قيمة مميزة λ_1 والمتجه المميز $\mathbf{v}^{(1)}$ المقابل لها لمصفوفة متماثلة A بحجم $n \times n$. أثبت أن للمصفوفة

$$B = A - \frac{\lambda_1}{(\mathbf{v}^{(1)})^t \mathbf{v}^{(1)}} \mathbf{v}^{(1)} (\mathbf{v}^{(1)})^t$$

القيم المميزة نفسها $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ لـ A، إلا أن لـ B قيمة مميزة 0 مع متجه مميز $\mathbf{v}^{(1)}$ بدلاً من متجه مميز λ_1. استخدم طريقة الانكماش هذه لإيجاد λ_2 لكل مصفوفة في التمرين (5). ويمكن لهذه الطريقة أن تستمر نظريًّا لإيجاد قيم مميزة أخرى، لكن خطأ تقريب سرعان ما يجعل هذا الجهد عديم الفائدة.

18. أسلوب أنهيليشن Annihilation Technique. افترض أن المصفوفة A، بحجم $n \times n$ لها قيم مميزة $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ رتبة كما يلي:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

مع متجهات مميزة مستقلة خطيًّا $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$.

أ. أثبت أنه عند تطبيق طريقة القوة بمتجه ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$ معطى من خلال

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta_2\mathbf{v}^{(2)} + \beta_3\mathbf{v}^{(3)} + \cdots + \beta_n\mathbf{v}^{(n)}$$

فإن المتتالية $\{\mu^{(m)}\}$ الموضحة في الخوارزمية (1.9) ستتقارب إلى λ_2.

ب. أثبت أنه لأي متجه $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{v}^{(i)}$، فإن المتجه $\mathrm{x}^{(0)} = (A - \lambda_1 I)\mathrm{x}$ يحقِّق الخاصية المعطاة في الفقرة (أ).

ج. أوجد تقريبًا إلى λ_2 للمصفوفات في التمرين (1).

د. أثبت أن هذه الطريقة يمكن استمرارها لإيجاد λ_3 مستخدمين $\mathrm{x}^{(0)} = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)\mathrm{x}$.

19. باتباع منهجية التمرين (11) في الفصل (3.6) والتمرين (15) في الفصل (2.7)، افترض أن لنوع من الخنافس دورة حياة مدتها 4 سنوات، وأن للأنثى معدل بقاء قدره $\frac{1}{2}$ في سنتها الأولى، و$\frac{1}{4}$ في سنتها الثانية، و$\frac{1}{8}$ في سنتها الثالثة، وافترض بالإضافة إلى ذلك أن الأنثى تلد في المعدل أنثيين في السنة الثالثة و4 إناث في السنة الرابعة. وتوضح المصفوفة A مساهمة أنثى واحدة لسنة واحدة في مجتمع الإناث في السنة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

إذ يمثِّل العنصر في الصف i والعمود j المساهمة المحتملة مرة أخرى لأنثى بالعمر j في مجتمع الإناث للسنة التالية بالعمر: j

أ. استخدم مبرهنة دائرة جبركجورن Geršgorin Circle Theorem لتحديد منطقة ضمن المستوى المركب، بحيث تتضمن القيم المميزة جميعها لـِ A.

ب. استخدم طريقة القوة لتحديد القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقابل لها.

ج. استخدم الخوارزمية (4.9) لتحديد أي قيم مميزة متبقية ومتجهاتها المميزة للمصفوفة A.

د. أوجد القيم المميزة لـِ A باستخدام كثيرة حدود الخاصية لـِ A وطريقة نيوتن.

هـ. ما تقديرك على المدى البعيد لمجتمع هذه الخنافس؟

20. أثبت أن الصف i لـِ $B = A - \lambda_1 \mathrm{v}^{(1)}\mathrm{x}^t$ هو صفر، حيث λ_1 أكبر قيمة مميزة لـِ A، وأن $\mathrm{v}^{(1)}$ هو المتجه المميز المقابل لها، وx عبارة عن المتجه المعرف بالمعادلة (6.9).

21. المصفوفة الثلاثية الأقطار $(m-1)\times(m-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix}$$

مشاركة في طريقة الفرق الرجعي لحل معادلة الحرارة. (انظر الفصل 2.12) ولاستقرار الطريقة فإننا نحتاج إلى $\rho(A^{-1}) < 1$. ومع $m = 11$، قرّب $\rho(A^{-1})$ لكل مما يلي:

أ. $\alpha = \frac{1}{4}$ ب. $\alpha = \frac{1}{2}$ ج. $\alpha = \frac{3}{4}$

متى تكون الطريقة مستقرة؟

22.القيم المميزة للمصفوفة A في التمرين (21) هي

$$\lambda_i = 1 + 4\alpha\left(\sin\frac{\pi i}{2m}\right)^2 \quad \text{لكل} \quad i = 1,\ldots,\ m-1$$

قارن التقريب في التمرين (21) بالقيمة الحقيقية لـ $\rho(A^{-1})$. ومرة أخرى متى تكون الطريقة مستقرة؟

23.المصفوفتان $(m-1)\times(m-1)$ A وB حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

مشاركتان في طريقة Crank–Nicolson لحلّ معادلة الحرارة. (انظر الفصل 2.12) مع $m = 11$، قرّب $\rho(A^{-1}B)$ لكل مما يلي:

أ. $\alpha = \frac{1}{4}$ ب. $\alpha = \frac{1}{2}$ ج. $\alpha = \frac{3}{4}$

24. من الممكن تمثيل نظام ديناميكي خطي بالمعادلة

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = A(t)\mathrm{x}(t) + B(t)\mathrm{u}(t), \quad \mathrm{y}(t) = C(t)\mathrm{x}(t) + D(t)\mathrm{u}(t)$$

حيث إن A، B، C وD عبارة عن مصفوفات متغيرة بحجم $n \times n$، $n \times r$، $m \times n$ و $m \times r$ على التوالي، وإن كلًّا من x، y و u عبارة عن متغيرات متجه بأبعاد n، m وr على التوالي. ولكي يكون النظام مستقرًّا، يجب أن تكون للقيم المميزة جميعها للمصفوفة A مع جزء حقيقي غير موجب لجميع قيم t. فهل النظام مستقر إذا كان

أ. $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2.5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ ب. $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

3.9 طريقة هاوسهولدر House Holder's Method

ألستون هاوس هولدر
(1904-1993)
Alston Householder
عمل بحثا في علوم الحياة الرياضية قبل أن يصبح مديرا لمختبر أوك ردج الوطني Oak Ridge National Laboratory في ولاية تنيسي عام 1948. وقد تم تطوير هذه الطرائق في الأعوام 1950s عندما بدأ العمل في حل النظم الخطية.

سنستخدم في الفصل (4.9) طريقة QR لتقليص مصفوفة ثلاثية الأقطار مماثلة لمصفوفة تكون قطرية تقريبًا. إن العناصر القطرية للمصفوفة المتقلصة عبارة عن تقريبات للقيم المميزة لتلك المصفوفة. وسنعرض في هذا الفصل طريقة ابتكرها Alston Householder لتقليص مصفوفة معينة لمصفوفة مماثلة ثلاثية الأقطار. ومع الربط بين المسائل التي نحلُّها ضمن هذين الفصلين بوضوح، فإن لطريقة Householder تطبيقات واسعة في غير مجالات تقريب القيم المميزة .

تستخدم طريقة Householder في إيجاد مصفوفة ثلاثية الأقطار متماثلة B تكون مماثلة لمصفوفة معلومة A.تؤدي مبرهنة (10.9) إلى أن A مماثلة لمصفوفة قطرية D نظرًا لوجود مصفوفة متعامدة

Q بالخاصية $D = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$. ولأن المصفوفة Q (وD أيضًا) صعبة الحساب عمومًا؛ فإن طريقة هاوسهولدر Householder توفِّر حلًّا وسطًا. وبعد تنفيذ طريقة هاوسهولدر Householder، يمكن استخدام طرائق فاعلة مثل خوارزمية QR في تقريب دقيق للقيم المميزة للمصفوفة ثلاثية الأقطار المتماثلة الناتجة.

تعريف 16.9 ليكن $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ مع $\mathrm{w}^t\mathrm{w} = 1$. وتسمى المصفوفة $n \times n$

$$P = I - 2\mathrm{ww}^t$$

تحويل هاوسهولدر Householder transformation. ■

إن تحويلات هاوسهولدر Householder تستخدم استبعاد الخلايا الصفرية اختياريًّا selectively zero out blocks للعناصر في متجهات أو أعمدة مصفوفات بحيث تكون مستقرة معها بحدٍّ أقصى بالنسبة إلى خطأ تقريب.(انظر [Wil2, pp. 152–162] لمزيد من النقاش). وإن خصائص تحويلات هاوسهولدر Householder موضحة في مبرهنة الآتية:

مبرهنة 17.9 إن تحويل هاوسهولدر Householder، $P = I - 2\mathrm{ww}^t$، يكون متماثلًا ومتعامدًا، ولذلك فإن $P^{-1} = P$. ■

البرهان بما أن

$$(\mathrm{ww}^t)^t = (\mathrm{w}^t)^t\mathrm{w}^t = \mathrm{ww}^t$$

يكون لدينا

$$P^t = (I - 2\mathrm{ww}^t)^t = I - 2\mathrm{ww}^t = P$$

وبالإضافة إلى ذلك بما أن $\mathrm{w}^t\mathrm{w} = 1$، فإن

$$PP^t = (I - 2\mathrm{ww}^t)(I - 2\mathrm{ww}^t) = I - 2\mathrm{ww}^t - 2\mathrm{ww}^t + 4\mathrm{ww}^t\mathrm{ww}^t$$
$$= I - 4\mathrm{ww}^t + 4\mathrm{ww}^t = I$$

ولذلك فإن

$$P^{-1} = P^t = P$$ ■ ■ ■

إن طريقة هاوسهولدر Householder تبدأ بتحديد تحويل $P^{(1)}$ مع خاصية كون $A^{(2)} = P^{(1)}AP^{(1)}$ لها

$$a_{j1}^{(2)} = 0 \quad \text{لكل} \quad j = 3, 4, \ldots, n \tag{7.9}$$

ومن خلال التماثل فإن $a_{1j}^{(2)} = 0$.

يُختار المتجه $w_1, w_2, \ldots, w_n$ بحيث $\mathrm{w}^t\mathrm{w} = 1$. وإن المعادلة (7.9) متحققة. وفي المصفوفة

$$A^{(2)} = P^{(1)}AP^{(1)} = (I - 2\mathrm{ww}^t)A(I - 2\mathrm{ww}^t)$$

لدينا $a_{11}^{(2)} = a_{11}$ و $a_{j1}^{(2)} = 0$ لكل $j = 3, 4, \ldots, n$. ويفترض هذا الاختيار n من الشروط

على n من المجاهيل $w_1, w_2, \ldots, w_n$ إن وضع $w_1 = 0$ يضمن أن $a_{11}^{(2)} = a_{11}$. ونحن نريد من

$$P^{(1)} = I - 2ww^t$$

أن تحقق

$$P^{(1)}(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1})^t = (a_{11}, \alpha, 0, \ldots, 0)^t \tag{8.9}$$

حيث ستُختار α لاحقًا. ولتبسيط الصيغة، ليكن

$$\hat{\mathbf{w}} = (w_2, w_3, \ldots, w_n)^t \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \hat{\mathbf{y}} = (a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1})^t \in \mathbb{R}^{n-1}$$

وإن $\hat{P}$ هي $(n-1) \times (n-1)$ تحويل Householder $\hat{P} = I_{n-1} - 2\hat{w}\hat{w}^t$.

إذن تصبح المعادلة (8.9)

$$P^{(1)} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \hline \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \hline \hat{P}\hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \hline \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

مع

$$\hat{P}\hat{\mathbf{y}} = (I_{n-1} - 2\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}^t)\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} - 2(\hat{\mathbf{w}}^t\hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{w}} = (\alpha, 0, \ldots, 0)^t \tag{9.9}$$

ليكن $r = \hat{w}^t\hat{y}$. لذا فإن

$$(\alpha, 0, \ldots, 0)^t = (a_{21} - 2rw_2, a_{31} - 2rw_3, \ldots, a_{n1} - 2rw_n)^t$$

ويمكننا تحديد القيم w_i جميعها حال معرفتنا لقيم α و r. وإن مكوّنات المعادلة تعطي

$$(\alpha, 0, \ldots, 0)^t = (a_{21} - 2rw_2, a_{31} - 2rw_3, \ldots, a_{n1} - 2rw_n)^t$$

ولذلك فإن

$$2rw_2 = a_{21} - \alpha \tag{10.9}$$

و

$$2rw_j = a_{j1} \quad \text{لكل} \quad j = 3, \ldots, n \tag{11.9}$$

وبتربيع جهتي كل من المعادلتين وجمعهما نحصل على

$$4r^2 \sum_{j=2}^{n} w_j^2 = (a_{21} - \alpha)^2 + \sum_{j=3}^{n} a_{j1}^2$$

وبما أن $\mathbf{w}^t\mathbf{w} = 1$ و $w_1 = 0$، يكون لدينا $\sum_{j=2}^{n} w_j^2 = 1$

و

$$4r^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 - 2\alpha a_{21} + \alpha^2 \tag{12.9}$$

من خلال المعادلة (9.9)، وحقيقة كون P متعامدة نحصل على

$$\alpha^2 = (\alpha, 0, \ldots, 0)(\alpha, 0, \ldots, 0)^t = (\hat{P}\hat{\mathbf{y}})^t \hat{P}\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}^t \hat{P}^t \hat{P}\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}^t \hat{\mathbf{y}}$$

ومن ثم فإن

$$\alpha^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2$$

التي عند تعويضها في المعادلة (12.9) تعطي

$$2r^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 - \alpha a_{21}$$

ولكي نضمن أن $2r^2 = 0$ فقط عندما $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$، فإننا نختار

$$\alpha = -\operatorname{sgn}(a_{21}) \left(\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 \right)^{1/2}$$

الذي يؤدي إلى أن

$$2r^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 + |a_{21}| \left(\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 \right)^{1/2}$$

ومع هذا الاختيار لـِ α و $2r^2$، نحل المعادلتين (10.9) و (11.9) لنحصل على

$w_2 = \dfrac{a_{21} - \alpha}{2r}$ و $w_j = \dfrac{a_{j1}}{2r}$ لكل $j = 3, \ldots, n$

ولتلخيص اختيار $P^{(1)}$، فإنه لدينا

$$\alpha = -\operatorname{sgn}(a_{21}) \left(\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 \right)^{1/2}$$

$$r = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}a_{21}\alpha \right)^{1/2}$$

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r}$$

و

$$w_j = \frac{a_{j1}}{2r}$$

لكل $j = 3, \ldots, n$.

ومع هذا الاختيار فإن

$$A^{(2)} = P^{(1)} A P^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

وبعد إيجاد $P^{(1)}$ وحساب $A^{(2)}$، تُعاد العملية عند $k = 2, 3, \ldots, n-2$ كما يلي:

$$\alpha = -\text{sgn}(a_{k+1,k}^{(k)}) \left(\sum_{j=k+1}^{n} (a_{jk}^{(k)})^2 \right)^{1/2}$$

$$r = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha a_{k+1,k}^{(k)} \right)^{1/2}$$

$$w_1^{(k)} = w_2^{(k)} = \ldots = w_k^{(k)} = 0$$

$$w_{k+1}^{(k)} = \frac{a_{k+1,k}^{(k)} - \alpha}{2r}$$

$$w_j^{(k)} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{2r} \quad \text{لكل} \quad j = k+2, k+3, \ldots, n$$

$$P^{(k)} = I - 2\mathbf{w}^{(k)} \cdot (\mathbf{w}^{(k)})^t$$

و

$$A^{(k+1)} = P^{(k)} A^{(k)} P^{(k)}$$

حيث

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k+1)} & a_{12}^{(k+1)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21}^{(k+1)} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & a_{k+1,k}^{(k+1)} & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & a_{k+1,k+2}^{(k+1)} \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

وباستمرار هذا النمط، تُصاغ المصفوفة ثلاثية الأقطار المتماثلة $A^{(n-1)}$، حيث

$$A^{(n-1)} = P^{(n-2)} P^{(n-3)} \cdots P^{(1)} A P^{(1)} \cdots P^{(n-3)} P^{(n-2)}$$

مثال 1 المصفوفة 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

متماثلة. وأول تطبيق لتحويل Householder هو

$$\alpha = -(1) \left(\sum_{j=2}^{4} a_{j1}^2 \right)^{1/2} = -3, \; r = \left(\frac{1}{2}(-3)^2 - \frac{1}{2}(1)(-3) \right)^{1/2} = \sqrt{6}$$

$$w = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (0, 2, -1, 1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{10}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

باستمرار التكرار الثانية

$$\alpha = -\frac{5}{3}, \quad r = \frac{2\sqrt{5}}{3}, \quad w = \left(0, 0, 2\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^t, \quad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

وإن المصفوفة ثلاثية الأقطار المتماثلة هي

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{33}{25} & \frac{68}{75} \\ 0 & 0 & \frac{68}{75} & \frac{149}{75} \end{bmatrix}$$

تنفّذ الخوارزمية (5.9) طريقة Householder كما هي موضحة هنا على الرغم من الالتفاف على عمليات ضرب المصفوفة.

ALGORITHM
الخوارزمية
5.9

هاوسهولدر Householder's

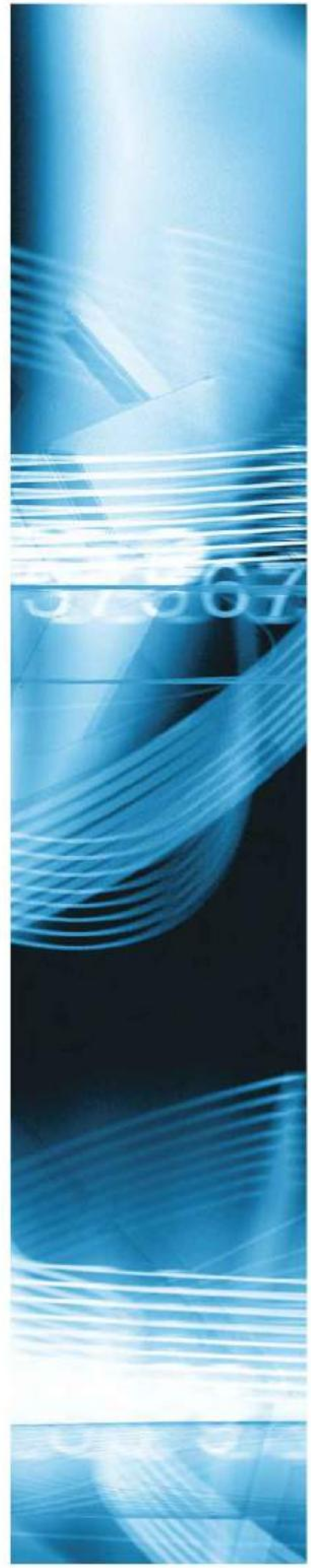
لإيجاد مصفوفة ثلاثية الأقطار متماثلة $A^{(n-1)}$ ومماثلة للمصفوفة المتماثلة $A = A^{(1)}$، نبني المصفوفات $A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots, A^{(n-1)}$ الآتية، حيث $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ لكل $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

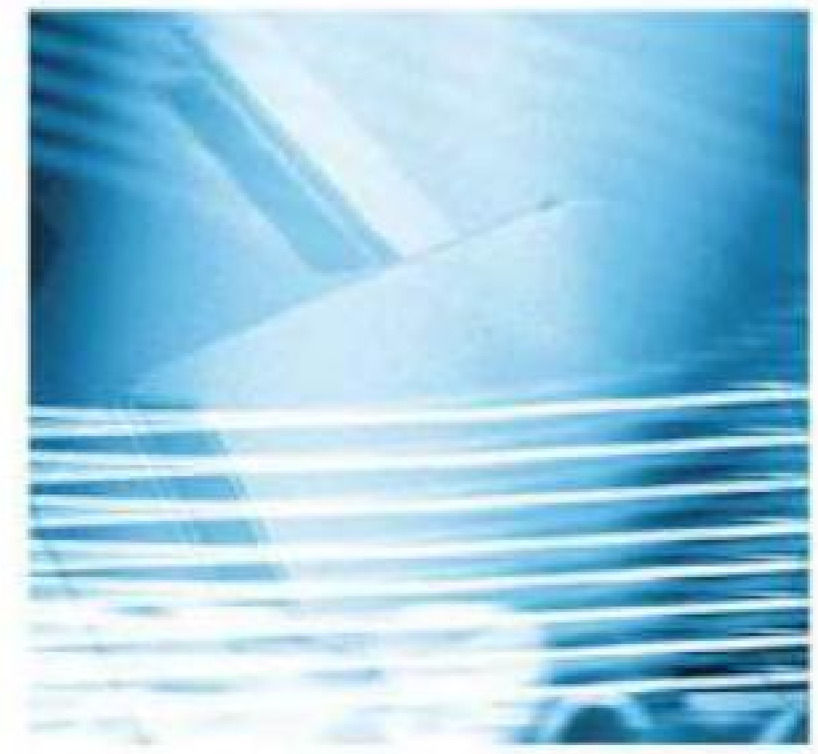
المدخلات: البعد n، مصفوفة A.

المخرجات: $A^{(n-1)}$ (يمكن إعادة كتابة A في كل خطوة).

الخطوة	المضمون
1	لكل $k = 1, 2, \ldots, n-2$، نفذ الخطوات 2 - 14.

2	ضع $q = \sum_{j=k+1}^{n} \left(a_{jk}^{(k)}\right)^2$
3	إذا كان $a_{k+1,k}^{(k)} = 0$ فضع $\alpha = -q^{1/2}$ ما عدا ذلك فضع $\alpha = -\frac{q^{1/2} a_{k+1,k}^{(k)}}{\lvert a_{k+1,k}^{(k)}\rvert}$
4	ضع $RSQ = \alpha^2 - \alpha a_{k+1,k}^{(k)}$. (إرشاد: $RSQ = 2r^2$)
5	ضع $v_k = 0$. (إرشاد: $v_1 = \cdots = v_{k-1} = 0$ ولكن لا حاجة إليه). $v_{k+1} = a_{k+1,k}^{(k)} - \alpha$ ولكل $j = k+2,\ldots,n$ ، ضع $v_j = a_{jk}^{(k)}$ (إرشاد: $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2RSQ}}\right)\mathbf{v} = \frac{1}{2r}\mathbf{v}$)
6	لكل $j = k, k+1, \ldots, n$، ضع $u_j = \left(\frac{1}{RSQ}\right)\sum_{i=k+1}^{n} a_{ji}^{(k)} v_i$ (إرشاد: $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{RSQ}\right)A^{(k)}\mathbf{v} = \frac{1}{2r^2}A^{(k)}\mathbf{v} = \frac{1}{r}A^{(k)}\mathbf{w}$)
7	ضع $PROD = \sum_{i=k+1}^{n} v_i u_i$ (إرشاد: $PROD = \mathbf{v}^t\mathbf{u} = \frac{1}{2r^2}\mathbf{v}^t A^{(k)}\mathbf{v}$)
8	لكل $j = k, k+1,\ldots,n$ ، ضع $z_j = u_j - \left(\frac{PROD}{2RSQ}\right)v_j$ (إرشاد: $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \frac{1}{2RSQ}\mathbf{v}^t\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{1}{4r^2}\mathbf{v}^t\mathbf{u}\mathbf{v}$ $= \mathbf{u} - \mathbf{w}\mathbf{w}^t\mathbf{u} = \frac{1}{r}A^{(k)}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{w}^t\frac{1}{r}A^{(k)}\mathbf{w}$)
9	لكل $l = k+1, k+2, \ldots, n-1$ ، نفّذ الخطوتين 10 و 11. (إرشاد: احسب $A^{(k+1)} = A^{(k)} - \mathbf{v}\mathbf{z}^t - \mathbf{z}\mathbf{v}^t = (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t)A^{(k)}(I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t)$)
10	لكل $j = l+1,\ldots,n$، ضع $a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} - v_l z_j - v_j z_l$ $a_{lj}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k+1)}$
11	ضع $a_{ll}^{(k+1)} = a_{ll}^{(k)} - 2v_l z_l$
12	ضع $a_{nn}^{(k+1)} = a_{nn}^{(k)} - 2v_n z_n$





13	لكل n ، $j = k+2, \ldots, n$ ضع $a_{kj}^{(k+1)} = a_{jk}^{(k+1)} = 0$
14	ضع $a_{k+1,k}^{(k+1)} = a_{k+1,k}^{(k)} - v_{k+1}z_k$ $a_{k,k+1}^{(k+1)} = a_{k+1,k}^{(k+1)}$ (إرشاد: العناصر الأخرى لـ $A^{(k+1)}$ هي نفسها التي لـ $A^{(k)}$).
15	المخرجات ($A^{(n-1)}$) (لقد استكملت العملية. $A^{(n-1)}$ متماثلة، ثلاثية الأقطار، ومماثلة لـ A). توقف.

■

ولتطبيق خوارزمية Householder لمصفوفة $n \times n$ معينة؛ يجب عمل التعديلات الآتية للأخذ في الحسبان إمكانية عدم التماثل.

الخطوة	التعديل
6	لكل n ، $j = 1, 2, \ldots, n$ ضع $u_j = \frac{1}{RSQ} \sum_{i=k+1}^{n} a_{ji}^{(k)} v_i$ $y_j = \frac{1}{RSQ} \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij}^{(k)} v_i$
8	لكل n ، $j = 1, 2, \ldots, n$ فضع $z_j = u_j - \frac{PROD}{RSQ} v_j$
9	لكل n ، $l = k+1, k+2, \ldots, n$ نفّذ الخطوتين 10 و11.
10	لكل k ، $j = 1, 2, \ldots, k$ ضع $a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} - z_j v_l$ $a_{lj}^{(k+1)} = a_{lj}^{(k)} - y_j v_l$
11	لكل n ، $j = k+1, \ldots, n$ ضع $a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} - z_j v_l - y_l v_j$

وبعد تعديل هذه الخطوات، احذف الخطوات (12 – 14) والمخرجات $A^{(n-1)}$.

لن تكون المصفوفة $A^{(n-1)}$ الناتجة ثلاثية الأقطار ما لم تكن المصفوفة الأصلية A متماثلة. وعلى أي حال فإن العناصر جميعها التي تقع تحت القطر الثانوي السفلي ستكون 0. إن مصفوفة من هذا النوع تسمى *upper Hessenberg*، بمعنى أن $H = (h_{ij})$ هي upper Hessenberg إذا كانت $h_{ij} = 0$ لـ $i \geq j + 2$ جميعها.

سنتحقق في الفصل الآتي من كيفية تطبيق خوارزمية QR لتحديد القيم المميزة لِـ $A^{(n-1)}$، التي هي نفسها لتلك التي للمصفوفة الأصلية A.

مجموعة التمارين 3.9 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة Householder's لوضع المصفوفات الآتية في صيغة ثلاثية الأقطار:

أ. $\begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

ب. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$

2. استخدم طريقة Householder لوضع المصفوفات الآتية في صيغة ثلاثية الأقطار:

أ. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 8 & 0.25 & 0.5 & 2 & -1 \\ 0.25 & -4 & 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0 & 5 & 0.75 & -1 \\ 2 & 1 & 0.75 & 5 & -0.5 \\ -1 & 2 & -1 & -0.5 & 6 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

3. عدّل خوارزمية Householder (5.9) لحساب المصفوفات upper Hessenberg المماثلة والمصفوفات غير المتماثلة الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

4.9 الخوارزمية QR — The QR Algorithm

إن طرائق الانكماش الموضحة في الفصل (2.9) ليست مناسبة عمومًا لحساب القيم المميزة جميعها لمصفوفة بسبب نمو خطأ تقريب. وسنعتمد في هذا الفصل خوارزمية QR بوصفها أسلوب تقليص المصفوفة وتحديد القيم المميزة جميعها لمصفوفة متماثلة في آنٍ واحد.

ولتطبيق طريقة QR؛ نبدأ بمصفوفة متماثلة بصيغة ثلاثية الأقطار، بمعنى أن العناصر غير الصفرية فقط في المصفوفة تقع على القطر الرئيس أو على الأقطار الفرعية مباشرةً فوق القطر الرئيس أو تحته. فإذا لم تكن هذه هي صيغة المصفوفة المتماثلة فإن الخطوة الأولى هي تطبيق طريقة Householder لحساب مصفوفة ثلاثية الأقطار متماثلة ومماثلة للمصفوفة المعطاة، وبنفس القيم المميزة.

وسنفترض في بقية هذا الفصل أن المصفوفة المتماثلة التي حُسِبت لها هذه القيم المميزة ثلاثية الأقطار. فإذا جعلنا A تمثّل مصفوفة من هذا النوع، يمكننا تبسيط الصيغة من خلال عنونة عناصر A كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix} \qquad (13.9)$$

فإذا كانت $b_2 = 0$ أو $b_n = 0$ فإن المصفوفة 1×1، $[a_1]$ أو $[a_n]$ تعطي قيمة مميزة a_1 أو a_n لـ A فورًا.

عندما تكون $b_j = 0$ عند بعض قيم j حيث $2 < j < n$، يمكن اختصار المسألة إلى مصفوفات أصغر بدلًا من A كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{j-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{j-1} & a_{j-1} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} a_j & b_{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{j+1} & a_{j+1} & b_{j+2} & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{j+2} & a_{j+2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix} \tag{14.9}$$

فإذا لم تكن أي من b_j صفرًا فإن طريقة QR تتقدم من خلال صياغة متتالية مصفوفات $A = A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$ كما يلي:

1. تُحلّل $A = A^{(1)}$ بوصفها حالة ضرب $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$، حيث إن $Q^{(1)}$ متعامدة و$R^{(1)}$ مثلث علوي.
2. $A^{(2)}$ معرفة بأنها $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}$.

تُحلّل $A^{(i)}$ بالتحديد بوصفها حالة ضرب $A^{(i)} = Q^{(i)}R^{(i)}$ لمصفوفة متعامدة $Q^{(i)}$ ومصفوفة مثلث علوي $R^{(i)}$. ومن ثم فإن $A^{(i+1)}$ تعرّف من خلال ضرب $R^{(i)}$ مع $Q^{(i)}$ في الاتجاه المعاكس $A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)}$. ولأن $Q^{(i)}$ متعامدة، فإن $R^{(i)} = Q^{(i)\prime}A^{(i)}$ و

$$A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)} = (Q^{(i)\prime}A^{(i)})Q^{(i)} = Q^{(i)\prime}A^{(i)}Q^{(i)} \tag{15.9}$$

ولذلك فإن $A^{(i+1)}$ متماثل مع القيم المميزة نفسها لـ $A^{(i)}$. ومن خلال أسلوب تعريف $R^{(i)}$ و $Q^{(i)}$، فإننا نضمن أيضًا كون $A^{(i+1)}$ ثلاثية الأقطار. مستمرين في الاستنتاج، فإن لـ $A^{(i+1)}$ القيم المميزة نفسها التي للمصفوفة الأصلية A، وتتجه $A^{(i+1)}$ لتكوّن مصفوفة قطرية بالقيم المميزة لـ A ضمن القطر.

ولتوضيح عملية إنشاء مصفوفتين تحليليتين $Q^{(i)}$ و $R^{(i)}$، فإننا نحتاج إلى تعبير "مصفوفة تدوير rotation matrix".

تعريف 18.9 تختلف مصفوفة تقريب rotation matrix P عن المصفوفة الحيادية ذات العناصر الأربعة غالبًا. هذه العناصر الأربعة تكون بالصيغة

$$p_{ii} = p_{jj} = \cos\theta \quad \text{و} \quad p_{ij} = -p_{ji} = \sin\theta$$

لقيمة ما θ و بعض $i \neq j$. ■

إذا كانت A عبارة عن مصفوفة تدوير 2×2

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

فإن A هي مصفوفة تدوير مع عقارب الساعة بزاوية θ.

ومن السهل إثبات (انظر التمرين 8) أنه لأي مصفوفة تدوير فإن المصفوفة AP تختلف عن A فقط في الأعمدة i و j، وأن المصفوفة PA تختلف عن A فقط في الصفوف i و j. وعند أي $i \neq j$ فإن الزاوية θ يمكن اختيارها بحيث يكون للضرب PA عنصر صفري لـ $(PA)_{ij}$. وبالإضافة إلى ذلك فإن كل مصفوفة تدوير P هي متعامدة لكون تعريف يؤدي إلى أن $PP^t = I$. إن عملية تحليل $A^{(1)}$ إلى $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$ تستخدم الضرب لـ $n-1$ من مصفوفات تقريب لإنشاء

$$R^{(1)} = P_n P_{n-1} \cdots P_2 A^{(1)}$$

نختار في البداية مصفوفة تقريب P_2 مع

$$p_{12} = -p_{21} = \sin\theta_2 \quad \text{و} \quad p_{11} = p_{22} = \cos\theta_2$$

حيث إن

$$\cos\theta_2 = \frac{a_1}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} \quad \text{و} \quad \sin\theta_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}}$$

ومن ثم فإن للمصفوفة

$$A_2^{(1)} = P_2 A^{(1)}$$

صفرًا في الموقع (2, 1)، أي في الصف الثاني والعمود الأول لكون العنصر (2, 1) في $A_2^{(1)}$ هو

$$(-\sin\theta_2)a_1 + (\cos\theta_2)b_2 = \frac{-b_2a_1}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} + \frac{a_1b_2}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} = 0$$

ولأن عملية الضرب $P_2A^{(1)}$ تؤثّر في كلا الصفين 1 و 2 لـ $A^{(1)}$، فإن المصفوفة الجديدة لا تحتفظ بالضرورة بعناصر صفرية في المواقع $(1, n)$, ... ,$(1, 4)$,$(1, 3)$. وعلى أي حال فإن $A^{(1)}$ ثلاثية الأقطار، وعليه فإن العناصر $(1, n)$, ... ,$(1, 4)$ لـ $A_2^{(1)}$ يجب أن تكون **0**. ويمكن للعنصر $(1, 3)$ فقط الذي في الصف الأول والعمود الثالث ألا يكون صفرًا.

وتُختار المصفوفة P_k عمومًا بحيث لا يكون العنصر $(k+1 \,,\, k-1)$ صفرًا. وصيغة المصفوفة $A_k^{(1)}$

$$A_k^{(1)} = \begin{bmatrix} z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & z_{k-1} & q_{k-1} & r_{k-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & x_k & y_k & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & b_{k+1} & a_{k+1} & b_{k+2} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

وصيغة P_{k+1}

$$
P_{k+1} = \left[\begin{array}{c|cc|c}
I_{k-1} & \multicolumn{2}{c|}{O} & O \\
\hline
 & c_{k+1} & s_{k+1} & \\
O & & & O \\
 & -s_{k+1} & c_{k+1} & \\
\hline
O & \multicolumn{2}{c|}{O} & I_{n-k-1}
\end{array}\right] \quad \leftarrow k \text{ الصف} \tag{16.9}
$$

$\uparrow$ العمود k

حيث يعبر O عن أن المصفوفة بأبعاد مناسبة مع عناصرها كلها أصفار.

يُختار الثابتان $c_{k+1} = \cos\theta_{k+1}$ و $s_{k+1} = \sin\theta_{k+1}$ في P_{k+1} بحيث يكون العنصر $(k+1 \;\; k)$ في $A_{k+1}^{(1)}$ صفرًا، بمعنى أن $s_{k+1}x_k - c_{k+1}b_{k+1} = 0$. ولأن $c_{k+1}^2 + s_{k+1}^2 = 1$؛ فإن حلَّ هذه المعادلة هو

$$
c_{k+1} = \frac{x_k}{\sqrt{b_{k+1}^2 + x_k^2}} \quad \text{و} \quad s_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{\sqrt{b_{k+1}^2 + x_k^2}}
$$

وإن صيغة $A_{k+1}^{(1)}$ هي

$$
A_k^{(1)} = \begin{bmatrix}
z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & 0 & z_k & q_k & r_k & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & 0 & x_{k+1} & y_{k+1} & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & b_{k+2} & a_{k+2} & b_{k+3} & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & b_n \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_n & a_n
\end{bmatrix}
$$

وبتقدم هذا الإنشاء في المتتالية $P_2, \ldots, P_n$ نحصل على المصفوفة القطرية العليا

$$
R^{(1)} \equiv A_n^{(1)} = \begin{bmatrix}
z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & r_{n-2} \\
\vdots & & & & z_{n-1} & q_{n-1} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x_n
\end{bmatrix}
$$

والنصف الآخر من عملية التحليل QR هو المصفوفة

$$
Q^{(1)} = P_2^t P_3^t \cdots P_n^t
$$

لأن تعامديةمصفوفات تقريب تؤدي إلى أن

$$
Q^{(1)} R^{(1)} = (P_2^t P_3^t \cdots P_n^t) \cdot (P_n \cdots P_3 P_2) A^{(1)} = A^{(1)}
$$

إن المصفوفة $Q^{(1)}$ متعامدة؛ لأن

$$(Q^{(1)})^t Q^{(1)} = (P_2^t P_3^t \cdots P_n^t)^t (P_2^t P_3^t \cdots P_n^t) = (P_n \cdots P_3 P_2) \cdot (P_2^t P_3^t \cdots P_n^t) = I$$

وبالإضافة إلى ذلك فإن $Q^{(1)}$ هي مصفوفة upper-Hessenberg. ولكي ترى لماذا يعدّ هذا صحيحًا؛ يمكنك متابعة الخطوات في التمرينين (9) و (10).

ونتيجة لذلك فإن $A^{(2)} = R^{(1)} Q^{(1)}$ هي مصفوفة upper-Hessenberg أيضًا؛ لأن عملية ضرب $Q^{(1)}$ من الجهة اليسرى في المصفوفة المثلثية العليا $R^{(1)}$ لا تؤثّر في عناصر المثلث السفلي. وهذا يؤدي إلى أن $A^{(2)}$ ثلاثية الأقطار في الحقيقة؛ لكوننا قد عرفنا أنها متماثلة.

إن العناصر اللاقطرية لـِ $A^{(2)}$ ستكون عمومًا أصغر قيمة من عناصر $A^{(1)}$ المقابلة لها، ولذلك فإن $A^{(2)}$ هي أقرب إلى أن تكون مصفوفة قطرية من $A^{(1)}$. كرر العملية لإنشاء $A^{(3)}, A^{(4)}, \ldots$.

إذا كان للقيم المميزة لـِ A قيم مختلفة مع $|\lambda_n| < \cdots < |\lambda_2| < |\lambda_1|$، فإن معدل تقارب العنصر $b_{j+1}^{(i+1)}$ إلى الصفر في المصفوفة $A^{(i+1)}$ يعتمد على النسبة $|\lambda_{j+1}/\lambda_j|$. (انظر [Fr]) إن معدل تقارب $b_{j+1}^{(i+1)}$ إلى الصفر يحدد المعدل الذي يتقارب معه العنصر $a_j^{(i+1)}$ للقيمة j المميزة λ_j. لذلك فإن معدل التقارب يمكن أن يكون بطيئًا إذا كان $|\lambda_{j+1}/\lambda_j|$ قريبًا من الباب.

ولتسريع هذا التقارب؛ فثمة أسلوب تنقل shifting technique مُطبّق مماثل لذلك الذي استُخدم مع طريقة عكس القوة في الفصل (2.9). يُختار الثابت σ قريبًا من قيمة مميزة لـِ A. وهذا من شأنه أن يعدل عملية التحليل في المعادلة (15.9) لاختيار $Q^{(i)}$ و$R^{(i)}$ بحيث تكون

$$A^{(i)} - \sigma I = Q^{(i)} R^{(i)} \tag{17.9}$$

ونتيجة لذلك، فإن المصفوفة $A^{(i+1)}$ تعرف لتكون

$$A^{(i+1)} = R^{(i)} Q^{(i)} + \sigma I \tag{18.9}$$

ومع هذا التعديل فإن معدل تقارب $b_{j+1}^{(i+1)}$ إلى الصفر يعتمد على النسب $|(\lambda_{j+1} - \sigma)/(\lambda_j - \sigma)|$. وهذا يمكن أن يؤدي إلى تطوير معنوي مقارنة بمعدل تقارب $a_j^{(i+1)}$ إلى λ_j، إذا ما كانت σ قريبة من λ_{j+1}، ولكنها ليست كذلك بالنسبة إلى λ_j.

نغير هنا σ عند كل خطوة بحيث عندما تكون لـِ A قيم مميزة مختلفة، فإن $b_n^{(i+1)}$ تتقارب إلى 0 أسرع من $b_j^{(i+1)}$ ولأي عدد صحيح j أصغر من n. وعندما تكون $b_n^{(i+1)}$ صغيرة بما يكفي، فإننا نفترض أن $\lambda_n \approx a_n^{(i+1)}$، نحذف السطر والعمود n للمصفوفة، ونتقدم بنفس المنهجية لإيجاد تقريب إلى λ_{n-1}. وتستمر العملية حتى يتحدد التقريب لكل قيمة مميزة.

إن أسلوب التنقل يُختار عند الخطوة i ثابت التنقل σ_i، حيث إن σ_i هي القيمة المميزة للمصفوفة

$$E^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{n-1}^{(i)} & b_n^{(i)} \\ b_n^{(i)} & a_n^{(i)} \end{bmatrix}$$

التي تكون أكثر قربًا إلى $a_n^{(i)}$. ويترجم هذا التنقل القيم المميزة لـِ A بالعامل σ_i. ومع أسلوب التنقل هذا، فإن التقارب يكون في العادة تكعيبيًّا. (انظر [WR, p. 270]) تتابع الطريقة هذه التنقلات حتى تكون $b_n^{(i+1)} \approx 0$، ومن ثم إضافة التنقلات إلى $a_n^{(i+1)}$ لتقريب القيمة المميزة λ_n. فإذا كان لـِ A قيم مميزة بنفس المقدار فإن $b_j^{(i+1)}$ قد يقترب إلى 0 لبعض $j \neq n$ بمعدل أسرع مما هو عليه $b_n^{(i+1)}$. وفي هذه الحالة فإن أسلوب فصل المصفوفة الموضح في المعادلة (14.9) يمكن تطبيقه لتقليص المسألة إلى أخرى تتضمن زوجًا من المصفوفات من الرتبة منخفضة.

مثال 1 لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 \\ b_2^{(1)} & a_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ 0 & b_3^{(1)} & a_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

إن إيجاد معلمة تسريع الانتقال يتطلب إيجاد القيم المميزة لـِ

$$\begin{bmatrix} a_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ b_3^{(1)} & a_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

التي هي $\mu_1 = 4$ و $\mu_2 = 2$. إن اختيار القيمة المميزة الأكثر قربًا إلى $a_3^{(1)} = 3$ هو عشوائي ونحن نختار $\mu_2 = 2$ وننتقل بهذا المقدار. لذا فإن $\sigma_1 = 2$ و

$$\begin{bmatrix} d_1 & b_2^{(1)} & 0 \\ b_2^{(1)} & d_2 & b_3^{(1)} \\ 0 & b_3^{(1)} & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وباستمرار العملية الحسابية نحصل على

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = \sqrt{2}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } q_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = 0, \quad r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومن ثم فإن

$$A_2^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وأبعد من ذلك، فإن

$$z_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad \sigma_3 = 1, \quad q_2 = 1, \quad x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومن ثم فإن

$$R^{(1)} = A_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

ولحساب $A^{(2)}$، لدينا

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_1^{(2)} = 2, \quad b_2^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_2^{(2)} = 1, \quad b_3^{(2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_3^{(2)} = 0$$

ومن ثم فإن

$$A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ولقد استكمل تكرارًا واحدًا لطريقة QR. وبما أن $b_2^{(2)} = \sqrt{2}/2$ و $b_3^{(2)} = -\sqrt{2}/2$ غير صغيرتين، فإن تكرارًا آخر لطريقة QR قد يُنفّذ. ونحسب في هذا التكرار القيم المميزة $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$ للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_2^{(2)} & b_3^{(2)} \\ b_3^{(2)} & a_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ونختار $\sigma_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ القيمة المميزة الأقرب إلى $a_3^{(2)} = 0$. ويعطينا استكمال العملية الحسابية

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.6720277 & 0.37597448 & 0 \\ 0.37597448 & 1.4736080 & 0.030396964 \\ 0 & 0.030396964 & -0.047559530 \end{bmatrix}$$

فإذا كانت $b_3^{(3)} = 0.030396964$ صغيرة بما يكفي فإن التقريب للقيمة المميزة λ_3 هو 1.5864151، والمجموع لـ$a_3^{(3)} = -0.047559530$، والانتقالات هي$\sigma_1 + \sigma_2 = 2 + (1 - \sqrt{3})/2$ وبحذف كل من الصف والعمود الثالث نحصل على

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.6720277 & 0.37597448 \\ 0.37597448 & 1.4736080 \end{bmatrix}$$

الذي له قيم مميزة $\mu_1 = 2.7802140$ و $\mu_2 = 1.3654218$. وبإضافة الانتقال نحصل على التقريبات

$$\lambda_1 \approx 4.4141886 \text{ و } \lambda_2 \approx 2.9993964$$

ولأن القيم المميزة الحقيقية للمصفوفة A هي 4.41420, 3.00000 و 1.58579، فإن طريقة QR قد أعطت أربع خانات معنوية دقيقة في إعادتين فقط.

تنفّذ الخوارزمية (6.9) طريقة QR.

ALGORITHM

الخوارزمية

6.9

طريقة QR

لإيجاد القيم المميزة لمصفوفة $n \times n$ ثلاثية الأقطار ومتماثلة

$$A \equiv A_1 = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ b_2^{(1)} & a_2^{(1)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n^{(1)} \\ 0 & \cdots & 0 & b_n^{(1)} & a_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

المدخلات: $n; a_1^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, b_2^{(1)}, \ldots, b_n^{(1)}$، حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرار M.

المخرجات: قيم مميزة لـA، أو توصية بتقسيم A، أو عبارة تفيد تجاوز أكبر عدد من التكرارات.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$ $SHIFT = 0$ (انتقال تجميعي)
2	ما دام $k \leq M$، فنفّذ الخطوات 3 – 19. (تختبر الخطوات 3 – 7 النجاح).
3	إذا كانت $\lvert b_n^{(k)} \rvert \leq TOL$ t فضع $\lambda = a_n^{(k)} + SHIFT$ المخرجات (λ) فضع $n = n - 1$
4	إذا كانت $\lvert b_2^{(k)} \rvert \leq TOL$ ضع $\lambda = a_1^{(k)} + SHIFT;$ المخرجات (λ) فضع $n = n - 1$ $a_1^{(k)} = a_2^{(k)}$ وعند $j = 2, \ldots, n$، ضع $a_j^{(k)} = a_{j+1}^{(k)}$ $b_j^{(k)} = b_{j+1}^{(k)}$
5	إذا كانت $n = 0$ فتوقف.
6	إذا كانت $n = 1$ فضع $\lambda = a_1^{(k)} + SHIFT$ المخرجات (λ) توقف.
7	عند $j = 3, \ldots, n - 1$، إذا كانت $\lvert b_j^{(k)} \rvert \leq TOL$ فإن المخرجات (قسِّم إلى $a_1^{(k)}, \ldots, a_{j-1}^{(k)}, b_2^{(k)}, \ldots, b_{j-1}^{(k)}$ و $a_j^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}, b_{j+1}^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)}, SHIFT$) توقف.
8	ضع $b = -(a_{n-1}^{(k)} + a_n^{(k)})$ (احسب انتقالاً). $c = a_n^{(k)} a_{n-1}^{(k)} - [b_n^{(k)}]^2$ $d = (b^2 - 4c)^{1/2}$
9	إذا كانت $b > 0$ فضع $\mu_1 = -2c/(b+d)$ $\mu_2 = -(b+d)/2$ وغير ذلك، ضع $\mu_1 = (d-b)/2$ $\mu_2 = 2c/(d-b)$



10	إذا كانت $n = 2$ ضع $\lambda_1 = \mu_1 + SHIFT$ $\lambda_2 = \mu_2 + SHIFT$ المخرجات (λ_1, λ_2) توقف.
11	اختر σ بحيث $\lvert\sigma - a_n^{(k)}\rvert = \min\{\lvert\mu_1 - a_n^{(k)}\rvert, \lvert\mu_2 - a_n^{(k)}\rvert\}$.
12	ضع $SHIFT = SHIFT + \sigma$ (تجميع الانتقال).
13	عند $j = 1, \ldots, n$، ضع $d_j = a_j^{(k)} - \sigma$ (نفّذ انتقالاً).
14	ضع $x_1 = d_1$. (تحسب الخطوتان 14 و 15 $R^{(k)}$.) $y_1 = b_2$
15	عند $j = 2, \ldots, n$، ضع $z_{j-1} = \left\{x_{j-1}^2 + \left[b_j^{(k)}\right]^2\right\}^{1/2}$ $c_j = \dfrac{x_{j-1}}{z_{j-1}}$ $\sigma_j = \dfrac{b_j^{(k)}}{z_{j-1}}$ $q_{j-1} = c_j y_{j-1} + s_j d_j$ $x_j = -\sigma_j y_{j-1} + c_j d_j$ فإذا كانت $j \neq n$ فضع $r_{j-1} = \sigma_j b_{j+1}^{(k)}$ $y_j = c_j b_{j+1}^{(k)}$ (حُسبت $A_j^{(k)} = P_j A_{j-1}^{(k)}$ توًا، و $R^{(k)} = A_n^{(k)}$.)
16	ضع $z_n = x_n$ (تحسب الخطوات 16 – 18 $A^{(k+1}$). $a_1^{(k+1)} = \sigma_2 q_1 + c_2 z_1$ $b_2^{(k+1)} = \sigma_2 z_2$
17	عند $j = 2, 3, \ldots, n-1$، ضع $a_j^{(k+1)} = \sigma_{j+1} q_j + c_j c_{j+1} z_j$ $b_{j+1}^{(k+1)} = \sigma_{j+1} z_{j+1}$
18	ضع $a_n^{(k+1)} = c_n z_n$
19	ضع $k = k + 1$
20	المخرجات (تم تجاوز أكبر عدد من التكرارات). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

بالإمكان استخدام عملية مماثلة لإيجاد التقريبات للقيم المميزة لمصفوفة $n \times n$ matrix غير متماثلة. حيث تتقلّص المصفوفة أولًا لمصفوفة upper-Hessenberg H مماثلة مستخدمين خوارزمية هاوسهولدر للمصفوفات غير المتماثلة.

تفترض عملية QR التحليلية الصيغة الآتية، أولاً

$$H \equiv H^{(1)} = Q^{(1)} R^{(1)} \qquad (19.9)$$

وبعد ذلك يُعرّف $H^{(2)}$ من خلال

$$H^{(2)} = R^{(1)} Q^{(1)} \qquad (20.9)$$

وتحليله إلى

$$H^{(2)} = Q^{(2)} R^{(2)} \qquad (21.9)$$

وتستمر طريقة التحليل في الاتجاه نفسه كما في خوارزمية QR. وتُختار المصفوفات بوضع أصفار لعناصر مناسبة للمصفوفة، وتُستخدم عملية انتقال شبيهة بتلك التي في طريقة QR. وعلى أي حال فإن الانتقال يكون أكثر تعقيدًا إلى حدٍّ ما بالنسبة إلى المصفوفات غير المتماثلة؛ لأنه قد تظهر قيم مميزة مركبة وبالقيمة نفسها. وإن عملية الانتقال تعدّل الحسابات في المعادلات (19.9)، (20.9) و (21.9) للحصول على طريقة QR مضاعفة

$H^{(1)} - \sigma_1 I = Q^{(1)} R^{(1)}$، $H^{(2)} = R^{(1)} Q^{(1)} + \sigma_1 I$، $H^{(2)} - 2I = Q^{(2)} R^{(2)}$ و $H^{(3)} = R^{(2)} Q^{(2)} + \sigma_2 I$

حيث إن σ_1 و σ_2 عبارة عن متقارنات مركبة، و $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots$ هي مصفوفات upper-Hessenberg حقيقية.

ويمكن إيجاد طريقة QR بشرح كامل في أعمال Wilkinson [Wil2]. وتوجد خوارزميات وبرامج مفصلة لهذه الطريقة، وأغلب الطرائق شائعة الاستخدام موجودة في [WR]. ونحن نوجِّه القارئ إلى هذه الأعمال فيما إذا لم تعطِ الطريقة التي نحن بصددها نتائج مرضية. ويمكن تطبيق طريقة QR بأسلوب ينتج متجهات مميزة وقيمًا مميزة لمصفوفة، ولكن الخوارزمية (6.9) لم تصمّم لتحقيق ذلك. فإذا وجدت حاجة إلى المتجهات المميزة لمصفوفة متماثلة وإلى القيم المميزة فإننا نقترح استخدام طريقة معكوس القوة بعد تطبيق الخوارزميتين (5.9) و(6.9) أو استخدام واحدة من أقوى الأساليب المذكورة في [WR].

مجموعة التمارين 4.9 EXERCISE SET

1. طبّق إعادتين لخوارزمية QR على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و. $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$

2.طبِّق إعادتين لخوارزمية QR على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3.استخدم الخوارزمية QR لتحديد – ضمن 10^{-5} – القيم المميزة جميعها للمصفوفات في التمرين (1).

4. استخدم الخوارزمية QR لتحديد – ضمن 10^{-5} – القيم المميزة جميعها للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. استخدم طريقة معكوس القوة لتحديد – ضمن 10^{-5} – المتجهات المميزة جميعها للمصفوفات في التمرين (1).

6. استخدم طريقة معكوس القوة لتحديد – ضمن 10^{-5} – المتجهات المميزة جميعها للمصفوفات في التمرين (2).

7. أ. أثبت أن مصفوفة تقريب

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

التي تطبّق على المتجه $\mathbf{x} = (x_1 \text{ و } x_2)^t$ لها أثر هندسي لتدوير x عبر الزاوية θ دون تغيير قيمتها بالنسبة إلى $\|\cdot\|_2$.

ب. أثبت أن قيمة x بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$ يمكن أن تتغير من خلال مصفوفة تقريب.

8. لتكن P مصفوفة تدوير مع $p_{ii} = p_{jj} = \cos\theta$ و $p_{ij} = -p_{ji} = \sin\theta$ لكل $j < i$. أثبت أنه لأي مصفوفة A بحجم $n \times n$

$$(AP)_{pq} = \begin{bmatrix} a_{pq} & \text{إذا كان} & q \neq i, j \\ (\cos\theta)a_{pj} + (\sin\theta)a_{pi} & \text{إذا كان} & q = j \\ (\cos\theta)a_{pi} - (\sin\theta)a_{pj} & \text{إذا كان} & q = i \end{bmatrix}$$

$$(PA)_{pq} = \begin{bmatrix} a_{pq} & \text{إذا كان} & p \neq i, j \\ (\cos\theta)a_{jq} - (\sin\theta)a_{iq} & \text{إذا كان} & p = j \\ (\sin\theta)a_{jq} + (\cos\theta)a_{iq} & \text{إذا كان} & p = i \end{bmatrix}$$

9. أثبت أن حاصل ضرب مصفوفة مثلثية عليا (من اليسار) في مصفوفة upper-Hessenberg ينتج مصفوفة upper-Hessenber.

10. لتمثل P_k مصفوفة تدوير بالصيغة المعطاة في المعادلة (16.9):

أ. أثبت أنه غالبًا ما تختلف $P_2^t P_3^t$ عن مصفوفة مثلثية عليا في الموقعين (2, 1) و (3, 2) فقط.

ب. افترض أنه غالبًا ما تختلف $P_2^t P_3^t \cdots P_k^t$ عن مصفوفة مثلثية عليا في المواقع $(2, 1), (3, 2), \ldots, (k, k-1)$ فقط. أثبت أنه غالبًا ما تختلف $P_2^t P_3^t \cdots P_k^t P_{k+1}^t$ عن مصفوفة مثلثية عليا فقط في المواقع $(2, 1), (3, 2), \ldots, (k, k-1), (k+1, k)$.

ج. أثبت أن المصفوفة $P_2^t P_3^t \cdots P_n^t$ هي upper Hessenberg.

11. تتضح طريقة جاكوبي Jacobi's method لمصفوفة متماثلة A عمومًا من خلال

$$A_1 = A \text{ ، } A_2 = P_1 A_1 P_1^t \text{ و } A_{i+1} = P_i A_i P_i^t$$

تتجه المصفوفة A_{i+1} إلى مصفوفة قطرية، إذ تُختار مصفوفة تدوير لتقليص عنصر لاقطري كبير في A_i. افترض أن $a_{j,k}$ و $a_{k,j}$ قد وُضِعا في اتجاه الصفر، حيث $j \neq k$. فإذا كان $a_{jj} \neq a_{kk}$ فإن

$$(P_i)_{jj} = (P_i)_{kk} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}}\right)}, \quad (P_i)_{kj} = \frac{c}{2(P_i)_{jj}\sqrt{c^2 + b^2}} = -(P_i)_{jk}$$

حيث إن

$$c = 2a_{jk}\operatorname{sgn}(a_{jj} - a_{kk}) \text{ و } b = |a_{jj} - a_{kk}|$$

أو إذا كان $a_{jj} = a_{kk}$ فإن

$$(P_i)_{jj} = (P_i)_{kk} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } (P_i)_{kj} = -(P_i)_{jk} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

طوّر خوارزمية لتنفيذ طريقة جاكوبي من خلال وضع $a_{21} = 0$، وبعد ذلك ضع

$$a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, \ldots, a_{n\,1}, \ldots, a_{n\,n-1}$$

لتكون بدورها صفرًا. ويُكرّر هذا حتى تُحسب المصفوفة A مع

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^{(k)}|$$

صغيرة بما يكفي. ويمكن تقريب القيم المميزة لـِ A من خلال العناصر القطرية لـِ A_k.

12. كرِّر التمرين (3) مستخدمًا طريقة جاكوبي.

13. في المثال الذي تصدر هذا الفصل، يجب حلُّ النظام الخطي $A\mathbf{w} = -0.04(\rho/p)\lambda\mathbf{w}$ بالنسبة إلى $\mathbf{w}$ و λ.

ولتقريب القيم المميزة λ_k لنظام **Sturm-Liouville**:

أ. أوجد القيم المميزة الأربع جميعها $\mu_1, \ldots, \mu_4$ للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ضمن 10^{-5}.

ب. قرِّب القيم المميزة $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ للنظام بدلالة ρ و p.

14. المصفوفة $(m-1) \times (m-1)$ ثلاثية الأقطار

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix}$$

داخلة ضمن طريقة الفرق الأمامي لحلِّ معادلة الحرارة. (انظر الفصل 2.12) ولاستقرار الطريقة فإننا نحتاج إلى $\rho(A) < 1$. ومع $m = 11$، قرب القيم المميزة لـِ A لكل مما يلي:

أ. $\alpha = \frac{1}{4}$ ب. $\alpha = \frac{1}{2}$ ج. $\alpha = \frac{3}{4}$

متى تكون الطريقة مستقرة؟

15. القيم المميزة للمصفوفة A في التمرين (14) هي

$$\lambda_i = 1 - 4\alpha \left(\sin \frac{\pi i}{2m}\right)^2 \quad \text{عند} \quad i = 1, \ldots, m-1$$

قارن التقريبات في التمرين (14) بالقيم المميزة الحقيقية. ومرة أخرى متى تكون الطريقة مستقرة؟

5.9 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Of Methods And Software

ناقشنا في هذا الباب تقريب القيم المميزة والمتجهات المميزة. وإن دوائر Geršgorin Circles تعطي تقريبًا خشنًا لموقع القيم المميزة لمصفوفة. ويمكن استخدام طريقة القوة لإيجاد القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقابل لها لمصفوفة A. فإذا كانت A متماثلة فإن طريقة القوة المتماثلة تعطي تقاربًا أسرع للقيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقابل لها. ستحدد طريقة القوة المتماثلة القيمة المميزة الأقرب إلى القيمة المعطاة والمتجه المميز المقابل لها. وتُستخدم هذه الطريقة غالبًا في تنقية تقريب القيمة المميزة التي وُجدت بأساليب أخرى.

تعطي طرائق الانكماش، مثل Wielandt deflation قيمًا مميزة أخرى في حال معرفة القيمة المميزة المهيمنة. وتُستخدم هذه الطرائق في حال كون المطلوب هو عددًا قليلًا فقط من القيم المميزة؛ لكونها معرضة لخطأ تقريب. ويجب استخدام طريقة معكوس القوة لتحسين دقة تقريب القيم المميزة المستخرجة بأسلوب الانكماش.

وتُستخدم الطرائق المستندة إلى تحويلات التشابه، مثل طريقة هاوسهولدر Householder في قلب المصفوفة المتماثلة إلى مصفوفة مماثلة ثلاثية الأقطار (أو إلى upper-Hessenberg إذا لم تكن المصفوفة متماثلة). ويمكن عندئذٍ تطبيق أساليب مثل طريقة QR على مصفوفة ثلاثية الأقطار (أو upper-Hessenberg) لإيجاد تقريبات للقيم المميزة جميعها. ويمكن إيجاد المتجهات المميزة المقابلة لها باستخدام طريقة التكرار، مثل طريقة معكوس القوة أو بتعديل طريقة QR لتتضمن تقريب المتجهات المميزة. لقد اقتصرت دراستنا على المصفوفات المتماثلة وعرضنا طريقة QR فقط عند حساب القيم المميزة لحالة التماثل.

وتستند البرمجيات في مكتبات IMSL و NAG إلى تلك التي ضمن الحزم EISPACK و LAPACK والتي نُوقِشت في الفصل (4.1). وتحوّل البرمجيات المصفوفة إلى صيغة مناسبة لطريقة QR أو أحد تعديلاتها مثل طريقة QL. وتقرب البرمجيات للقيم المميزة جميعها، ويمكنها تقريب المتجه المميز لكل قيمة مميزة. وهناك برمجيات خاصة لإيجاد للقيم المميزة جميعها ضمن فترة أو منطقة معينة أو هناك قيمة مميزة أكبر أو أصغر. والبرمجيات متاحة أيضًا لتحديد دقة تقريب القيمة المميزة وحساسية العملية تجاه خطأ تقريب.

إن برنامج LAPACK routine SGEBAL يهيئ مصفوفة غير متماثلة حقيقية A لعمليات أخرى. إنه يحاول استخدام مصفوفات التباديل لتحويل A إلى صيغة قاطع مثلثي علوي مماثل. وتُستخدم

تحويلات التشابه لموازنة الصفوف والأعمدة في معيار. ويمكن عندئذ استخدام البرنامج SGEHRD لقلب A إلى مصفوفة upper-Hessenberg مماثلة H. وتتقلص المصفوفة H بعدئذٍ عبر SHSEQR إلى صيغة Schur وهي STS^t، حيث S متعامدة ويتضمَّن قطر T القيم المميزة لِـ A. ويمكن عندئذٍ استخدام STREVC لإيجاد المتجهات المميزة المقابلة.

يستخدم البرنامج LAPACK routine SSYTRD لتقليص مصفوفة متماثلة حقيقية A لمصفوفة مثلثية مماثلة عبر طريقة هاوسهولدر Householder's .ويستخدم البرنامج SSTEQR خوارزمية QR المتنقلة ذاتيًا لإيجاد للقيم المميزة جميعها والمتجهات المميزة لِـ A.

تعطي البرمجية IMSL subroutine EVLRG القيم المميزة كلها لِـ A بترتيب متصاعد للقيم، وهذه البرمجية توازن أولًا المصفوفة A باستخدام نسخة معدلة من برنامج EISPACK routine BALANC بحيث تكون مجاميع قيم العناصر في كل صف وفي كل عمود متساوية تقريبًا، ويؤدي هذا إلى استقرار أكثر للعمليات الحسابية الآتية.

وأخيرًا ينفذ EVLRG تحويلات التشابه، كما في طريقة هاوسهولدر لتقليص A إلى مصفوفة upper-Hessenberg مماثلة. هذا الفقرة مماثل لبرمجية EISPACK subroutine ORTHES. وأخيرًا فإن خوارزمية QR المتنقلة تنفّذ لإيجاد للقيم المميزة جميعها. وهذا الفقرة مماثل للبرمجية HQR في EIS-PACK. البرمجية IMSL subroutine EVCRG هي نفس البرمجية EVLRG إلا أنه قد حُسبت المتجهات المميزة المقابلة. وإن البرمجية EVLSF تحسب القيم المميزة لمصفوفة متماثلة حقيقية A. وتتقلص المصفوفة A أولًا إلى صيغة ثلاثية الأقطار باستخدام تعديل برنامج EISPACK routine TRED2 الذي هو انحراف عن طريقة QR، وتسمى طريقة QL الضمنية. البرمجية EVCSF هي نفسها البرمجية EVLSF إلا أن المتجهات المميزة المقابلة تُحسَب أيضًا. وأخيرًا EVLRH و EVCRH يحسبان للقيم المميزة جميعها لمصفوفة upper-Hessenberg A بالإضافة إلى أن EVCRH تحسب المتجهات المميزة. وتستند هذه البرمجيات إلى البرمجيات HQR و HQR2 على التوالي، في EISPACK. إن مكتبة NAG فيها برمجيات مماثلة تستند إلى برنامج EISPACK. وتحسب البرمجية F02EBF القيم المميزة لمصفوفة حقيقية المتجهات المميزة اختياريًّا. ويجب أن تتوازن المصفوفة أولاً، ثم تتقلص إلى صيغة upper-Hessenberg لطريقة QR فإذا كان المطلوب هو القيم المميزة فقط فإن الخوارزمية تستخدم طريقة Hessenberg QR لحساب القيم المميزة، وإذا كان المطلوب أيضًا حساب المتجهات المميزة، فعندئذٍ يُستخدم تحليل Schur.

تُستخدم البرمجية F02FAF على مصفوفة متماثلة حقيقية لحساب القيم المميزة بترتيب تصاعدي بالنسبة إلى القيم، وكذلك حساب المتجهات المميزة اختياريًّا. تقلّص البرمجية المصفوفة أولاً إلى صيغة ثلاثية الأقطار مستخدمة طريقة هاوسهولدر Householder. وتُحسَب بعدئذٍ القيم المميزة باستخدام تحريف لخوارزمية QR ثلاثية الأقطار المتماثلة. تنفذ البرمجية F08FEF خوارزمية هاوسهولدر Householder مباشرةً لمصفوفة متماثلة لإعطاء مصفوفة متماثلة ثلاثية الأقطار مماثلة. تتوفر البرامج أيضًا في مكتبة NAG لموازنة مصفوفة حقيقية موازنة مباشرة، واستعادة المتجهات المميزة إذا توازنت المصفوفة أولًا، ومن ثم تنفيذ عمليات أخرى على أنواع خاصة من المصفوفات.

إن عمليتي Maple، Eigenvalues(A) تحسبان القيم المميزة لِـ A بموازنتها أولًا، ثم تحويلها إلى صيغة upper-Hessenberg، بعدئذٍ تطبّق طريقة QR لإيجاد للقيم المميزة جميعها والمتجهات المميزة.

وتُستخدم صيغة ثلاثية الأقطار، كما في الخوارزمية (6.9) في مصفوفة متماثلة.

إن عمليتي MATLAB، eig تحسبان القيم المميزة لـِ A، وكذلك حساب المتجهات المميزة اختيارياً من خلال استخدام البرنامج EISPACK. وإنها تستخدم BALANC لموازنة المصفوفة، وإن عملية eig في MATLAB تحسب القيم لتحويل المصفوفة إلى هسنبرج العليا (Hessenberg) أي أن Maple eig خطأ، ويجب وضع eig في MATLAB بدلاً منها. وفي النهاية يُستخدم برنامج HQR2 المعدل لإيجاد القيم المميزة، وكذلك حساب المتجهات المميزة اختيارياً لمصفوفة upper-Hessenberg حقيقية بطريقة QR. لـِ MATLAB عملية eigs أيضًا، ويحسب عددًا مختارًا من القيم المميزة والمتجهات المميزة. وإن عملية eigs تستند إلى طريقة Arnoldi التي تتضمن إعادة البدء من قبل Sorensen [So]. ويستند البرنامج ضمن ARPACK لحل مسائل كثيرة التفرع للقيم المميزة إلى طريقة Arnoldi التي تتضمن إعادة البدء أيضًا. إن الطريقة هذه هي طريقة الفضاء الجزئي Krylov subspace التي تعطي متتالية الفضاءات الجزئية Krylov subspace، وتتقارب إلى فضاء جزئي يتضمن القيم المميزة.

إن كتابي Wilkinson [Wil2] و Wilkinson and Reinsch [WR] تقليديان في دراسة مسائل القيمة المميزة. إن Stewart [Stew2] هو مصدر جيد أيضًا لمعلومات حول المسألة العامة، وإن Parlett [Par] يأخذ في الحسبان مسألة التماثل. وإن دراسة مسألة اللاتماثل يمكن إيجادها في Saad [Sa1].

الباب

10

الحلول العددية لأنظمة المعادلات غير الخطية

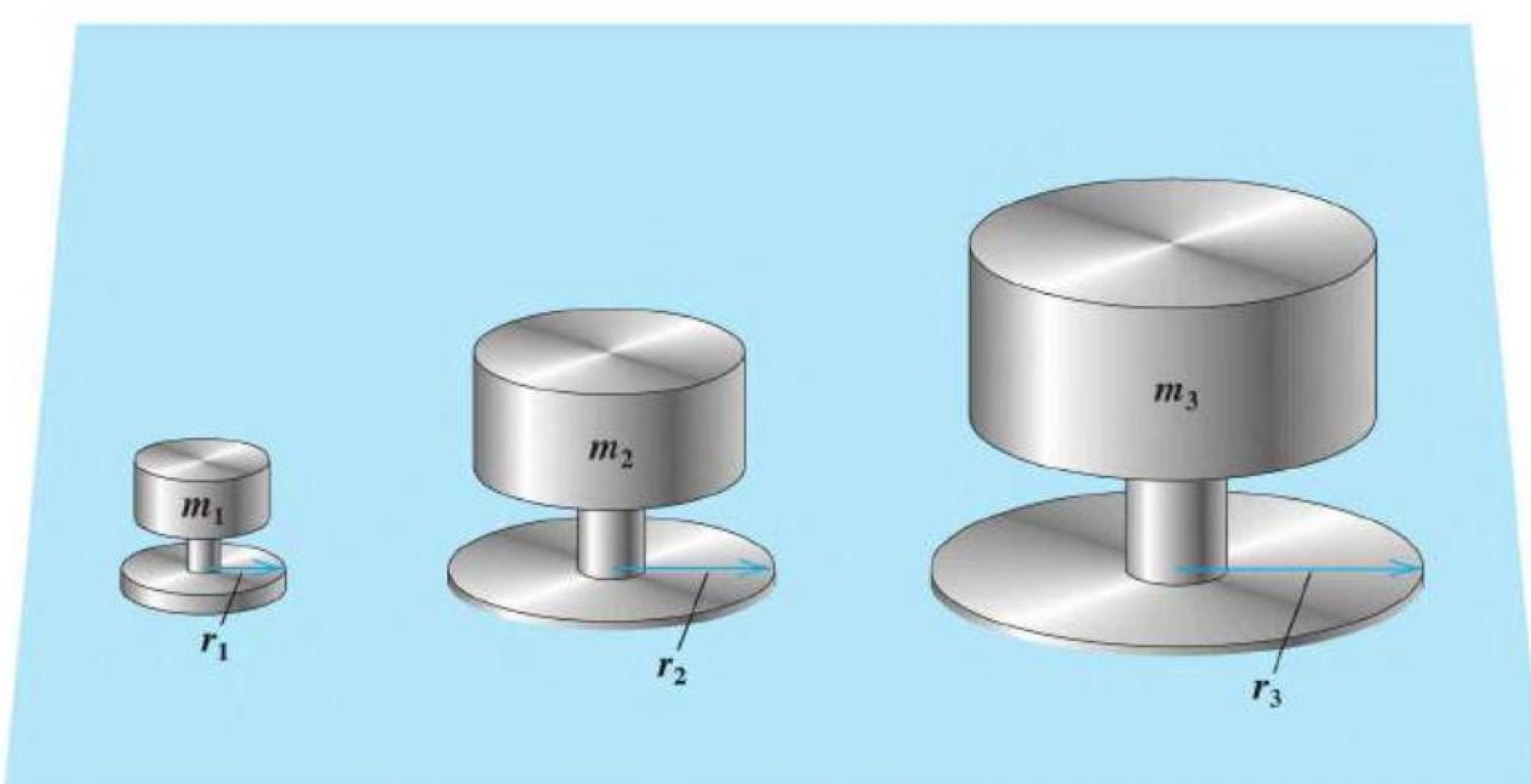
Numerical Solutions of Nonlinear Systems of Equations

مقدمة

يمكن التنبؤ بمقدار الضغط اللازم لإغراق جسم كبير ثقيل في تربة طريّة متجانسة واقعة فوق أرض ذات قاعدة صلبة من خلال مقدار الضغط اللازم لإغراق أجسام أصغر في التربة نفسها. وعلى نحو خاص فإن مقدار الضغط p اللازم لإغراق صفيحة دائرية نصف قطرها r لمسافة d في أرض طرية، حيث يمكن تقدير أرض القاعدة الصلبة التي تقع على مسافة $D > d$ تحت السطح بمعادلة على الصيغة

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

حيث k_1, k_2 و k_3 ثوابت تعتمد على d وعلى تجانس التربة، وليس على نصف قطر الصفيحة. ولتحديد أصغر حجم لقرص قابل لتحمل ثقل كبير، فقد أُغرقت ثلاثة أقراص ذوات أنصاف أقطار مختلفة إلى المسافة نفسها، وسجّلت الأثقال (الأحمال) المطلوبة لهذا الإغراق كما هو مبين في شكل المرافق.



إن هذا ينتج المعادلات غير الخطية الآتية:

$$m_1 = k_1 e^{k_2 r_1} + k_3 r_1$$

$$m_2 = k_1 e^{k_2 r_2} + k_3 r_2$$

$$m_3 = k_1 e^{k_2 r_3} + k_3 r_3$$

في المجاهيل الثلاثة k_1, k_2 و k_3. وعادة ما يكون هناك حاجة إلى طرائق عددية لتقرب حلّ أنظمة المعادلات عندما تكون المعادلات غير خطية. ويعالج التمرين (12) في الفصل (2.10) تطبيقًا من النوع الموصوف هنا.

إن حلّ النظام من المعادلات الخطية هو مشكلة يجب تجنبها ما أمكن، وعادة ما يحدث ذلك بتقريب النظام غير الخطي بنظام معادلات خطي. وعندما يكون ذلك غير مرضٍ، يجب مجابهة المشكلة مباشرة. إن الطريقة الأكثر مباشرة تكون بتكييف طرائق من الفصل الثاني تقرّب حلول معادلة غير خطية واحدة بمتغير واحد، وتطبّق عندما نواجه مسألة متجه يحتوي على المتغيرات كلها بدلًا من المسألة ذات المتغير الواحد.

إن الأداة الرئيسة في الفصل الثاني كانت طريقة نيوتن، وهي طريقة عادة ما تكون متقاربة تربيعيًّا. وإن هذه أول طريقة نعدّها لحلّ أنظمة معادلات غير خطية. وإن طريقة نيوتن عند تعديلها لأنظمة المعادلات مكلفة بالتطبيق، ولذلك سنصف في الفصل (3.10) كيف يمكن استخدام تعديل طريقة القاطع **Secant Method** للحصول على تقريبات بطريقة أسهل، مع خسارة في سرعة التقارب المذهلة التي تتصف بها طريقة نيوتن.

ويصف الفصل (4.10) طريقة التناقص الأشد انحدارًا **Steepest Descent**. وإن هذه الطريقة متقاربة خطيًّا فقط، ولكنها لا تتطلب البدء بالتقريبات الدقيقة اللازمة للطرائق الأسرع في التقارب. وغالبًا ما تستخدم لإيجاد تقريب ابتدائي لطريقة نيوتن أو أي من تعديلاتها.

نعطي في الفصل (5.10) مقدمة لطرائق الاتصال التي تستخدم الوسيط (براميتر) للانتقال من مسألة قابلة للحلّ بسهولة إلى حلٍّ للمسألة الأصلية غير الخطية.

لقد حُذفت معظم براهين النتائج مبرهنة؛ لأنها تستخدم طرائق تدرَس عادة في حساب التفاضل والتكامل المتقدم. وإن أحد المراجع الجيدة العامة لهذه المادة هو كتاب أورتيغا (Ortega) بعنوان *Numerical Analysis—A Second Course* [Or2]. A.

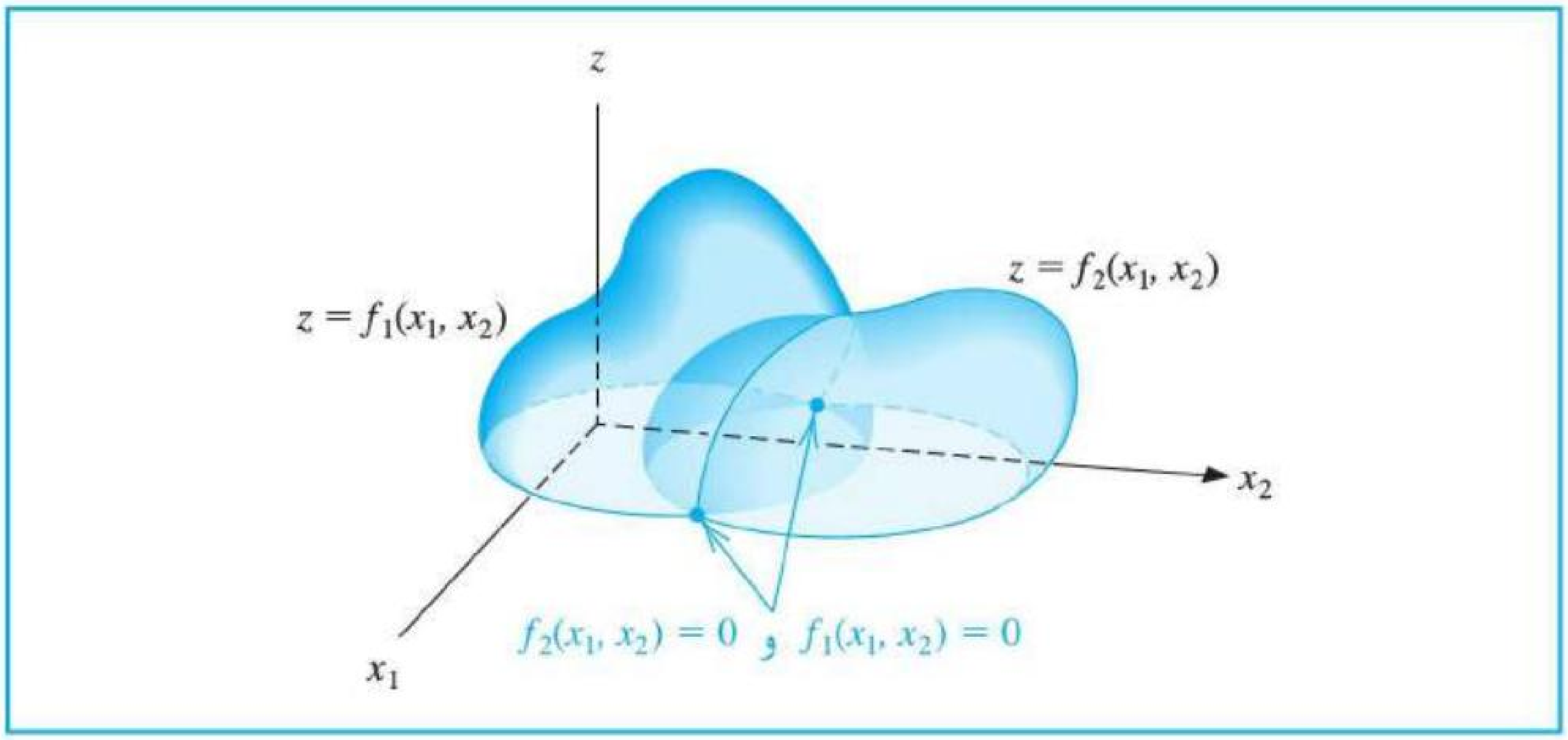
وهناك مرجع آخر أشمل وهو [OR].

1.10 النقاط الثابتة للدوال بمتغيرات متعددة
Fixed Points for Functions of Several variables

يكون نظام المعادلات غير الخطية على الصيغة

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

شكل 1.10



حيث يمكن النظر إلى كل دالة f_i على أنها تطبيق (mapping) المتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ذي n بعدًا إلى الخط الحقيقي $\mathbb{R}$. ويعطي شكل (1.10) تمثيلاً هندسيًّا لنظام غير خطي عندما $n = 2$.

يمكن تمثيل هذا النظام المكوّن من n من المعادلات غير الخطية في n من المجاهيل، عن طريق تعريف $\mathbf{F}$ ليتطبيق $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ كما يلي

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^t$$

إذا ما استخدمنا التعبير المتجهي لتمثيل المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$، فإن النظام (1.10) يأخذ الصيغة

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (2.10)$$

وإن الدوال $f_1, f_2, \dots, f_n$ هي دوال إحداثيات $\mathbf{F}$ (Coordinate functions).

مثال 1 يمكن وضع النظام غير الخطي 3×3

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$
$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

على صيغة المعادلة (2.10) عن طريق تعريف دوال الإحداثيات f_1, f_2 و f_3 من$\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}$ كالآتي:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2}$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}$$

وبعد تعريف $\mathbf{F}$ من $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ بواسطة

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)\\ &= (f_1(x_1, x_2, x_3),\ f_2(x_1, x_2, x_3),\ f_3(x_1, x_2, x_3))^t\\ &= \left(3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2},\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06,\right.\\ &\qquad \left. e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}\right)^t\end{aligned}$$

■

قبل مناقشة حلِّ نظام مُعطى بصيغة المعادلة (1.10) أو المعادلة (2.10) نحتاج إلى بعض النتائج حول الاتصال وقابلية الاشتقاق لدوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$.

وعلى الرغم من أنه يمكن عرض هذه الدراسة مباشرة (انظر التمرين 12)، نستخدم طريقة بديلة تسمح لنا بعرض المفاهيم مبرهنة الأصعب حول النهايات والاتصال بدلالة الدوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$.

تعريف 1.10 لتكن $D \subset \mathbb{R}^n$ ، ولتكن $f \to D \subset \mathbb{R}$ دالة. نقول: إن L نهاية الدالة f عند $\mathbf{x}_0$ ونكتب

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

إذا كان لأي $0 < \varepsilon$ يوجد عدد $0 < \delta$ بحيث إن

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

كلما كان $\mathbf{x} \in D$ و

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$$

■

إن وجود النهاية مستقل عن القياس المستخدم، كما بُحث في الفصل (1.7). ويمكن استخدام أي قياس مناسب ليحقق الشرط في هذا تعريف. وإن قيمة δ المنتهة تعتمد على القياس الذي اختير، ولكن وجود δ مستقل عن القياس. ومع إمكانية استخدام قياسات متعددة فإن الاتصال مستقل عن اختيار أي قياس منتهٍ.

تعريف 2.10 لتكن f دالة من مجموعة $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$. نقول: إن f متصلة على $\mathbf{x}_0 \in D$ إذا كان $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ موجودة

وكان $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

وبالإضافة إلى ذلك تكون f متصلة على مجموعة D إذا كانت f متصلة على كل نقطة في D. ويُعبّر عن هذا المفهوم بكتابة $f \in C(D)$. ■

إن تعريفـات الاتصـال للـدوال بمتـغيرات عـددها n تنبع من تلك الــدوال بمتغير واحد عــن طريق اســتخدام القياس بـــدلًا من القيمة المطلقة حيثما كان ذلك ضروريًا.

والآن يمكننا تعريف مفاهيم النهاية والاتصال للدوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ بافتراض دوال الإحداثيات من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$.

تعريف 3.10 ليكن $\mathbf{F}$ دالة من $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ على الصيغة

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))^t$$

حيث f_i تطبيق من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ لكل i. نعرّف

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} = (L_1, L_2, \ldots, L_n)^t$$

إذا وفقط إذا كان $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = L_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

الدالة $\mathbf{F}$ متصلة على $\mathbf{x}_0 \in D$ إذا كان $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ موجودة و$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$وبالإضافة إلى ذلك فإن $\mathbf{F}$. متصلة على D إذا كانت $\mathbf{F}$ متصلًا على كل $\mathbf{x}$ في D. ويعبّر عن هذا المفهوم بكتابة $\mathbf{F} \in C(D)$.

للدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ يمكن غالبًا برهنة الاتصال ببرهنة أن الدالة قابلة للاشتقاق. (انظر مبرهنة 6.1). وعلى الرغم من أن هذه مبرهنة تعمم لدوال في عدة متغيرات، فإن المشتقة (أو المشتقة الكلية) لدالة في عدة متغيرات معقدة ولا تناقش هنا. وبدلًا من ذلك نعطي هذه مبرهنة التي تربط اتصال دالة في عدة متغيرات n على نقطة بالمشتقات الجزئية لتلك الدالة على تلك النقطة.

مبرهنة 4.10 لتكن f دالة من $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ و $\mathbf{x}_0 \in D$. إذا وجدت المشتقات الجزئية جميعها للدالة f ووجدت $\delta > 0$ و $K > 0$ بحيث كلما كان $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ و $\mathbf{x}_0 \in D$ حصلنا على

$$\left|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \le K \quad \text{لكل} \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

عندها f متصلة على $\mathbf{x}_0$. ■

لقد تطوَّرت في الباب 2 عملية إرجاعية لحلِّ المعادلة $f(x) = 0$ عن طريق تحويل المعادلة أولًا إلى صيغة النقطة الثابتة $x = g(x)$. سنناقش طريقة مماثلة للدوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$.

تعريف 5.10 للدالة $\mathbf{G}$ من $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ نقطة ثابتة عند $\mathbf{p} \in D$ إذا كان $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. ■

وتعمم مبرهنة الآتية مبرهنة النقطة الثابتة (fixed point) (3.2) للحالة ذات الأبعاد n. وإن هذه مبرهنة حالة خاصة من مبرهنة التطبيق التقلصي (Contraction Mapping Theorem) ويوجد برهانها في [Or2, p. 153].

مبرهنة 610 لتكن $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \mid a_i \le x_i \le b_i$ وكل $i = 1, 2, \ldots, n\}$ لمجموعة من الثوابت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$، افترض $\mathbf{G}$ دالة متصلة من $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ ومحققة للخاصية $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in D$ كلما $\mathbf{x} \in D$. عندئذ يكون للدالة $\mathbf{G}$ نقطة ثابتة في D.

وبالإضافة إلى ذلك افترض أن مركبات الدّالية $\mathbf{G}$ جميعها لها مشتقات جزئية متصلة، ويوجد ثابت أن $K < 1$ بالخاصية

$$\left|\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \le \frac{K}{n} \quad \text{حيثما} \quad \mathbf{x} \in D$$

لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ وكل مركبة دالية g_i، عندئذ تكون المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرّفة بأي نقطة عشوائية $\mathbf{x}^{(0)}$ في D والناتجة عن

$$\mathbf{x}^{(k)} = G(\mathbf{x}^{(k-1)}) \quad \text{لكل} \quad k \ge 1$$

متقاربة إلى نقطة ثابتة $\mathbf{p} \in D$ ويكون

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\right\|_\infty \le \frac{K^k}{1-K}\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|_\infty \tag{3.10}$$

■

مثال 2 افترض النظام غير الخطي من المثال (1) المعطى كالآتي:

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إذا حُلّت المعادلة i للمجهول x_i، فإن النظام يتحول إلى مسألة النقطة الثابتة

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6} \\ x_2 &= \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1 \\ x_3 &= -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \end{aligned} \tag{4.10}$$

افترض أن $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ معرّف بالصيغة $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_3(\mathbf{x}))^t$، حيث

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6}$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

ستستخدم النظريتان (4.10) و (6.10) لبرهنة أن $\mathbf{G}$ له نقطة ثابتة وحيدة في

$$D = (x_1, x_2, x_3)^t \mid -1 \le x_i \le 1,\} \quad \text{لكل} \quad i = \{1, 2, 3$$

لكل $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ في D

$$|g_1(x_1, x_2, x_3)| \le \frac{1}{3}|\cos(x_2x_3)| + \frac{1}{6} \le 0.50$$

$$|g_2(x_1, x_2, x_3)| = \left|\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1\right| \le \frac{1}{9}\sqrt{1 + \sin 1 + 1.06} - 0.1 < 0.09,$$

و
$$|g_3(x_1, x_2, x_3)| = \frac{1}{20}e^{-x_1x_2} + \frac{10\pi - 3}{60} \le \frac{1}{20}e + \frac{10\pi - 3}{60} < 0.61$$

لذلك $-1 \le g_i(x_1, x_2, x_3) \le 1$ لكل $i = 1, 2, 3$، وهكذا $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in D$ حيثما $\mathbf{x} \in D$.

إن إيجاد محدود للمشتقات الجزئية على D يعطي

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right| = 0, \quad \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right| = 0, \quad \text{و} \quad \left|\frac{\partial g_3}{\partial x_3}\right| = 0$$

وكذلك

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right| \le \frac{1}{3}|x_3| \cdot |\sin x_2x_3| \le \frac{1}{3}\sin 1 < 0.281$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_3}\right| \le \frac{1}{3}|x_2| \cdot |\sin x_2x_3| \le \frac{1}{3}\sin 1 < 0.281$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right| = \frac{|x_1|}{9\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} < \frac{1}{9\sqrt{0.218}} < 0.238$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right| = \frac{|\cos x_3|}{18\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} < \frac{1}{18\sqrt{0.218}} < 0.119$$

$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right| = \frac{|x_2|}{20}e^{-x_1x_2} \le \frac{1}{20}e < 0.14$$

و
$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x_2}\right| = \frac{|x_1|}{20}e^{-x_1x_2} \le \frac{1}{20}e < 0.14$$

بما أن المشتقات الجزئية للدوال g_1، g_2 وg_3 منتهية على D، فإن مبرهنة (4.10) تضمن أن هذه الدوال متصلة على D. ووفقاً لذلك؛ فإن $\mathbf{G}$ متصلة على D. وبالإضافة إلى ذلك، فإن لكل $\mathbf{x} \in D$

$$\left|\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \le 0.281 \quad \text{لكل } i = 1, 2, 3 \text{ و } j = 1, 2, 3$$

ويتحقّق الشرط في الفقرة الثاني من مبرهنة (6.10) بالقيمة $K = 3(0.281) = 0.843$.

وبالطريقة نفسها يمكن برهنة أن $\partial g_i/\partial x_j$ متصل على D لكل $i = 1, 2, 3$ و $j = 1, 2, 3$. (لقد افتُرض هذا في التمرين 3). ووفقاً لذلك، يوجد لـِ $\mathbf{G}$ نقطة ثابتة وحيدة في D ويوجد للنظام غير الخطي حلّ في D.

انظر أن امتلاك $\mathbf{G}$ نقطة ثابتة في D لا يتضمَّن أن حلَّ النظام الأصلي وحيد على هذا المجال؛ لأن حلّ المجهول x_2 في المعادلة (4.10) قد احتوى على اختيار الجذر التربيعي الموجب. إن التمرين 7 (د) يتفحص الحالة التي تحدث إذا اختير الجذر التربيعي السالب في هذه الخطوة، بدلًا من ذلك.

لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة $\mathbf{p}$؛ نختار $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$.

إن متتالية المتجهات الناتجة عن

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{3}\cos x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)} + \frac{1}{6}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{9}\sqrt{\left(x_1^{(k-1)}\right)^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06} - 0.1$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{20}e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

تتقارب إلى الحلّ الوحيد للمعادلة (4.10). لقد نتجت النتائج في جدول (1.10) حتى تحقق

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-5}$$

جدول 1.10

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	−0.10000000	
1	0.49998333	0.00944115	−0.52310127	0.423
2	0.49999593	0.00002557	−0.52336331	9.4×10^{-3}
3	0.50000000	0.00001234	−0.52359814	2.3×10^{-4}
4	0.50000000	0.00000003	−0.52359847	1.2×10^{-5}
5	0.50000000	0.00000002	−0.52359877	3.1×10^{-7}

إن استخدام حد الخطأ (3.10) بالقيمة $K = 0.843$ يعطي

$$\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{p}\|_\infty \le \frac{(0.843)^5}{1 - 0.843}(0.423) < 1.15$$

التي لا تشير إلى الدقة الحقيقية لـ $\mathbf{x}^{(5)}$ بسبب التقريب الابتدائي غير الدقيق.

إن الحل الفعلي هو

$$\mathbf{p} = \left(0.5, 0, -\frac{\pi}{6}\right)^t \approx (0.5, 0, -0.5235987757)^t$$

ولذلك فالخطأ الحقيقي هو

$$\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{p}\|_\infty \le 2 \times 10^{-8}$$

إن إحدى الطرائق لتسريع تقارب عملية النقطة الثابتة الإرجاعية تكون باستخدام $x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ من $x_1^{(k-1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k-1)}$ في حساب $x_i^{(k)}$ كما في طريقة جاوس – سيدل للأنظمة الخطية، ثم تصبح معادلات المركبات

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{3}\cos\left(x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)}\right) + \frac{1}{6}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{9}\sqrt{\left(x_1^{(k)}\right)^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06} - 0.1$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{20}e^{-x_1^{(k)} x_2^{(k)}} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

وبأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$ تعرض نتائج هذه الحسابات في جدول (2.10).

جدول 2.10

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	−0.10000000	
1	0.49998333	0.02222979	−0.52304613	0.423
2	0.49997747	0.00002815	−0.52359807	2.2×10^{-2}
3	0.50000000	0.00000004	−0.52359877	2.8×10^{-5}
4	0.50000000	0.00000000	−0.52359877	3.8×10^{-8}

إن نتيجة خطوة التراجع $\mathbf{x}^{(4)}$ دقيقة ضمن 10^{-7} في المعيار l_∞، ولذلك فإن التقارب لهذه المسألة قد تسارع باستخدام طريقة جاوس – سيدل. وعلى كل حال فإن هذه الطريقة لا تؤدي دائمًا إلى تسارع التقارب. ■

يعطي مابل **Maple** الدالة **fsolve** لحلِّ أنظمة معادلات. ويمكن حلُّ مسألة النقطة الثابتة في مثال (2) بالأوامر الآتية:

```
>g1:=x1=(2*cos(x2*x3)+1)/6:
>g2:=x2=sqrt(x1^2+sin(x3)+1.06)/9-0.1:
>g3:=x3=-(3*exp(-x1*x2)+10*Pi-3)/60:
>fsolve({g1,g2,g3},{x1,x2,x3},{x1=-1..1,x2=-1..1,x3=-1..1});
```

إن الأوامر الثلاثة الأولى تعرّف النظام، والأمر الأخير يدخل العملية **fsolve**. الجواب الناتج هو $\{x3 = -.5235987758,\ x1 = .5000000000,\ x2 = -.2102454409\ 10^{-10}\}$

وعمومًا fsolve(eqns,vars,options) يحلُّ نظام المعادلات الممثل بالوسيط **eqns** للمتغيرات الممثَّلة بالوسيط **vars** تحت الوسيطات الاختيارية الممثلة بِـ **options**، وتحت **options** نحدِّد منطقة يطلب فيها من البرنامج أن يبحث عن حلٍّ، وإن هذا التحديد ليس إلزاميًّا، وإن **Maple** يحدد فضاء البحث الخاص بها إذا حُذفت الخيارات **options**.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 1.10

1. برهن أن الدالة $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرّفة بالصيغة

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3,\ x_1 \cos x_2,\ x_2^2 + x_3)^t$$

متصلة على كل نقطة في $\mathbb{R}^3$.

2. أعط مثالًا لدالة $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تكون متصلة على كل نقطة في $\mathbb{R}^3$ ما عدا $(1,0)$.

3. برهن أن المشتقات الجزئية الأولى في مثال (2) متصلة على D.

4. للنظام اللاخطي

$$-x_1(x_1 + 1) + 2x_2 = 18$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25$$

حلان.

أ. قرّب الحلين بالتطبيق.

ب. استخدم التقريبات من الفقرة (أ) بوصفها تقريبات ابتدائية لعملية إرجاعية لدالة مناسبة،

وحدّد الحلول ضمن 10^{-5} في معيار l_∞.

5. يمكن تحويل النظام غير الخطي

$$x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0$$
$$x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0$$

إلى مسألة النقطة الثابتة

$$x_1 = g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10}$$

$$x_2 = g_2(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2^2 + x_1 + 8}{10}$$

أ. استخدم مبرهنة (6.10) لبرهنة أن $\mathbf{G} = (g_1, g_2)^t$ بتطبيق $D \subset \mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$ له نقطة ثابتة في $D = \{ (x_1, x_2)^t \mid 0 \le x_1, x_2 \le 1.5\}$.

ب. طبّق تكرارًا داليًّا لتقريب الحل.

جـ. هل تسرّع طريقة جاوس – سيدل التقارب؟

6. يوجد للنظام غير الخطي $5x_1^2 - x_2^2 = 0,$

$$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

حلّ بالقرب من $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^t$.

أ. أوجد دالة $\mathbf{G}$ ومجموعة D في $\mathbb{R}^2$ بحيث $\mathbf{G} : D \to \mathbb{R}^2$ ويكون للدالة $\mathbf{G}$ نقطة ثابتة وحيدة في D.

ب. طبِّق التكرار الدّالي لتقريب الحلّ ضمن 10^{-5} في معيار l_∞.

جـ. هل تسرّع طريقة جاوس – سيدل التقارب؟

7. استخدم مبرهنة (6.10) لتبرهن أن $\mathbf{G} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ له نقطة ثابتة وحيدة في D. طبّق التكرار الدّالي لتقريب الحلّ ضمن 10^{-5} باستخدام $\|\cdot\|_\infty$:

أ. $$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\cos(x_2x_3) + 0.5}{3}, \frac{1}{25}\sqrt{x_1^2 + 0.3125} - 0.03, -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}\right)^t$$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid -1 \le x_i \le 1, i = 1, 2, 3\}$$

ب. $$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{13 - x_2^2 + 4x_3}{15}, \frac{11 + x_3 - x_1^2}{10}, \frac{22 + x_2^3}{25}\right)$$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid 0 \le x_1 \le 1.5, i = 1, 2, 3\}$$

ج. $$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = (1 - \cos(x_1x_2x_3), 1 - (1 - x_1)^{1/4} - 0.05x_3^2 + 0.15x_3$$
$$x_1^2 + 0.1x_2^2 - 0.01x_2 + 1)^t;$$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid -0.1 \le x_1 \le 0.1, -0.1 \le x_2 \le 0.3, 0.5 \le x_3 \le 1.1\}$$

د. $$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1, -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}\right)^t$$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid -1 \le x_i \le 1, i = 1, 2, 3\}$$

8. استخدم التكرار الدّالي لإيجاد حلول للأنظمة غير الخطية الآتية بحيث تكون دقيقة ضمن 10^{-5}، باستخدام $\|\cdot\|_\infty$:

أ.
$$x_2^2 + x_2^2 - x_1 = 0$$
$$x_1^2 - x_2^2 - x_2 = 0$$

ب.
$$3x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$$

ج.
$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0$$
$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

د.
$$x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 = 0$$
$$\frac{x_1^2}{7x_2x_3} - 1 = 0$$

9. استخدم طريقة جاوس – سيدل لتقريب النقاط الثابتة في التمرين (7) ضمن 10^{-5} مستخدمًا $\|\cdot\|_\infty$.

10. كرِّر التمرين (8) باستخدام طريقة جاوس – سيدل.

11. افترضنا في التمرين (11) من الفصل (9.5) مسألة تنبؤ لمجتمع نوعين من الكائنات الحية اللذين يتنافسان على كمية الطعام نفسها. وافترضنا في تلك المسألة، أنه يمكن التنبؤ بحل نظام المعادلتين للنوعين كما يلي:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)(4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t))$$

و

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)(2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)).$$

نرغب في هذا التمرين أن نفترض مسألة تحديد التوازن بين مجتمع هذين النوعين. وإن المعيار الرياضي اللازم تحقيقه لكي يكون هذان المجتمعان في حالة توازن هو تحقيق المعادلتين الآتيتين:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = 0$$

إن هذا يحدث عندما ينقرض النوع الأول ويكون تعداد مجتمع النوع الثاني 20,000 أو عندما ينقرض النوع الثاني ويكون مجتمع النوع الأول 13,333. هل يمكن أن يحدث التوازن في أي حالة أخرى؟

12. برهن أن الدالة $\mathbf{F}$ التطبيق على $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ تكون متصلة على $\mathbf{x}_0 \in D$، بالضبط إذا كان لأي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث تتحقق لأي معيار $\|\cdot\|$، الخاصية $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ عندما $\mathbf{x}_0 \in D$ ويكون $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

2.10 طريقة نيوتن Newton's Method

لقد تحوَّلت المسألة في المثال (2) من الفصل السابق إلى مسألة النقطة الثابتة عن طريق الحل الجبري للمعادلات الثلاث للمتغيرات الثلاثة x_1, x_2 و x_3.

وعلى كل حال فمن المستغرب أن تنجح هذه الطريقة. وسنفترض في هذا الفصل طريقة لوغارتمية لتنفيذ هذا التحويل في أحوال أعم.

لإنشاء خوارزمية تنتج طريقة مناسبة للنقطة الثابتة في حالة البعد الواحد، وجدنا دالة ϕ بحيث إن الخاصية

$$g(x) = x - \phi(x) f(x)$$

تعطي تقاربًا تربيعيًّا للنقطة الثابتة p للدالة g. (انظر الفصل 4.2) لقد ظهرت طريقة نيوتن من هذا الشرط باختيار $\phi(x) = 1/f'(x)$، بافتراض $f'(x) \neq 0$.

إن استخدام طريقة مشابهة في حالة n من الأبعاد تتطلب التعامل مع مصفوفة

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{1n}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & a_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\mathbf{x}) & a_{n2}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

حيث كل عنصر $a_{ij}(\mathbf{x})$ دالة من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$. إن هذا يتطلب إيجاد مصفوفة $A(\mathbf{x})$ بحيث إن

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

تعطي تقاربًا تربيعيًّا لحلّ المعادلة $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ بافتراض أن $A(\mathbf{x})$ لها معكوس بالقرب من النقطة الثابتة $\mathbf{p}$ في $\mathbf{G}$.

وتوازي مبرهنة الآتية مبرهنة (8.2) في الفصل (4.2). ويتطلب برهانها القدرة على التعبير عن $\mathbf{G}$ بدلالة سلسلة تايلور في n من المتغيرات حول $\mathbf{p}$.

مبرهنة 7.10 لتكن $\mathbf{p}$ حلًّا للمعادلة $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. افترض أنه يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث

(i) $\partial g_i/\partial x_j$ متصل على $N_\delta = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta\}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) $\partial^2 g_i(\mathbf{x})/(\partial x_j \partial x_k)$ متصل و $|\partial^2 g_i(\mathbf{x})/(\partial x_j \partial x_k)| \leq M$ لثابت ما M عندما $\mathbf{x} \in N_\delta$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ و $k = 1, 2, \ldots, n$;

(iii) $\partial g_i(\mathbf{p})/\partial x_k = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $k = 1, 2, \ldots, n$;

عندئذ يوجد عدد $\hat{\delta} \leq \delta$ بحيث إن المتتالية الناتجة عن $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ تتقارب تربيعيًّا إلى $\mathbf{p}$ لأي اختيار $\mathbf{x}^{(0)}$ يحقق: $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{p}\|_\infty < \hat{\delta}$. بالإضافة إلى ذلك فإن

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{p}\|_\infty^2 \quad \text{لكل} \quad k \geq 1$$

■

لكي تستخدم مبرهنة (7.10)، افترض أن $A(\mathbf{x})$ مصفوفة $n \times n$ مدخلاتها دوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ على صيغة المعادلة (5.10)، حيث ستُختار المدخلات المنتهة لاحقًا. وافترض بالإضافة إلى ذلك أن $A(\mathbf{x})$ لها معكوس بالقرب من $\mathbf{p}$ الذي هو حلٌّ للمعادلة $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$، وافترض أن $b_{ij}(\mathbf{x})$ تمثل المدخلة ذات الصف i والعمود j في $A(\mathbf{x})^{-1}$.

بما أن $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$ يكون لدينا $g_i(\mathbf{x}) = x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})$ ويكون

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^{n} \left(b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) \right), & \text{إذا كان } i = k \\ - \sum_{j=1}^{n} \left(b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) \right), & \text{إذا كان } i \neq k \end{cases}$$

وتؤدي مبرهنة (7.10) إلى أننا نحتاج إلى $\partial g_i(\mathbf{p})/\partial x_k = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $k = 1, 2, \ldots, n$. إن هذا يعني أنه لكل $i = k$، يكون

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

ولذلك يكون

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = 1 \tag{6.10}$$

عندما $k \neq i$، يكون

$$0 = - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p})$$

ولذلك فإن

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p}) = 0 \tag{7.10}$$

وبتعريف المصفوفة $J(\mathbf{x})$ كما يلي:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{8.10}$$

نرى أن الشرطين (6.10) و (7.10) يتطلبان أن

$A(\mathbf{p})^{-1} J(\mathbf{p}) = I$، أي المصفوفة المحايدة ولذلك يكون $A(\mathbf{p}) = J(\mathbf{p})$.

ومن ثم فإن اختيارًا مناسبًا للمصفوفة $A(\mathbf{x})$ هو $A(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$، لأنه يحقّق الشرط (iii) من مبرهنة (7.10).

تعرّف الدالة $\mathbf{G}$ بالمعادلة

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

وتنشأ عملية التكرار الدّالي من اختيار $\mathbf{x}^{(0)}$ وتوليد المعادلة (9.10)

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \quad \text{لكل } k \geq 1. \tag{9.10}$$

تسمى هذه العملية بعملية نيوتن للأنظمة غير الخطية (Newton's method for nonlinear systems) ويتوقع أن تعطي تقاربًا تربيعيًّا عمومًا، على أن يكون معلومًا لدينا قيمة بداية دقيقة على نحو كافٍ، وتكون $J(\mathbf{p})^{-1}$ موجودة.

كان أول ظهور للمصفوفة جاكوبيان في عام 1815 في بحث نشره كوشي (Cauchy). ولكن جاكوبي Jacobi كتب *De determinantibus functionalibus* في عام 1841 وبرهن العديد من النتائج عن هذه المصفوفة.

وتُسمى المصفوفة $J(\mathbf{x})$ مصفوفة جاكوبيان (**Jacobian matrix**) ولها عدد من التطبيقات في التحليل. ويمكن أن تكون معلومة لدى القارئ، وخصوصًا في تطبيقات التكامل المضاعف لدالة في متغيرات متعددة حول منطقة تحتاج إلى تحويل المتغيرات.

إن ضعف طريقة نيوتن تظهر من الحاجة إلى حساب المصفوفة $J(\mathbf{x})$ وإيجاد معكوسها في كل خطوة. ومن الناحية العملية، يتم تجنب الحساب الصريح للمصفوفة $J(\mathbf{x})^{-1}$ بتنفيذ العملية بطريقة ثنائية الخطوة.

أولًا: يجب إيجاد متجه $\mathbf{y}$ الذي يحقق $J(\mathbf{x}^{(k-1)})\mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$، ثم التقريب الجديد $\mathbf{x}^{(k)}$ يجمع مع $\mathbf{x}^{(k-1)}$. وتستخدم الخوارزمية 1.10 العملية ثنائية الخطوة.

ALGORITHM

الخوارزمية 1.10

طريقة نيوتن للأنظمة   Newton's Method for systems

لإيجاد تقريب لحلّ نظام غير خطي $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ إذا علم تقريب مبدئي $\mathbf{x}$.

المدخلات: عدد n من المعادلات والمجاهيل؛ تقريب مبدئي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$، حد خطأ مسموح به TOL، أكبر عدد من التكرارات (التراجعات) N.

المخرجات: حلّ تقريبي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ أو عبارة تفيد بأن عدد التكرارات قد تم تخطيه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	عندما $(k \le N)$ نفّذ الخطوات 3 − 7.
3	احسب $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ و $J(\mathbf{x})$ حيث $J(\mathbf{x})_{i,j} = (\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j)$ لكل $1 \le i, j \le n$.
4	حلّ النظام الخطي $n \times n$، $J(\mathbf{x})\mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$ لإيجاد $\mathbf{y}$.
5	ضع $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$
6	إذا كان $\|\mathbf{y}\| < TOL$ فإن المخرجات $(\mathbf{x})$ (كانت العملية ناجحة). توقف.
7	ضع $k = k + 1$
8	المخرجات (تم تخطي العدد الأكبر من التكرارت N)، (العملية لم تنجح). توقف.

■

مثال 1

أثبت أن النظام غير الخطي الآتي من المثال (2) في الفصل (1.10)

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

له حلٌّ تقريبي عند $(0.5, 0, -0.52359877)^t$.

نستخدم طريقة نيوتن للحصول على هذا التقريب المبدئي $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$

و $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3),\ f_2(x_1, x_2, x_3),\ f_3(x_1, x_2, x_3))^t$

حيث

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \tfrac{1}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06,$$

و

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}.$$

إن مصفوفة جاكوبيان $J(\mathbf{x})$ لهذا النظام هي

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2x_3 & x_2 \sin x_2x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

حيث

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} = -\left(J\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}\right)\right)^{-1} \mathbf{F}\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}\right)$$

وهكذا يجب في الخطوة k فقط حلُّ النظام الخطي $J\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)\mathbf{y}^{(k-1)} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)$ لإيجاد $y^{(k-1)}$ حيث

$$J\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right) = \begin{bmatrix} 3 & x_3^{(k-1)} \sin x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)} & x_2^{(k-1)} \sin x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)} \\ 2x_1^{(k-1)} & -162\left(x_2^{(k-1)} + 0.1\right) & \cos x_3^{(k-1)} \\ -x_2^{(k-1)}e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} & -x_1^{(k-1)}e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} & 20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1^{(k-1)} - \cos x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)} - \frac{1}{2} \\ \left(x_1^{(k-1)}\right)^2 - 81\left(x_2^{(k-1)} + 0.1\right)^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06 \\ e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} + 20x_3^{(k-1)} + \frac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

تظهر النتائج باستخدام طريقة التكرار هذه في جدول (3.10). ■

جدول 3.10

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\Vert\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\Vert_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	−0.10000000	
1	0.50003702	0.01946686	−0.52152047	0.422
2	0.50004593	0.00158859	−0.52355711	1.79×10^{-2}
3	0.50000034	0.00001244	−0.52359845	1.58×10^{-3}
4	0.50000000	0.00000000	−0.52359877	1.24×10^{-5}
5	0.50000000	0.00000000	−0.52359877	0

إن المثال السابق يشرح إمكانية تقارب طريقة نيوتن بسرعة فائقة حالما يوجد تقريب يكون قريبًا من الحلِّ الحقيقي. وعلى كل حال فليس من السهل دائمًا تحديد قيم بدء تؤدي إلى حل، والطريقة صعبة التنفيذ مقارنة بغيرها. نفترض في الفصل الآتي طريقة للتخلص من الضعف الأخير. وعادة ما يمكن إيجاد نقاط بدء بالطريقة التي سنبحث فيها في الفصل (4.10).

ويمكن إيجاد التقريب المبدئي لحلول الأنظمة غير الخطية 2×2 و 3×3 غالبًا باستخدام تسهيلات التطبيقات البيانية في مابل Maple.

إن النظام غير الخطي

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + x_2^2 - 6 = 0$$

له حلان $(0.625204094, 2.179355825)^t$ و $(2.109511920, -1.334532188)^t$

لاستخدام مابل Maple نعرّف أولاً المعادلتين

```
>eq1:=x1^2-x2^2+2*x2=0;
>eq2:=2*x1+x2^2-6=0;
```

لكي نحصل على التطبيق البياني لمعادلتين على المجموعة $-3 \le x_1, x_2 \le 3$ أدخل الأوامر

```
>with(plots);
>implicitplot({eq1,eq2},x1=-3..3,x2=-3..3);
```

ويمكننا من التطبيق في شكل (2.10) أن نقدّر أن هناك حلولاً بالقرب من $(0.64, 2.2)^t$ و $(2.1, -1.3)^t$. ويعطينا هذا نقاط ابتداء جيدة لطريقة نيوتن.

تبدو المسألة بثلاثة أبعاد أصعب. افترض النظام غير الخطي

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 4 = 0$$

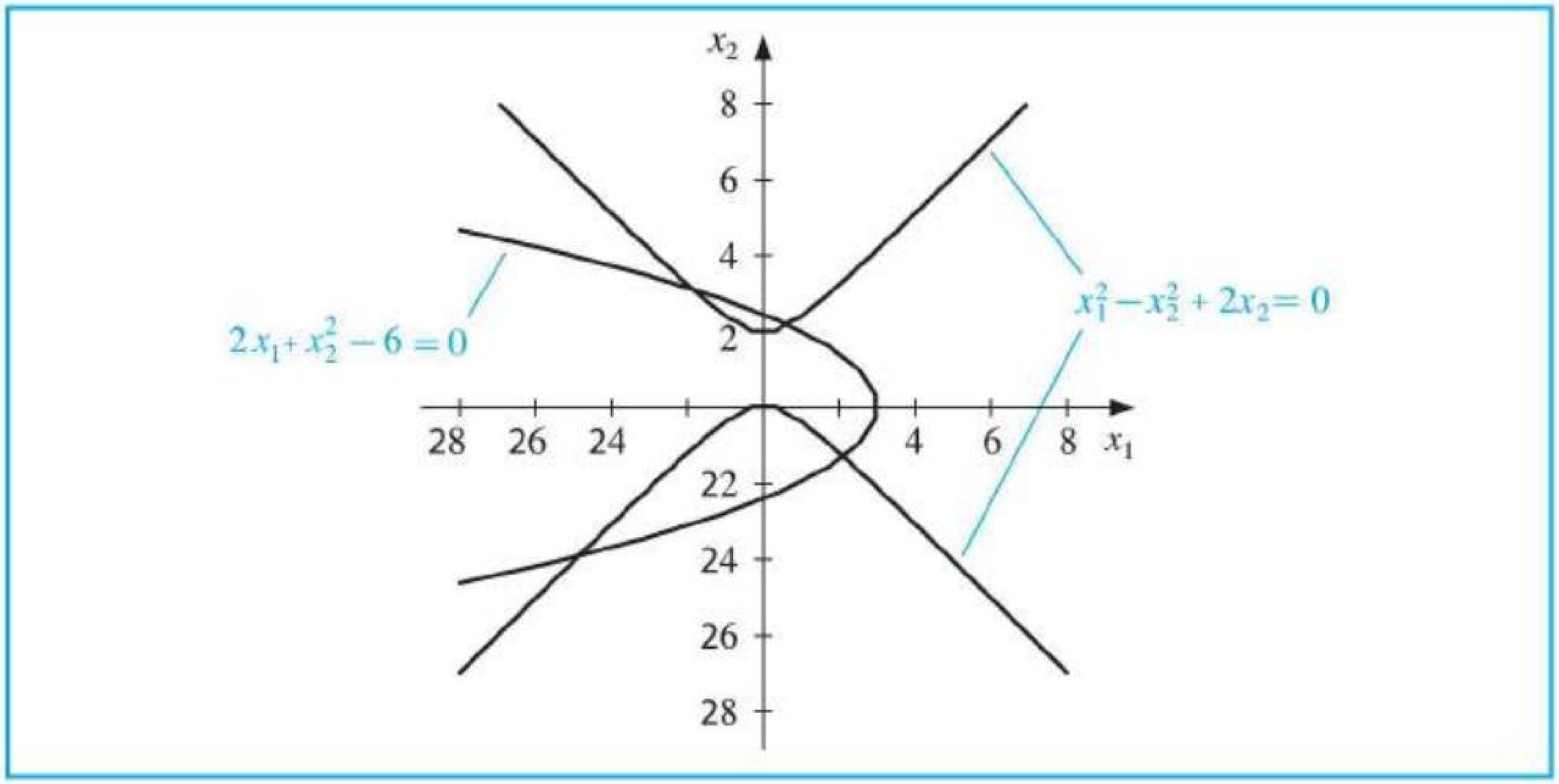
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 = 0$$

عرّف المعادلات الثلاث باستخدام أوامر Maple

```
>eq1:=2*x1-3*x2+x3-4=0;
>eq2:=2*x1+x2-x3+4=0;
>eq3:=x1^2+x2^2+x3^2-4=0;
```

إن المعادلة الثالثة تصف كرة نصف قطرها 2 ومركزها $(0, 0, 0)$، ولذلك كل من x_1 ، x_2 و x_3 يقع في $[-2, 2]$. إن أوامر Maple للحصول على التطبيق في هذه الحالة هي

شكل 2.10




```
>with(plots);
>implicitplot3d({eq1,eq2,eq3},x1=-2..2,x2=-2..2,x3=-2..2);
```

يوجد خيارات متعددة للتطبيق في ثلاثي الأبعاد، وهي متاحة في **Maple** لعزل حلِّ النظام غير الخطي. ويمكننا على سبيل المثال تدوير التطبيق لنتمكن من رؤية أفضل لأجزاء السطوح، ثم يمكننا التركيز على مناطق حدوث التقاطعات وتغيير صيغة الإحداثيات للحصول على منظر أدق لإحداثيات التقاطع. إن التقريب المبدئي المعقول لهذه المسألة هو

$$(x_1, x_2, x_3)^t = (-0.5, -1.5, 1.5)^t.$$

مجموعة التمارين 2.10 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة نيوتن بأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ لكل نظام غير خطي مما يلي:

أ.
$$4x_1^2 - 20x_1 + \tfrac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$$
$$\tfrac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

ب.
$$\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$$
$$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$$

ج.
$$x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12$$
$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25$$

د.
$$5x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

2. استخدم طريقة نيوتن بأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ لكل نظام غير خطي مما يلي:

أ.
$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

ب.
$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0$$
$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

ج.
$$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$$
$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$$
$$x_2^3 - 25x_3 = -22$$

د.
$$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$$
$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$$
$$8x_2x_3 + 4 = 0$$

3. استخدم التسهيلات المتاحة في التطبيق في Maple لتقرّب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية:

أ. $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$
$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$

ب. $\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$
$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$

ج. $x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12$
$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25$

د. $5x_1^2 - x_2^2 = 0$
$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$

4. استخدم التسهيلات المتاحة في التطبيق في Maple لتقرّب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية ضمن الحدود المعطاة:

أ. $3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$
$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$
$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$
$-1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1, -1 \le x_3 \le 1$

ب. $x_1^2 + x_2 - 37 = 0$
$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$
$-4 \le x_1 \le 8, -2 \le x_2 \le 2, -6 \le x_3 \le 0$

ج. $15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$
$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$
$x_2^3 - 25x_3 = -22$
$0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2$

د. $10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$
$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$
$8x_2x_3 + 4 = 0$
$0 \le x_1 \le 2, -2 \le x_2 \le 0, 0 \le x_3 \le 2$
و $0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, -2 \le x_3 \le 0$

5. استخدم الأجوبة التي حصلت عليها في التمرين (3) بوصفها تقريبات مبدئية لطريقة نيوتن. كرّر (عمليات تراجعية) للحصول على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$.

6. استخدم الأجوبة التي حصلت عليها في التمرين (4) بوصفها تقريبات مبدئية لطريقة نيوتن. كرّر (عمليات تراجعية) للحصول على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$.

7. استخدم طريقة نيوتن لتجد حلًّا للأنظمة غير الخطية الآتية في المجال المعطى كرر للحصول على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$.

أ. $3x_1^2 - x_2^2 = 0$
$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^t$

ب. $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) = \ln 2 + \ln\pi$
$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)^t$

ج. $x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0$
$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0$
$x_2^2 - 2x_1x_3 = 4$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, -2, 1)^t$

د. $6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 = 0$
$9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 = 0$
$60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 = 0$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$

8. للنظام غير الخطي

$$4x_1 - x_2 + x_3 = x_1x_4$$
$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2x_4$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_3x_4$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

ستة حلول.

أ. برهن أنه إذا كان $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ حلًّا فإن $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)^t$ حلٌّ أيضًا.

ب. استخدم طريقة نيوتن بثلاثة تقريبات مبدئية لتجد الحلول جميعها التي تحقق $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$.

9. للنظام غير الخطي

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$
$$x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

مصفوفة جاكوبيان منفردة على نقطة الحلِّ. طبّق طريقة نيوتن بأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$. لاحظ أن التقارب يمكن أن يكون بطيئًا أو يمكن ألا يحدث ضمن عدد معقول من التكرارات.

10. ما الصيغة التي تؤول إليها طريقة نيوتن عند تطبيقها على النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ المعطى بالصيغة

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

حيث A مصفوفة لها معكوس؟

11. برهن أنه عندما يكون $n = 1$ فإن طريقة نيوتن المعطاة بالمعادلة (9.10) تؤول إلى طريقة نيوتن المعهودة المعطاة بالمعادلة (5.2).

12. يمكن التنبؤ بمقدار الضغط اللازم لإغراق جسم كبير ثقيل في تربة طريّة متجانسة واقعة فوق أرض ذات قاعدة صلبة، من خلال مقدار الضغط اللازم لإغراق أجسام أصغر في التربة نفسها.
وعلى نحو خاص، فإن مقدار الضغط p اللازم لإغراق صفيحة دائرية نصف قطرها r في أرض طرية بمسافة d، حيث تقع أرض القاعدة الصلبة على مسافة $D > d$ تحت السطح يمكن تقديره بمعادلة على الصيغة $p = k_1e^{k_2r} + k_3r$.
حيث k_1 , k_2 و k_3 ثوابت، حيث $k_2 > 0$ تعتمد على d وعلى تجانس التربة، وليس على نصف قطر الصفيحة. (انظر [Bek, pp. 89–94]).
أ. أوجد قيم k_1 , k_2 و k_3 إذا افترضنا أن صفيحة نصف قطرها 1 in، تتطلب ضغطًا مقداره 10 lb/in.² لترسو بمقدار 1 ft في حقل موحل، وصفيحة ذات نصف قطر 2 in تتطلب ضغطًا مقداره 12 lb/in.² لترسو قدمًا واحدة، وأن الصفيحة ذات نصف قطر 3 in تتطلب ضغطًا مقداره 15 lb/in.² لترسو بالمسافة نفسها.
(مفترضين أن عمق الأرض الموحلة أكثر من 1 ft.)
ب. استخدم حساباتك من الفقرة (أ) لتتنبأ بأصغر حجم لصحيفة دائرية لازمة لتتحمل ثقلاً مقداره 500 lb لكي ترسو مسافة أقل من 1 ft في حقل الأرض نفسها.

13. لإيجاد شكل مسقط معتمد على الجاذبية بحيث يجعل زمن نقل الجسيمات الحبيبية أقل ما يمكن؛ قام شيارلا وشارلتون وروبرتس C. Chiarella, W. Charlton, and A.W. Roberts [CCR] بحلِّ المعادلات الآتية بطريقة نيوتن

(i) $f_n(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \dfrac{\sin\theta_{n+1}}{v_{n+1}}(1 - \mu w_{n+1}) - \dfrac{\sin\theta_n}{v_n}(1 - \mu w_n) = 0$ لكل $n = 1, 2, \ldots, N - 1$

(ii) $f_N(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \Delta y \sum_{i=1}^{N} \tan\theta_i - X = 0$ ، حيث

أ. $v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\cos\theta_j}$ لكل $n = 1, 2, \ldots, N$

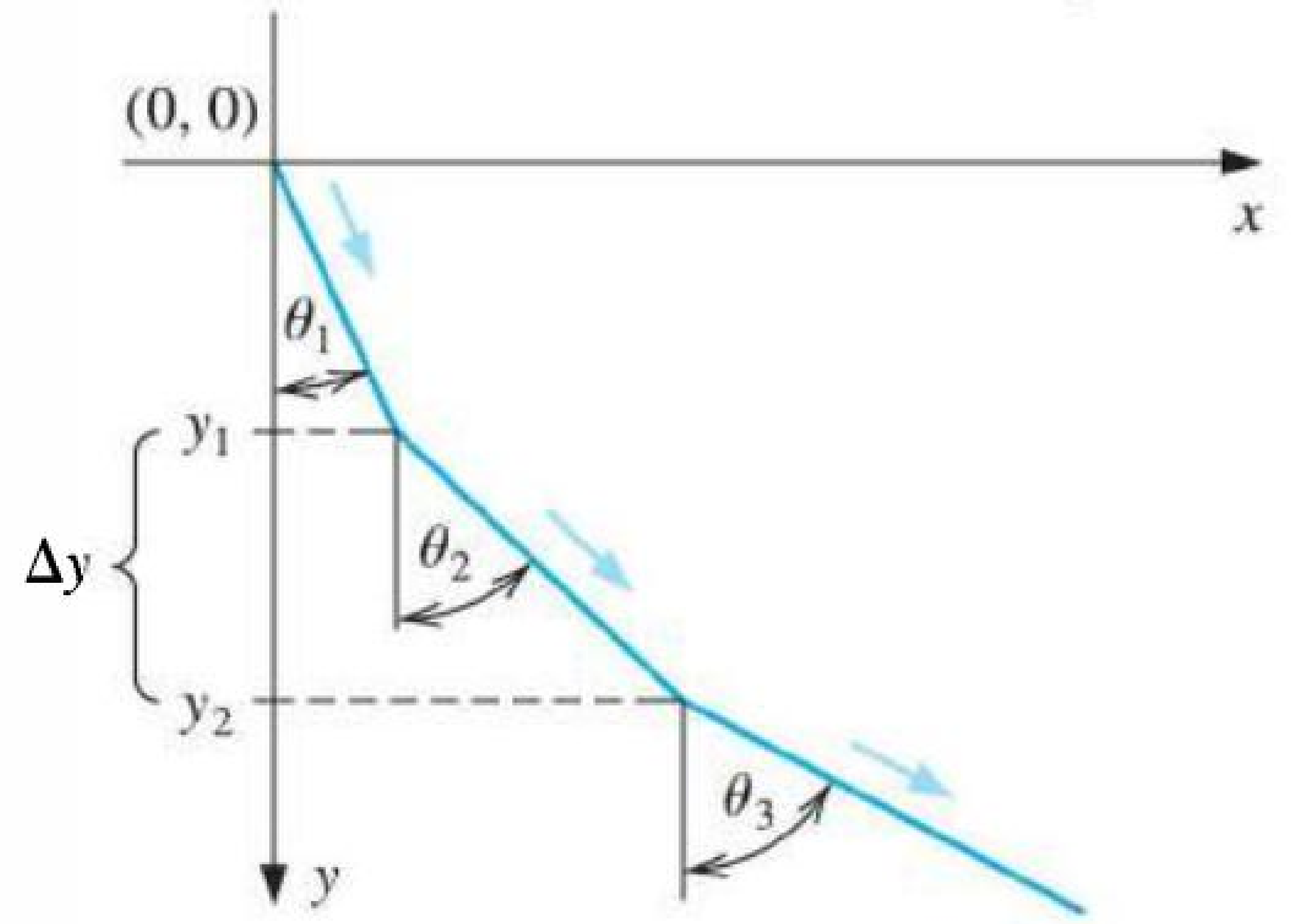
ب. و $w_n = -\Delta y v_n \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{v_i^3 \cos\theta_i}$ لكل $n = 1, 2, \ldots, N$

الثابت v_0 هو السرعة الابتدائية للمادة الحبيبية، X هو الإحداثي x – لنهاية المسقط، μ هي قوة الاحتكاك، N عند أجزاء المسقط و $g = 32.17\text{ft/s}^2$ هو ثابت الجاذبية الأرضية.

المتغير v_i هو قياس زاوية الفقرة i للمسقط مع العمود كما هو مبين في الشكل الآتي، و v_i سرعة الجسيم الحبيبية في الفقرة i للمسقط.

حلّ (i) و (ii) للمعطيات الآتية $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^t$ حيث $\mu = 0, X = 2, \Delta y = 0.2, N = 20$ و $v_0 = 0$، حيث يمكن الحصول على قيم v_n و w_n مباشرة من (أ) و (ب).

كرِّر التراجع حتى تحصل على $\|\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-2}$.



14. تهدف تجربة بيولوجية ممتعة (انظر [Schr2]) إلى تحديد أعلى رتبة لحرارة الماء X_M التي يمكن للأنواع المختلفة من الهايدرا أن تعيش بها من دون أن تؤثر في مدة حياتها. إن إحدى الطرائق لحلِّ هذه المسألة هي التوفيق بين مجموعة بيانات التجزئة باستخدام المربعات الصغرى الموزونة، ويكون التوفيق على الصيغة

$$f(x) = y = a/(x - b)^c$$

تمثِّل قيم x رتبة حرارة الماء في البيانات. والثابت b هو المقارب لمنحنى f، وعليه فهو تقريب للقيمة X_M.

أ. برهن أن اختيار a, b, c لجعل $\sum_{i=1}^{n}\left[w_i y_i - \frac{a}{(x_i - b)^c}\right]^2$

أصغر ما يمكن يؤدي إلى حلِّ النظام غير الخطي

$$a = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i - b)^{2c}}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i - b)^{2c+1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^{c+1}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i - b)^{2c}}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(x_i - b)}{(x_i - b)^{2c}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i \ln(x_i - b)}{(x_i - b)^c} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i - b)^{2c}}$$

ب. حُلَّ النظام غير الخطي للأنواع الحية بالبيانات الآتية، واستخدم الأوزان $w_i = \ln y_i$.

4	3	2	1	i
21.60	4.75	3.80	2.40	y_i
30.2	31.2	31.5	31.8	x_i

Quasi – Newton Methods أشباه طرائق نيوتن 3.10

في طريقة نيوتن لحلِّ أنظمة المعادلات غير الخطية ضعف واضح يكمن في التكرار التراجعي، ويجب حساب مصفوفة جاكوبيان وحلُّ نظام خطي $n \times n$ يستخدم هذه المصفوفة. افترض مقدار الحساب المرتبط بتكرار تراجعي واحد في طريقة نيوتن. إن مصفوفة جاكوبيان المرتبطة بنظام n من المعادلات غير الخطية على الصيغة $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ يتطلب n^2 من المشتقات الجزئية للدوال n التي هي مركبات $\mathbf{F}$ الواجب تحديدها وإيجاد قيمتها. وفي معظم الحالات يكون إيجاد القيم الصحيحة للمشتقات الجزئية غير مريح، على الرغم من أنه قد أصبحت هذه المسألة قابلة للتتبع مع انتشار أنظمة الحساب الرمزي كما في مابل Maple. وعندما يكون التقييم الصحيح غير عملي، يمكننا استخدام تقريبات الفرق المحدود لتقريب المشتقات الجزئية. وعلى سبيل المثال

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}^{(i)}) \approx \frac{f_j(\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{e}_k h) - f_j(\mathbf{x}^{(i)})}{h} \tag{10.10}$$

حيث h صغيرة بالقيمة المطلقة، و $\mathbf{e}_k$ هو المتجه الذي عنصره غير الصفري الوحيد هو 1 في الإحداثي k لهذا التقريب، وعلى كل حال لا تزال هناك حاجة إلى تنفيذ ما لا يقل عن n^2 من عمليات التقييم الدّالي العددية، وذلك لتقريب جاكوبيان، ولا ينقص من مقدار الحساب الذي هو من الرتبة $O(n^3)$ عمومًا، والذي يلزم لحلِّ النظام الخطي الذي يحتوي الجاكوبيان التقريبي هذا. ومن ثم فإن الجهد الحسابي لعملية واحدة في طريقة نيوتن لا يقل عن $(n^2 + n)$ من عمليات التقييم الدّالي العددي (n^2 لتقييم مصفوفة جاكوبيان و n لتقييم $\mathbf{F}$)، بالإضافة إلى $O(n^3)$ من العمليات الحسابية لحلِّ النظام الخطي. إن هذا الكم من الجهد الحسابي كبير، إلا في حالات قيم n الصغيرة نسبيًّا والدوال سهلة التقييم عدديًّا. سنعالج في هذا الفصل تعميمًا لطريقة القاطع (Secant Method) لأنظمة المعادلات غير الخطية، وهو ما يعرف بطريقة برويدن. Boyden's method (انظر [Broy]).

تتطلب الطريقة n فقط من عمليات التقييم الدّالي العددي لكل تكرار (إعادة)، كما ينقص عدد العمليات الحسابية إلى $O(n^2)$. وإنها تنتمي إلى عائلة من الطرائق تُسمى "تحديث أقل تغير في القاطع" (least – change secant updates) الذي ينتج خوارزميات تُسمى أشباه نيوتن quasi – Newton. إن هذه الطرائق تستعيض عن مصفوفة جاكوبيان في طريقة نيوتن باستخدام مصفوفة تقريب محدثة في كل تكرار. وإن سلبية هذه الطرائق تكمن في خسارة التقارب التربيعي في طريقة نيوتن، الذي يستعاض عنه عمومًا بتقارب يُسمى الخطي العالي Superlinear والذي يتضمن أن

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{p}\|}{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{p}\|} = 0$$

حيث تعبر $\mathbf{p}$ عن حلِّ المعادلة $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ و $\mathbf{x}^{(i)}$ و $\mathbf{x}^{(i+1)}$ وهي تقريبات متتالية لحلِّ $\mathbf{p}$.

ونجد في معظم التطبيقات أن الاختزال إلى التقارب الخطي العالي مقبول على نحو أفضل بوصفه بديلاً لتقليل مقدار الحساب. وهناك سلبية أخرى لطرائق أشباه نيوتن؛ إذ إنها لا تصحح نفسها بنفسها بخلاف ما يحدث في طريقة نيوتن.

إن طريقة نيوتن تصحح خطأ تقريب عمومًا عن طريق التكرار المتتالي، ولكن طريقة برويدن لا تفعل ذلك إلا إذا أُدخِلت ضوابط خاصة بذلك. لشرح طريقة برويدن؛ افترض أن لديك تقريبًا مبدئيًّا $\mathbf{x}^{(0)}$ لحل $\mathbf{p}$ للنظام $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$، نحسب التقريب الآتي $\mathbf{x}^{(1)}$ بطريقة نيوتن نفسها، أو نستخدم في حالة عدم الملاءمة لحساب $J(\mathbf{x}^{(0)})$ بالضبط معادلات الفروق المعطاة في المعادلة (10.10) لتقريب المشتقات الجزئية. وعلى كل حال فلحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ نبتعد عن طريقة نيوتن ونتفحص طريقة القاطع لمعادلة واحدة غير خطية.وطريقة القاطع تستخدم التقريب

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

بوصفه بديلاً للمشتقة $f'(x_1)$ في طريقة نيوتن. في الأنظمة الخطية، $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ هو متجه وإن عملية القسمة المقابلة له غير معرّفة. وعلى كل حال تسير العملية سيرًا مماثلاً، بأن نستعيض عن المصفوفة $J(\mathbf{x}^{(1)})$ في طريقة نيوتن للأنظمة باستخدام مصفوفة A_1 ذات الخاصية

$$A_1\left(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) \tag{11.10}$$

إن أي متجه في $\mathbb{R}^n$ يمكن كتابته بوصفه مجموعًا لأحد مضاعفات $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ مع أحد مضاعفات المتممة العمودية للمتجه $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$، ولكي نعرّف المصفوفة A_1 تعريفًا وحيدًا، نحتاج إلى تحديد سلوكها على المتممة العمودية للمتجه $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$. وبما أنه لا يوجد أي معلومات حول تغير $\mathbf{F}$ باتجاه عمودي على $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ فإننا نطلب أن

$$A_1\mathbf{z} = J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\mathbf{z} \quad \text{ما دام} \quad \left(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right)^t\mathbf{z} = 0. \tag{12.10}$$

وهكذا فإن أي متجه عمودي على $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ لا يتأثر بالتحديث من $J(\mathbf{x}^{(0)})$، التي استخدمت لحساب $\mathbf{x}^{(1)}$، لـ A_1، التي تستخدم لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$. إن الشرطين (10.11) و (10.12) يعرّفان A_1 تعريفًا وحيدًا (انظر [DM]) على الصيغة

$$A_1 = J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) + \frac{\left[\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) - J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\left(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right)\right]\left(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right)^t}{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_2^2}$$

إنها هذه المصفوفة التي تستخدم مكان $J(\mathbf{x}^{(1)})$ لتحديد $\mathbf{x}^{(2)}$ على الصيغة

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - A_1^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)$$

وحالما تحدّد $\mathbf{x}^{(2)}$، تتكرّر العملية لتحديد $\mathbf{x}^{(3)}$، باستخدام A_1 بدلًا من $A_0 \equiv J(\mathbf{x}^{(0)})$ واستخدام $\mathbf{x}^{(2)}$ و $\mathbf{x}^{(1)}$ بدلًا من $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(0)}$، وعمومًا حالما تحدّد $\mathbf{x}^{(i)}$ فإن $\mathbf{x}^{(i+1)}$ تحسب من

$$A_i = A_{i-1} + \frac{\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}\mathbf{s}_i^t \tag{13.10}$$

و

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - A_i^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right) \tag{14.10}$$

حيث يستخدم الرمز $\mathbf{y}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i-1)})$، ويُستخدَم $\mathbf{s}_i = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}$ لتبسيط المعادلات.

وإذا ما نُفذت الطريقة كما لخِّص في المعادلتين (13.10) و (14.10) فإن عدد عمليات التقييم الدّالي العددي سينخفض من $n^2 + n$ إلى n، (تلك اللازمة لإيجاد قيمة $(\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}))$ ولكن لا يزال عدد $O(n^3)$ من الحسابات مطلوبًا لحلِّ النظام الخطي $n \times n$ المرتبط بذلك.

(انظر الخطوة 4 في الخوارزمية 1.10).

$$A_i \mathbf{s}_{i+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) \qquad (15.10)$$

لا يمكن تبرير استخدام الطريقة بهذه الصيغة؛ بسبب الاختزال من التقارب التربيعي لطريقة نيوتن إلى التقارب الخطي العالي. وعلى كل حال يمكن إدخال تحسين معتمَد عن طريق استخدام معادلة شيرمان وموريسون الخاصة بإيجاد معكوس المصفوفة. (انظر على سبيل المثال ([DM, p. 55]

مبرهنة 8.10 معادلة شيرمان – موريسون [Sherman - Morrison formula]

إذا كانت A مصفوفة لها معكوس و $\mathbf{y}$ و $\mathbf{x}$ متجهين، فإن $A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t$ لها معكوس، حيث إن

$$(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x}} \quad \text{و} \quad \mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x} \neq -1$$

■

إن معادلة شيرمان – موريسون (Sherman - Morrison) جاءت من ملخص ورقة بحث قدمه جاك شيرمان ووينيفرد موريسون عام 1949 في اجتماع معهد الإحصاء الرياضي في بولدر، كولورادو. (Institute of Mathematical Statistics)

إن طريقة شيرمان – موريسون تسمح بحساب A_i^{-1} مباشرة من A_{i-1}^{-1}، لاغية الحاجة إلى إيجاد معكوس المصفوفة عند كل تكرار. بافتراض $A = A_{i-1}$ ، $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i)/\|\mathbf{s}_i\|_2^2$ و $\mathbf{y} = \mathbf{s}_i$ فإن المعادلة (3.10) ومبرهنة (8.10) معًا تقتضيان

$$\begin{aligned}
A_i^{-1} &= \left(A_{i-1} + \frac{\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}\mathbf{s}_i^t\right)^{-1} \\
&= A_{i-1}^{-1} - \frac{A_{i-1}^{-1}\left(\frac{\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}\mathbf{s}_i^t\right)A_{i-1}^{-1}}{1 + \mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}\left(\frac{\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}\right)} \\
&= A_{i-1}^{-1} - \frac{(A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i - \mathbf{s}_i)\mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2 + \mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i - \|\mathbf{s}_i\|_2^2}
\end{aligned}$$

ولذلك ينتج

$$A_i^{-1} = A_{i-1}^{-1} + \frac{(\mathbf{s}_i - A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i)\mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}}{\mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i} \qquad (16.10)$$

إن هذا الحساب يحوي عملية ضرب مصفوفة – متجه فقط في كل خطوة، ولذلك يتطلب $O(n^2)$ فقط من العمليات الحسابية.

لقد تم تجاوز حساب A_i وكذلك ضرورة حلّ النظام الخطي (15.10). إن الخوارزمية (2.10) تنبع من هذا الإنشاء، وتدخل المعادلة (16.10) تقنية التكرار (14.10).

ALGORITHM
الخوارزمية 2.10

برويدن Broyden

لإيجاد تقريب لحلّ نظام غير خطي $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ إذا علم تقريب مبدئي $\mathbf{x}$.

المدخلات: عدد n من المعادلات والمجاهيل؛ تقريب مبدئي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$، حد خطأ مسموح به TOL ، أكبر عدد من التكرارات (التراجعات) N.

المخرجات: حلّ تقريبي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ أو عبارة تفيد بأن عدد التكرارات قد تم تخطيه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $A_0 = J(\mathbf{x})$ حيث $J(\mathbf{x})_{i,j} = \partial f_i/\partial x_j(\mathbf{x})$ لكل $1 \le i$ و $j \le n$ $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (ملحوظة: $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$).
2	ضع $A = A_0^{-1}$ (استخدم طريقة جاوس للحذف.)
3	ضع $\mathbf{s} = -A\mathbf{v}$ (ملحوظة: $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$) $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$ $k = 2.$ (ملحوظة: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}$).
4	ما دام $(k \le N)$ فنفِّذ الخطوات 5 – 13.
5	ضع $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ (احفظ $\mathbf{v}$) $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (ملحوظة: $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$) $\mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ (ملحوظة: $\mathbf{y} = \mathbf{y}_k$).
6	ضع $\mathbf{z} = -A\mathbf{y}$ (ملحوظة: $\mathbf{z} = -A_{k-1}^{-1}\mathbf{y}_k$).
7	ضع $p = -\mathbf{s}^t\mathbf{z}$ (ملحوظة: $p = \mathbf{s}_k^t A_{k-1}^{-1}\mathbf{y}_k$).
8	ضع $\mathbf{u}^t = \mathbf{s}^t A$.
9	ضع $A = A + \frac{1}{p}(\mathbf{s} + \mathbf{z})\mathbf{u}^t$ (انظر $A = A_k^{-1}$).
10	ضع $\mathbf{s} = -A\mathbf{v}$ (ملحوظة: $\mathbf{s} = -A_k^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$).
11	ضع $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$ (ملحوظة: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k+1)}$).
12	إذا كان $\|\|s\|\| < TOL$ فعندئذ المخرجات $(\mathbf{x})$ (كانت العملية ناجحة). توقف.
13	ضع $k = k + 1$.
14	المخرجات (تم تخطي العدد الأكبر من التكرارت N). (العملية لم تنجح). توقف.



■

مثال 1 لقد حُلّ النظام غير الخطي الآتي بطريقة نيوتن في المثال (1) من الفصل (2.10)

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إن مصفوفة جاكوبيان لهذا النظام هي

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2 x_3 & x_2 \sin x_2 x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2 e^{-x_1 x_2} & -x_1 e^{-x_1 x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

افترض $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$،

و $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3),\ f_2(x_1, x_2, x_3),\ f_3(x_1, x_2, x_3))^t$

حيث

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \tfrac{1}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}$$

فإن

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1.199950 \\ -2.269833 \\ 8.462025 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$A_0 = J\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 9.999833 \times 10^{-4} & -9.999833 \times 10^{-4} \\ 0.2 & -32.4 & 0.9950042 \\ -9.900498 \times 10^{-2} & -9.900498 \times 10^{-2} & 20 \end{bmatrix}$$

نحصل على

$$A_0^{-1} = J\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3333332 & 1.023852 \times 10^{-5} & 1.615701 \times 10^{-5} \\ 2.108607 \times 10^{-3} & -3.086883 \times 10^{-2} & 1.535836 \times 10^{-3} \\ 1.660520 \times 10^{-3} & -1.527577 \times 10^{-4} & 5.000768 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

وبذلك فإن

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - A_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.4998697 \\ 1.946685 \times 10^{-2} \\ -0.5215205 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3.394465 \times 10^{-4} \\ -0.3443879 \\ 3.188238 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.199611 \\ 1.925445 \\ -8.430143 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0.3998697 \\ -8.053315 \times 10^{-2} \\ -0.4215204 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1^t A_0^{-1} \mathbf{y}_1 = 0.3424604$$

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} + (1/0.3424604)\left[\left(\mathbf{s}_1 - A_0^{-1}\mathbf{y}_1\right)\mathbf{s}_1^t A_0^{-1}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3333781 & 1.11050 \times 10^{-5} & 8.967344 \times 10^{-6} \\ -2.021270 \times 10^{-3} & -3.094849 \times 10^{-2} & 2.196906 \times 10^{-3} \\ 1.022214 \times 10^{-3} & -1.650709 \times 10^{-4} & 5.010986 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - A_1^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.4999863 \\ 8.737833 \times 10^{-3} \\ -0.5231746 \end{bmatrix}$$

يعرض جدول (4.10) تكرارات إضافية. وإن التكرار الخامس في طريقة برويدن ذو دقة أقل قليلًا من دقة التكرار الرابع بطريقة نيوتن المعطاة في المثال في نهاية الفصل السابق. ■

جدول 4.10

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2$
3	0.5000066	8.672157×10^{-4}	-0.5236918	7.88×10^{-3}
4	0.5000003	6.083352×10^{-5}	-0.5235954	8.12×10^{-4}
5	0.5000000	-1.448889×10^{-6}	-0.5235989	6.24×10^{-5}
6	0.5000000	$6\ 059030 \times 10^{-9}$	-0.5235988	1.50×10^{-6}

هناك أيضًا عمليات متاحة تبقي التقارب التربيعي، ولكنها تقلل عدد عمليات التقييم الدّالي على نحو كبير. إن الطرائق من هذا النوع قد اقتُرحت في الأصل من قبل براون [Brow,k]. ويمكن الرجوع إلى [MC] لإجراء مسح ومقارنة بين بعض الطرائق الشائعة الاستخدام من هذا النوع. وعلى كل حال، فإن تنفيذ هذه الطرائق تنفيذًا فاعلاً أصعب كثيرًا من طريقة برويدن Broyden.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 3.10

1. استخدم طريقة برويدن بافتراض أن $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ لكلٍّ من الأنظمة غير الخطية الآتية:

أ. $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$

$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$

ب. $\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$

$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$

ج. $3x_1^2 - x_2^2 = 0$

$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$

أستخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^t$

د. $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi$

$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0$

أستخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)^t$

2. استخدم طريقة برويدن بافتراض أن $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ لكل من الأنظمة غير الخطية الآتية:

أ. $3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$

$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$

$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$

ب. $x_1^2 + x_2 - 37 = 0$

$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

ج.
$$x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 6 = 0$$
$$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0$$
$$x_2^2 - 2x_1 x_3 = 4$$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, -2, 1)^t$

د.
$$6x_1 - 2\cos(x_2 x_3) - 1 = 0$$
$$9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 = 0$$
$$60x_3 + 3e^{-x_1 x_2} + 10\pi - 3 = 0$$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$

3. استخدم طريقة برويدن لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية في التمرين (1) باستخدام التقريبات الابتدائية $\mathbf{x}^{(0)}$. استخدم التكرار حتى تحصل على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$:

أ. $(0, 0)^t$ ب. $(0, 0)^t$ ج. $(1, 1)^t$ د. $(2, 2)^t$

4. استخدم طريقة برويدن لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية في التمرين (2) باستخدام التقريبات الابتدائية $\mathbf{x}^{(0)}$. استخدم التكرار حتى تحصل على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$:

أ. $(1, 1, 1)^t$ ب. $(2, 1, -1)^t$ ج. $(-1, -2, 1)^t$ د. $(0, 0, 0)^t$

5. استخدم طريقة برويدن لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية باستخدام التقريبات الابتدائية $\mathbf{x}^{(0)}$. استخدم التكرار حتى تحصل على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$:

أ.
$$x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12$$
$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25$$

ب.
$$5x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

ج.
$$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$$
$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$$
$$x_2^3 - 25x_3 = -22$$

د.
$$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$$
$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$$
$$8x_2 x_3 + 4 = 0$$

6. يوجد للنظام الخطي
$$4x_1 - x_2 + x_3 = x_1 x_4$$
$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2 x_4$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_3 x_4$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$
ستة حلول.

أ. برهن أنه إذا كان $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ حلًّا فإن $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)^t$ حلٌّ أيضًا.

ب. استخدم طريقة برويدن ثلاث مرات لتقريب كل حلٍّ. كرِّر العملية حتى تحصل على
$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$$

7. يوجد للنظام غير الخطي
$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$
$$x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0$$
$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$
مصفوفة جاكوبيان منفردة بالحل، طبِّق طريقة برويدن بأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$ لاحظ أن التقارب ربما يكون بطيئًا أو أنه لا يحدث ضمن عدد معقول من التكرارات.

8. برهن أنه إذا كان $0 \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$، فإن $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$، حيث $\mathbf{z}_1 = (\mathbf{y}^t\mathbf{z}/\|\mathbf{y}\|_2^2)\mathbf{y}$ يكون موازيًا للمتجه $\mathbf{y}$، وأن $\mathbf{z}_2$ عمودي على $\mathbf{y}$.

9. برهن أنه إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ فإن $\det(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t) = 1 + \mathbf{v}^t\mathbf{u}$.

10. أ. استخدم نتيجة التمرين (9) لتبرهن أنه إذا كانت A^{-1} موجودة و$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$، فإن $(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1}$ تكون موجودة إذا وفقط إذا كان $\mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x} \neq -1$.

ب. بضرب الطرف الأيمن في المصفوفة $A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t$، برهن أنه عندما يكون $\mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x} \neq -1$ نحصل على

$$(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x}}$$

11. تعامل التمرين (13) من الفصل (1.8) مع تحديد العلاقة الأسية بطريقة المربعات الصغرى على الصيغة $R = bw^a$ لتقريب مجموعة من البيانات التي تربط الوزن بقاعدة تعرق حشرات العث مودست سفنكس. وتحوّلت المسألة في ذلك التمرين إلى علاقة لوغارتم – لوغارتم، وقد أُدخِل في الفقرة (جـ) حد تربيعي في محاولة لتحسين التقريب. بدلًا من تحويل المسألة، حدّد الثابتين a و b اللذين يجعلان $\sum_{i=1}^{n}(R_i - bw_i^a)^2$ أصغر ما يمكن، لبيانات التمرين (13) من الفصل (1.8).

احسب الخطأ المرتبط بهذا التقريب، وقارنه بالخطأ الناتج من التقريبات السابقة لهذه المسألة.

4.10 طرائق التناقص الأشد انحدارًا Steepest Descent Techniques

تأتي تسمية هذه الطريقة من التطبيق الثلاثي الأبعاد بالإيماء في الاتجاه الأسفل.

إن ميزة طرائق نيوتن وأشباه نيوتن في حلِّ أنظمة المعادلات غير الخطية تكمن في سرعة التقارب حالما عرف تقريب دقيق على نحو كافٍ. أما ضعف هذه الطرائق فيكمن في الحاجة إلى تقريب مبدئي دقيق للحل لكي نضمن التقارب. إن طريقة التناقص الأشد انحدارًا التي تُفترض في هذا الفصل تتقارب إلى الحل فقط خطيًّا، ولكنها عادة ما تتقارب حتى في حالة التقريبات. لذا تستخدم هذه الطريقة لإيجاد تقريبات ذات دقة كافية لتصبح مستخدمة في الطرائق المبنية على طريقة نيوتن بالطريقة نفسها التي تستخدم بها طريقة التنصيف للمعادلة الواحدة.

إن طريقة التناقص الأشد انحدارًا تحدّد نقطة صغرى محلية لدالة متعددة المتغيرات على دالة الصيغة $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

إن هذه الطريقة ذات قيمة بمعزل تامٍّ عن التطبيق المستخدم بوصفه طريقة بدء لحل الأنظمة غير الخطية. (هناك تطبيقات أخرى تُبحث في التمارين).

إن الربط بين تصغير دالة من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ وحل نظام معادلات غير خطية هو بسبب حقيقة أن النظام على الصيغة

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\
\vdots \qquad &\quad \vdots\\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}$$

يكون حلًّا عند $\mathbf{x}=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^t$ تمامًا عندما يكون للدالة g المعرّفة بالصيغة

$$g(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}[f_i(x_1, x_2,\ldots, x_n)]^2$$

القيمة الصغرى صفرًا.

إن طريقة التناقص الأشد انحدارًا لإيجاد قيمة محلية صغرى لدالة ما من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ يمكن وصفها حدسًا كما يأتي:

1. أوجد قيمة g عند نقطة تقريب ابتدائية $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots, x_n^{(0)}\right)^t$.
2. حدِّد اتجاهًا من $\mathbf{x}^{(0)}$ يسهم في تقليل قيمة g.
3. تحرك مسافة مناسبة في هذا الاتجاه، وعبّر عن القيمة الجديدة بالرمز $\mathbf{x}^{(1)}$.
4. كرِّر العمليات من 1 إلى 3 باستخدام $\mathbf{x}^{(1)}$ بدلًا من $\mathbf{x}^{(0)}$.

إن جذر الكلمة اتجاه gradient هو الكلمة اللاتينية gradi التي تعني "تسير"، وبهذا المعنى يكون gradient لسطح ما هو معدل سرعة سيره إلى أعلى التلة.

قبل وصف كيفية اختيار الاتجاه الصحيح والمسافة المناسبة الواجب تحركها في هذا الاتجاه، نحتاج إلى مراجعة بعض نتائج التفاضل والتكامل.

تنص مبرهنة القيمة القصوى **(The Extreme Value Theorem)** على أن للدالة بمتغير واحد القابلة للاشتقاق قيمةً صغرى نسبية، عندما تكون المشتقة صفرًا فقط. لتعميم نتيجة الدوال هذه على متغيرات متعددة؛ نحتاج إلى تعريف الآتي

تعريف 9.10 للدالة $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، نعبّر عن اتجاه g عند $\mathbf{x}=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^t$ بالرمز $\nabla g(\mathbf{x})$ ونعرّفه بالصيغة

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x}),\ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)^t \qquad \blacksquare$$

إن الاتجاه **gradient** للدالة متعدد المتغيرات يشبه مشتقة الدالة وحيدة المتغير، بمعنى أن الدالة المتعددة المتغيرات القابلة للاشتقاق يمكن أن تملك قيمة صغرى نسبية عند x فقط إذا كان اتجاهها عند x هو المتجه الأصغر. يوجد للاتجاه خاصية أخرى مهمة مرتبطة بتصغير دوال متعددة المتغيرات. ليكن $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ متجه الباب في $\mathbb{R}^n$ أي أن

$$||\mathbf{v}||_2^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1$$

تعرف المشتقة المتجهة **(directional derivative)** للدالة g على x في اتجاه v بالصيغة

$$D_{\mathbf{v}}g(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[g(\mathbf{x}+h\mathbf{v}) - g(\mathbf{x})] = \mathbf{v}^t\cdot\nabla g(\mathbf{x})$$

إن المشتقة المتجهة للدالة g على x في اتجاه v تقيس التغير في قيمة الدالة g. وبالنسبة إلى التغير في المتغير في اتجاه v هناك نتيجة في حساب التفاضل والتكامل للدوال متعددة المتغيرات تنص على أنه: عندما يكون g قابلًا للاشتقاق فإن الاتجاه الذي ينتج القيمة الكبرى للمشتقة المتجهة يحدث عندما يُختار v ليكون موازيًا لـِ $\nabla g(\mathbf{x})$، على أن $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. ونتيجة لذلك يكون الاتجاه ذو النقص الأكبر في قيمة g عند x هو الاتجاه المعطى بـِ $-\nabla g(\mathbf{x})$ (انظر شكل (3.10) لتوضيح حالة g دالة بمتغيرين.)

إن الغرض هو تقليل $g(\mathbf{x})$ إلى القيمة الصغرى وهي الصفر، ولذلك فإن الاختيار المناسب للمتجه $\mathbf{x}^{(1)}$ هو

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \alpha \nabla g(\mathbf{x}^{(0)}) \quad \text{لثابت ما } \alpha > 0 \tag{17.10}$$

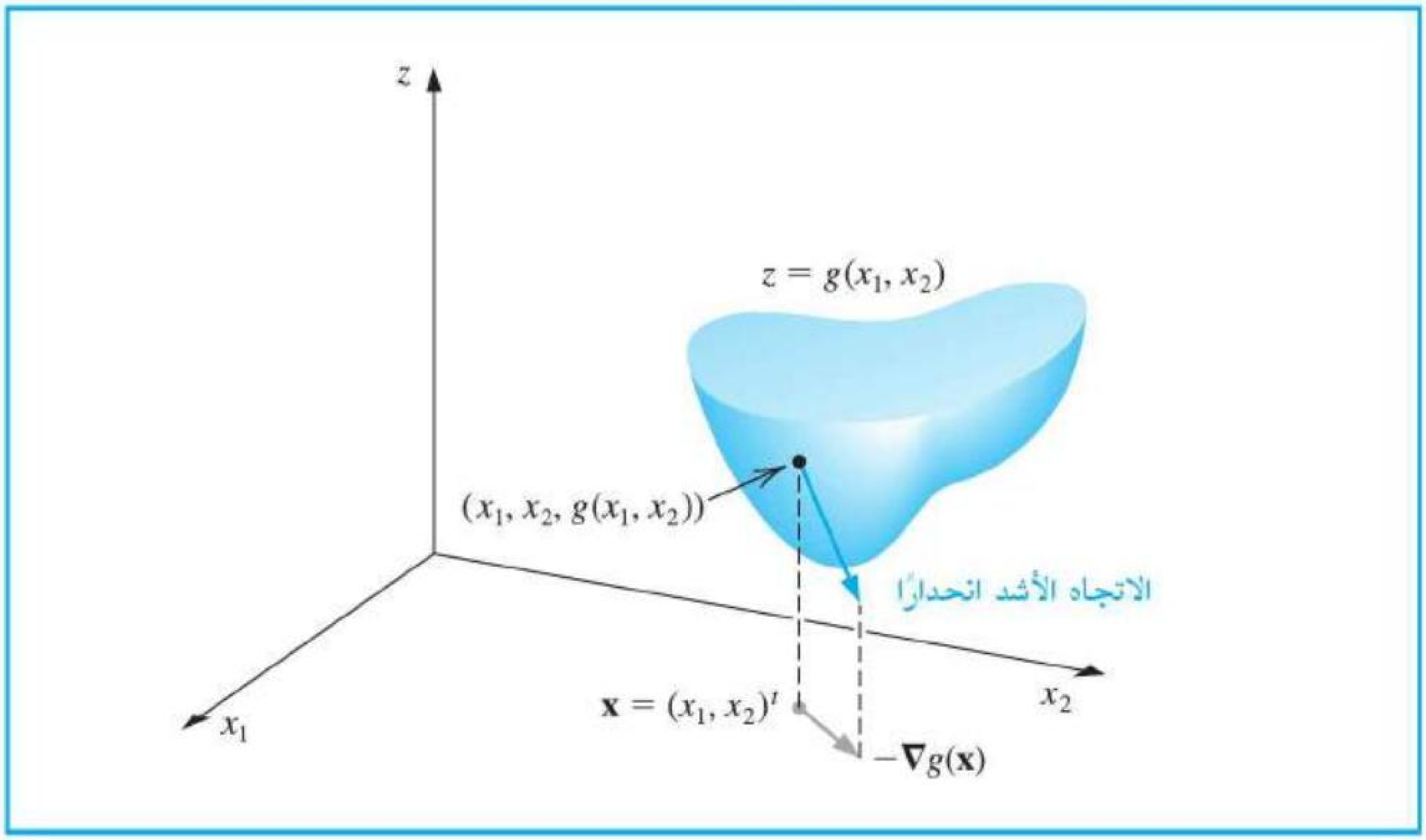
تختزل المسألة الآن إلى اختيار α بحيث يصبح $g(\mathbf{x}^{(1)})$ أقل كثيرًا من $g(\mathbf{x}^{(0)})$

لتحديد الاختيار المناسب لقيمة α، نأخذ الدالة في متغير واحد

$$h(\alpha) = g\left(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha \nabla g\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right) \tag{18.10}$$

إن قيمة α التي تجعل h أقل ما يمكن هي القيمة المطلوبة للمعادلة (17.10).

شكل 3.10



إن إيجاد القيمة الصغرى للدالة h يتطلّب اشتقاق h، ثم حلّ مسألة إيجاد الجذور لتحديد النقاط الحرجة لـِ h، وإن هذه العملية مكلفة جدًّا عمومًا. وبدلًا من ذلك نختار ثلاثة أعداد $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ التي نأمل أن تكون قريبة من النقطة التي تحصل عليها القيمة الصغرى للدالة $h(\alpha)$، ثم نبني كثيرة الحدود التربيعية $P(x)$ التي توجد الاستكمال الداخلي للدالة h عند α_1، α_2 و α_3. نعرّف $\hat{\alpha}$ في $[\alpha_1, \alpha_3]$ بحيث تكون $P(\hat{\alpha})$ القيمة الصغرى في $[\alpha_1, \alpha_3]$، ونستخدم $P(\hat{\alpha})$ لتقريب القيمة الصغرى لـِ $h(\alpha)$، ثم تستخدم $\hat{\alpha}$، قيمة g الصغرى

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \hat{\alpha} \nabla g\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$$

بما أن $g(\mathbf{x}^{(0)})$ متاح، نختار أولًا $\alpha_1 = 0$ لتقليل عمليات الحساب. بعد ذلك نجد عددًا α_3 بحيث $h(\alpha_3) < h(\alpha_1)$ (بما أن α_1 لا تجعل h أصغر ما يمكن فإن عددًا مثل α_3 يكون موجودًا). أخيرًا نختار α_2 ليكون مساويًا لـِ $\alpha_3/2$.

إن القيمة الصغرى لـِ P على $[\alpha_1, \alpha_3]$ تحدث على النقطة الحرجة الوحيدة لـِ P أو على نقطة النهاية اليمنى α_3؛ لأنه على افتراض $P(\alpha_3) = h(\alpha_3) < h(\alpha_1) = P(\alpha_1)$ تحدّد النقطة الحرجة بسهولة؛ لأن P كثيرة حدود تربيعية.

مثال 1 لإيجاد بداية معقولة لتقريب حلِّ النظام غير الخطي

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

نستخدم طريقة التناقص الأشد انحدارًا بأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

ليكن $g(x_1, x_2, x_3) = [f_1(x_1, x_2, x_3)]^2 + [f_2(x_1, x_2, x_3)]^2 + [f_3(x_1, x_2, x_3)]^2$

فإن

$$\begin{aligned}\nabla g(x_1,x_2,x_3) \equiv \nabla g(\mathbf{x}) = \Big(&2f_1(\mathbf{x})\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + 2f_2(\mathbf{x})\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + 2f_3(\mathbf{x})\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\\ &2f_1(\mathbf{x})\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + 2f_2(\mathbf{x})\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + 2f_3(\mathbf{x})\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}),\\ &2f_1(\mathbf{x})\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) + 2f_2(\mathbf{x})\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) + 2f_3(\mathbf{x})\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\mathbf{x})\Big)\\ = 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

عند $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ يكون لدينا $g(\mathbf{x}^{(0)}) = 111.975$ و $z_0 = ||\nabla g(\mathbf{x}^{(0)})||_2 = 419.554$.

افترض $\mathbf{z} = \frac{1}{z_0}\nabla g(\mathbf{x}^{(0)}) = (-0.0214514, -0.0193062, 0.999583)^t$

بأخذ $\alpha_1 = 0$ نحصل على $g_1 = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha_1\mathbf{z}) = g(\mathbf{x}^{(0)}) = 111.975$ وكما اتفق، ضع $\alpha_3 = 1$ لكي يكون $g_3 = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha_3\mathbf{z}) = 93.5649$ وبما أن $g_3 < g_1$ نقبل α_3 ونضع $\alpha_2 = 0.5$.

وهكذا فإن $g_2 = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha_2\mathbf{z}) = 2.53557$.

والآن نشكل كثيرة حدود الاستكمال الداخلي لنيوتن بطريقة الفرق المقسوم الأمامي

$$P(\alpha) = g_1 + h_1\alpha + h_3\alpha(\alpha - \alpha_2)$$

الذي يستكمل

$$g\big(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha\nabla g(\mathbf{x}^{(0)})\big) = g\big(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha\mathbf{z}\big)$$

عند $\alpha_1 = 0$ ، $\alpha_2 = 0.5$ و $\alpha_3 = 1$ ووفقًا لما يلي:

$$\alpha_1 = 0, \quad g_1 = 111.975,$$

$$\alpha_2 = 0.5, \quad g_2 = 2.53557, \quad h_1 = \frac{g_2 - g_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = -218.878,$$

$$\alpha_3 = 1, \quad g_3 = 93.5649, \quad h_2 = \frac{g_3 - g_2}{\alpha_3 - \alpha_2} = 182.059, \quad h_3 = \frac{h_2 - h_1}{\alpha_3 - \alpha_1} = 400.937.$$

وهكذا فإن

$$P(\alpha) = 111.975 - 218.878\alpha + 400.937\alpha(\alpha - 0.5).$$

لدينا $P'(\alpha) = 0$ عندما $\alpha = \alpha_0 = 0.522959$ بما أن $g_0 = g\big(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha_0\mathbf{z}\big) = 2.32762$ أصغر من g_1 و g_3، نضع

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \alpha_0\mathbf{z} = \mathbf{x}^{(0)} - 0.522959\mathbf{z} = (0.0112182, 0.0100964, -0.522741)^t$$

و
$$g(\mathbf{x}^{(1)}) = 2.32762$$

يحوي جدول (5.10) بقية النتائج، والحل الفعلي للنظام غير الخطي هو $(0.5, 0, -0.5235988)^t$ ومن ثم فإن $\mathbf{x}^{(2)}$ يمكن أن يكون كافيًا لكونه تقريبًا مبدئيًا لطريقة نيوتن أو طريقة برويدن. إن من المناسب استخدام إحدى الطرائق سريعة التقارب في هذه المرحلة؛ لأنه يلزم إجراء (70) تكرارًا لطريقة التناقص الأشد انحدارًا حتى نجد أن الخوارزمية (3.10) تطبق طريقة التناقص الأشد انحدارًا لتقريب القيمة الصغرى للدالة $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty < 0.01$. ■

جدول 5.10

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$g(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$
2	0.137860	− 0.205453	− 0.522059	1.27406
3	0.266959	0.00551102	− 0.558494	1.06813
4	0.272734	− 0.00811751	− 0.522006	0.468309
5	0.308689	− 0.0204026	− 0.533112	0.381087
6	0.314308	− 0.0147046	− 0.520923	0.318837
7	0.324267	− 0.00852549	− 0.528431	0.287024

للبدء بالتكرار؛ نحدِّد الصفر قيمة لـِ α_1 والقيمة 1 لـِ α_3. إذا كان $h(\alpha_3) \geq h(\alpha_1)$ نجري عمليات متتالية لقسمة العدد α_3 على 2، ونستخدم قيمة α_3 بالتتالي حتى نحصل على $h(\alpha_3) \geq h(\alpha_1)$ و $\alpha_3 = 2^{-k}$ لقيمة ما k. لاستخدام الطريقة لتقريب حلِّ النظام

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \vdots \qquad &\ \ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

نستخدم ببساطة $\sum_{i=1}^{n} f_i^2$ بدلاً من g.

ALGORITHM
الخوارزمية
3.10

التناقص الأشد انحدارًا Steepest Descent

لتقريب حلٍّ $\mathbf{p}$ لمسألة التصغير إلى أقصى حد
$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \in R^n} g(\mathbf{x})$$
إذا أعطي تقريب مبدئي $\mathbf{x}$:

المدخلات: عدد n من المعادلات والمجاهيل؛ تقريب مبدئي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$، حد خطأ مسموح به TOL، أكبر عدد من التكرارات (التراجعات) N.

المخرجات: حل تقريبي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ أو عبارة فشل.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$.
2	ما دام $(k \leq N)$ فنفذ الخطوات 3 − 15.

3	ضع $g_1 = g(x_1, \ldots, x_n)$ (ملحوظة : $g_1 = g(\mathbf{x}^{(k)})$) $\mathbf{z} = \nabla g(x_1, \ldots, x_n)$ (ملحوظة : $\mathbf{z} = \nabla g(\mathbf{x}^{(k)})$) $z_0 = \|\|\mathbf{z}\|\|_2$
4	إذا كان $z_0 = 0$ نحصل على المخرجات ('Zero gradient') التدرج الصفري. المخرجات $(x_1, \ldots, x_n, g_1)$ (تمت العملية ، يمكن الحصول على قيمة صغرى). توقف.
5	ضع $z = z/z_0$ (اجعل z متجه الباب) $\alpha_1 = 0;$ $\alpha_3 = 1;$ $g_3 = g(\mathrm{x} - \alpha_3 \mathrm{z})$
6	ما دام $(g_3 \geq g_1)$ فنفذ الخطوتين 7 و 8.
7	ضع $\alpha_3 = \alpha_3/2;$ $g_3 = g(\mathrm{x} - \alpha_3 \mathrm{z})$
8	إذا كان $\alpha_3 < TOL/2$ نحصل على المخرجات(لا يوجد تحسن محتمل). المخرجات $(x_1, \ldots, x_n, g_1)$ (تمت العملية ، ويمكن الحصول على قيمة صغرى). توقف
9	ضع $\alpha_2 = \alpha_3/2$ $g_2 = g(\mathrm{x} - \alpha_2 \mathrm{z})$
10	ضع $h_1 = (g_2 - g_1)/\alpha_2;$ $h_2 = (g_3 - g_2)/(\alpha_3 - \alpha_2)$ $h_3 = (h_2 - h_1)/\alpha_3.$ (ملحوظة : لقد استخدمت معادلة نيوتن ذات الفرق المقسوم إلى الأمام لإيجاد) التربيع $P(\alpha) = g_1 + h_1\alpha + h_3\alpha(\alpha - \alpha_2)$ الذي يستوفي $h(\alpha)$ عند $\alpha = 0, \alpha = \alpha_2, \alpha = \alpha_3$).
11	ضع $\alpha_0 = 0.5(\alpha_2 - h_1/h_3)$ (تحدث النقطة الحرجة لـ P عند α_0). $g_0 = g(x - \alpha_0 z)$
12	أوجد α من $\{\alpha_0, \alpha_3\}$ بحيث $g = g(x - \alpha z) = min\{g_0, g_3\}$.
13	ضع $x = x - \alpha z$.
14	إذا كان $\|g - g_1\| < TOL$ فعندئذ تكون المخرجات $(x_1, \ldots, x_n, g)$ (كانت العملية ناجحة). توقف.
15	ضع $k = k + 1$.



16	المخرجات (تم تخطي العدد الأكبر من التكرارت N). (العملية لم تنجح). توقف.

■

يوجد كثير من البدائل في طريقة التناقص الأشد انحدارًا، ويتضمن بعضها طرائق معقدة لتحديد القيمة α التي تنتج القيمة الصغرى للدالة أحادي المتغير h المعرّفة بالمعادلة (18.10). طرائق أخرى كثيرة تستخدم حدود تايلور ذات الأبعاد المتعددة لتحل محل الدالة الأصلية g ذي المتغيرات المتعددة، ثم تجد القيمة الصغرى لكثيرة الحدود بدلاً من g.

ومع وجود بعض المزايا لبعض هذه الطرائق التي شرحت، فإن طرائق التناقص الأشد جميعها انحدارًا ذات تقارب خطي عمومًا، ويكون التقارب فيها مستقلًا عن التقريب المبدئي.

وفي بعض حالات هذه الطرائق يمكن أن يحصل التقارب فيها على قيمة ما غير القيمة الصغرى المطلقة للدالة g. ويمكن الرجوع إلى [OR] أو [RR] للحصول على شرح أوفى لطرائق التناقص الأشد انحدارًا.

مجموعة التمارين 4.10 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة التناقص الأشد انحدارًا آخذًا الخطأ المسموح به $TOL = 0.05$، لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية:

أ. $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$
$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$

ب. $3x_1^2 - x_2^2 = 0$
$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$

ج. $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi$
$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0$

د. $\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$
$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$

2. استخدم طريقة التناقص الأشد انحدارًا آخذًا الخطأ المسموح به $TOL = 0.05$، لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية:

أ. $15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$
$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$
$x_2^3 - 25x_3 = -22$

ب. $10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$
$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$
$8x_2x_3 + 4 = 0$

ج. $x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0$
$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0$
$x_2^2 - 2x_1x_3 = 4$

د. $x_1 + \cos(x_1x_2x_3) - 1 = 0$
$(1 - x_1)^{1/4} + x_2 + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 - 1 = 0$
$-x_1^2 - 0.1x_2^2 + 0.01x_2 + x_3 - 1 = 0$

3. استخدم نتائج التمرين (1) وطريقة نيوتن لتقريب حلول الأنظمة الخطية في التمرين (1) ضمن 10^{-6}.

4. استخدم نتائج التمرين (2) وطريقة نيوتن لتقريب حلول الأنظمة الخطية في التمرين (2) ضمن 10^{-6}.

5. استخدم طريقة التناقص الأشد انحدارًا لتقريب القيم الصغرى ضمن 0.005 للدوال الآتية :

أ. $g(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2) + \sin x_1 + \cos x_2$

ب. $g(x_1, x_2) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$

ج. $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2.5x_2 - x_3 + 2$

د. $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 2x_2^4 + 3x_3^4 + 1.01$

6. أ.برهن أن كثيرة الحدود التربيعية

$$P(\alpha) = g_1 + h_1\alpha + h_3\alpha(\alpha - \alpha_2)$$

تعمل على استكمال الدالة h المعرّفة في (18.10)

$h(\alpha) = g\left(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha\nabla g(\mathbf{x}^{(0)})\right)$ عند $\alpha_3, \alpha_2, \alpha = 0$.

ب.أثبت أن النقطة الحرجة لكثيرة الحدود P تحدث عند

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 - \frac{h_1}{h_3}\right)$$

5.10 طرائق الاتصال والتوفيق Homotopy and Continuation Methods

الناقل (a homotopy) هو تكوين متصل، أي دالة ينقل الفترة الحقيقية نقلاً متصلاً إلى مجموعة من الدوال.

إن طرائق الاتصال *continuation* أو الناقل *Homotopy* للأنظمة غير الخطية تضع المسألة المطلوب حلُّها ضمن مجموعة من المسائل. ولحلِّ مسألة بالتحديد على الصيغة

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

التي لها الحل غير المعلوم $\mathbf{x}^*$، نفترض عائلة من المسائل موصوفة باستخدام وسيط λ تأخذ قيمتها في [0, 1]. إن أي مسألة ذات حلٍّ معلوم $\mathbf{x}(0)$ تقابل $\lambda = 0$، والمسألة ذات الحل غير المعلوم $\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{x}(1)$ تقابل $\lambda = 1$.

افترض على سبيل المثال $\mathbf{x}(0)$ هو تقريب مبدئي لحلِّ المسألة $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. عرّف بالصيغة

$$\mathbf{G} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda\mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)\,[\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))\,] = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (\lambda - 1)\mathbf{F}(\mathbf{x}(0)) \qquad (19.10)$$

سنحدد حلًّا للمعادلة

$$\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

لقيم مختلفة للوسيط λ.

عندما $\lambda = 0$ تأخذ هذه المعادلة الصيغة

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$

ويكون $\mathbf{x}(0)$ حلًّا. عندما $\lambda = 1$، تأخذ المعادلة الصيغة

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(1, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

ويكون $\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{x}(1)$ حلًّا.

إن الدالة $\mathbf{G}$ مع الوسيط λ تزودنا بعائلة من الدوال التي تقودنا من القيمة المعلومة $\mathbf{x}(0)$ إلى الحل $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(1)$.

إن الدالة $\mathbf{G}$ تسمى ناقلاً (homotopy) بين الدالة $\mathbf{G}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$ والدالة $\mathbf{G}(1, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$

إن مسألة الاتصال (continuation) هي "لتحديد طريقة للسير من حلٍّ معلوم $\mathbf{x}(0)$ للمعادلة $\mathbf{G}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ إلى حلّ غير معلوم $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$ للمعادلة $\mathbf{G}(1, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ التي تحلّ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$".

نفترض أولاً أن $\mathbf{x}(\lambda)$ هو الحل الوحيد للمعادلة

$$\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{لكل} \quad \lambda \in [0, 1] \tag{20.10}$$

يمكن النظر إلى المجموعة $\{\mathbf{x}(\lambda) \mid 0 \le \lambda \le 1\}$ ذات الوسيط بوصفها منحنى في $\mathbb{R}^n$ من $\mathbf{x}(0)$ إلى $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$. وتجد طريقة الاتصال متتالية من الخطوات على هذا المنحنى مقابلة لِـ $\{\mathbf{x}(\lambda_k)\}_{k=0}^{m}$ حيث $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m = 1$.

إذا كانت الدوال $\lambda \to \mathbf{x}(\lambda)$ و $\mathbf{G}$ قابلة للاشتقاق فإن اشتقاق المعادلة (20.10) بالنسبة إلى λ يعطي

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}'(\lambda)$$

ولإيجاد $\mathbf{x}'(\lambda)$ نحصل على

$$\mathbf{x}'(\lambda) = -\left[\frac{\partial \mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \lambda}$$

إن هذا نظام من المعادلات التفاضلية بحالة ابتدائية $\mathbf{x}(0)$.

بما أن

$$\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda)) + (\lambda - 1)\mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$

يمكننا تحديد كل من

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}(\lambda)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\lambda)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}(\lambda)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\lambda)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}(\lambda)) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\lambda)) \end{bmatrix} = J(\mathbf{x}(\lambda))$$

مصفوفة جاكوبيان و

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \lambda} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$

ولذلك فإن نظام المعادلات التفاضلية يصبح

$$\mathbf{x}'(\lambda) = -[J(\mathbf{x}(\lambda))]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}(0)) \quad \text{لِـ} \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{21.10}$$

بالحالة الابتدائية $\mathbf{x}(0)$.

إن مبرهنة الآتية تعطي الشروط التي بموجبها يمكن استخدام طريقة الاتصال.

(انظر [OR, pp. 230–231]).

مبرهنة 10.10 ليكن $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ قابلاً للاشتقاق على نحو متصل لكل $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. افترض أن مصفوفة جاكوبيان $J(\mathbf{x})$ لها معكوس (لها نظير ضربي) لـ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ جميعها، ويوجد ثابت M بحيث $\|J(\mathbf{x})^{-1}\| \le M$ لجميع

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. عندئذ يوجد لكل $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ دالة وحيدة $\mathbf{x}(\lambda)$ بحيث $\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = \mathbf{0}$ لِـ λ جميعها في $[0, 1]$.

وبالإضافة إلى ذلك فإن $\mathbf{x}(\lambda)$ قابلة للاشتقاق على نحو متصل، ويكون

$$\mathbf{x}'(\lambda) = -J(\mathbf{x}(\lambda))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$ لكل $\lambda \in [0, 1]$ ■

ويُظهر المثال الآتي صيغة نظام المعادلات التفاضلية المرتبط بنظام معادلات غير خطية.

مثال 1 افترض أن النظام غير الخطي

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - 0.5 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إن مصفوفة جاكوبيان هي

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2x_3 & x_2 \sin x_2x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

افترض أن $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)^t$ ليصبح

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(0)) = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$

نظام المعادلات التفاضلية هو

$$\begin{bmatrix} x_1'(\lambda) \\ x_2'(\lambda) \\ x_3'(\lambda) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2x_3 & x_2 \sin x_2x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$ ■

وإن نظام المعادلات التفاضلية الذي نحتاج إلى حلّه فيما يتعلق بمسألة الاتصال التي لدينا يكون عمومًا على الصيغة

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \phi_1(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \phi_2(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{d\lambda} = \phi_n(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \\ \phi_2(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix} = -J(x_1, \ldots, x_n)^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(0)) \\ f_2(\mathbf{x}(0)) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}(0)) \end{bmatrix} \qquad (22.10)$$

لكي نستخدم طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة لحلِّ هذا النظام، نختار أولًا عددًا صحيحًا $N > 0$ ونفترض $h = (1-0)/N$. نجزئ الفترة $[0, 1]$ إلى N من الفترات الجزئية بنقاط الشبكة $\lambda_j = jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, N$.

نستخدم الرمز w_{ij} ليعبر عن تقريب لـِ $x_i(\lambda_j)$ لكل $j = 0, 1, \ldots, N$ و $i = 1, \ldots, n$ وللحالات الابتدائية نفترض

$$w_{1,0} = x_1(0), \quad w_{2,0} = x_2(0), \quad \ldots, \quad w_{n,0} = x_n(0).$$

افترض أن $w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{n,j}$ قد حُسبت، نحصل على $w_{1,j+1}, w_{2,j+1}, \ldots, w_{n,j+1}$ باستخدام المعادلات $k_{1,i} = h\phi_i(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{n,j})$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$k_{2,i} = h\phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \ldots, w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{1,n}\right)$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

$$k_{3,i} = h\phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \ldots, w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{2,n}\right)$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

$$k_{4,i} = h\phi_i(\lambda_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \ldots, w_{n,j} + k_{3,n})$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

وأخيرًا

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \tfrac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right)$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

نستخدم التعبير المتجهي

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ \vdots \\ k_{1,n} \end{bmatrix}, \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,2} \\ \vdots \\ k_{2,n} \end{bmatrix}, \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} k_{3,1} \\ k_{3,2} \\ \vdots \\ k_{3,n} \end{bmatrix}, \mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} k_{4,1} \\ k_{4,2} \\ \vdots \\ k_{4,n} \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{w}_j = \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{n,j} \end{bmatrix}$$

لكي نبسّط الشرح،

تعطينا المعادلة (22.10) $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\lambda_0) = \mathbf{w}_0$ ولكل $j = 0, 1, \ldots, N$

$$\mathbf{k}_1 = h \begin{bmatrix} \phi_1(\lambda_j, w_{1,j}, \ldots, w_{n,j}) \\ \phi_2(\lambda_j, w_{1,j}, \ldots, w_{n,j}) \\ \vdots \\ \phi_n(\lambda_j, w_{1,j}, \ldots, w_{n,j}) \end{bmatrix} = h\left[-J(w_{1,j}, \ldots, w_{n,j})\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$

$$= h\left[-J(\mathbf{w}_j)\right]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}(0));$$

$$\mathbf{k}_2 = h\left[-J\left(\mathbf{w}_j + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right)\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0));$$

$$\mathbf{k}_3 = h\left[-J\left(\mathbf{w}_j + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right)\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0));$$

$$\mathbf{k}_4 = h\left[-J\left(\mathbf{w}_j + \mathbf{k}_3\right)\right]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}(0));$$

و

$$\mathbf{x}(\lambda_{j+1}) = \mathbf{x}(\lambda_j) + \tfrac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) = \mathbf{w}_j + \tfrac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

وأخيرًا يكون $\mathbf{x}(\lambda_n) = \mathbf{x}(1)$ هو التقريب لِـ $\mathbf{x}^*$.

مثال 2 سنقرب حلَّ النظام

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - 0.5 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1, x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إن مصفوفة جاكوبيان هي

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2x_3 & x_2 \sin x_2x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

ضع $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)^t$؛ لكي يكون

$$F(\mathbf{x}(0)) = (-1.5, 0.25, 10\pi/3)^t$$

بأخذ $N = 4$ و $h = 0.25$ نحصل على

$$\mathbf{k}_1 = h[-J(\mathbf{x}^{(0)})]^{-1}F(\mathbf{x}(0)) = 0.25 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -16.2 & 1 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$

$$= (0.125, -0.004222203325, -0.1308996939)^t$$

$$\mathbf{k}_2 = h[-J(0.0625, -0.002111101663, -0.06544984695)]^{-1}(-1.5, 0.25, 10\pi/3)^t$$

$$= 0.25\begin{bmatrix} 3 & -0.9043289149\times 10^{-5} & -0.2916936196\times 10^{-6} \\ 0.125 & -15.85800153 & 0.9978589232 \\ 0.002111380229 & -0.06250824706 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$

$$= (0.1249999773, -0.003311761993, -0.1309232406)^t$$

$$\mathbf{k}_3 = h[-J(0.06249998865, -0.001655880997, -0.0654616203)]^{-1}(-1.5, 0.25, 10\pi/3)^t$$

$$= (0.1249999844, -0.003296244825, -0.130920346)^t$$

$$\mathbf{k}_4 = h[-J(0.1249999844, -0.003296244825, -0.130920346)]^{-1}(-1.5, 0.25, 10\pi/3)^t$$

$$= (0.1249998945, -0.00230206762, -0.1309346977)^t$$

و

$$\mathbf{x}(\lambda_1) = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0 + \tfrac{1}{6}[\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4]$$
$$= (0.1249999697, -0.00329004743, -0.1309202608)^t.$$

وبالاستمرار نحصل على

$$\mathbf{x}(\lambda_2) = \mathbf{w}_2 = (0.2499997679, -0.004507400128, -0.2618557619)^t$$

$$\mathbf{x}(\lambda_3) = \mathbf{w}_3 = (0.3749996956, -0.003430352103, -0.3927634423)^t$$
$$\mathbf{x}(\lambda_4) = \mathbf{x}(1) = \mathbf{w}_4 = (0.4999999954, 0.126782 \times 10^{-7}, -0.5235987758)^t.$$

إن النتائج التي حصلنا عليها هنا دقيقة جدًّا؛ لأن الإجابة الفعلية هي $(0.5, 0, -0.52359877)^t$ تقريبًا. ■

في طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة، يتطلب حساب كل $\mathbf{w}_j$ إيجاد معكوس المصفوفة أربع مرات، واحدة عند حساب كل من $\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4$. وهكذا فإن استخدام N خطوة يتطلب $4N$ من معكوس المصفوفات. وبالمقارنة فإن طريقة نيوتن تتطلب إيجاد معكوس المصفوفة في كل تكرار. ولذلك فإن العمل المطلوب في طريقة رونج – كوتا يساوي $4N$ تقريبًا من التكرارات في طريقة نيوتن.

ويكون أحد البدائل باستخدام طريقة رونج – كوتا من الرتبة الثانية مثل طريقة أويلر المعدّلة، أو حتى طريقة أويلر لتخفيض عدد مرات إيجاد المعكوس. وهناك إمكانية ثانية باستخدام قيم N صغيرة. ويشرح المثال الآتي هذه الأفكار.

مثال 3 يلخص جدول (6.10) المقارنة بين طريقة أويلر وطريقة النقطة الوسيطية وطريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة عند تطبيق هذه الطرائق في المثال (2) بأخذ التقريب المبدئي $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)^t$. ■

جدول 6.10

الطريقة	N	$\mathbf{x}(1)$	عدد عمليات الانعكاس
يولر	1	$(0.5, -0.0168888133, -0.5235987755)^t$	1
يولر	4	$(0.499999379, -0.004309160698, -0.523679652)^t$	4
النقطة المتوسطة	1	$(0.4999966628, -0.00040240435, -0.523815371)^t$	2
النقطة المتوسطة	4	$(0.500000066, -0.00001760089, -0.5236127761)^t$	8
رونج–كوتا	1	$(0.4999989843, -0.1676151 \times 10^{-5}, -0.5235989561)^t$	4
رونج–كوتا	4	$(0.4999999954, 0.126782 \times 10^{-7}, -0.5235987758)^t$	16

يمكن استخدام طريقة الاتصال بوصفها طريقة منفصلة لا تتطلب اختيارًا جيدًا خصوصًا للمتجه

$\mathbf{x}(0)$. وعلى كل حال يمكن استخدام الطريقة لتعطي تقريبًا مبدئيًا لطريقة نيوتن أو برويدن. فعلى سبيل المثال إن النتيجة التي حصلنا عليها في مثال (2) باستخدام طريقة أويلر و $N = 2$ يمكن أن تكون كافية للبدء بطريقتي نيوتن أو برويدن الأكثر كفاءة، وتكون أفضل لهذا الغرض من طرائق الاتصال التي تتطلب حسابًا أكثر.

نلاحظ في طرائق رونج – كوتا أن الخطوات مماثلة لِـ

$$\mathbf{k}_i = h[-J(\mathbf{x}(\lambda_i) + \alpha_{i-1}\mathbf{k}_{i-1})]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$

ويمكن كتابتها بوصفها حلًا للنظام الخطي

$$J\big(\mathbf{x}(\lambda_i) + \alpha_{i-1}\mathbf{k}_{i-1}\big)\mathbf{k}_i = -h\mathbf{F}(\mathbf{x}(0)) \text{ للمتجه } \mathbf{k}_i$$

ALGORITHM
الخوارزمية
4.10

خوارزمية الاتصال Continuation Algorithm

لإيجاد تقريب حلِّ النظام غير الخطي $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ عندما يعطي تقريبًا مبدئيًا $\mathbf{x}$،

المدخلات: عدد n من المعادلات والمجاهيل، عدد صحيح $N > 0$، تقريب مبدئي $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

المخرجات: حل تقريبي $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = 1/N$; $\mathbf{b} = -h\mathbf{F}(\mathbf{x})$
2	لكل $i = 1, 2, \ldots, N$ نفذ الخطوات 3 – 7.
3	ضع $A = J(\mathbf{x})$ حلَّ النظام الخطي $A\mathbf{k}_1 = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{k}_1$.
4	ضع $A = J(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$ حلَّ النظام الخطي $A\mathbf{k}_2 = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{k}_2$.
5	ضع $A = J(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2)$ حلَّ النظام الخطي $A\mathbf{k}_3 = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{k}_3$.
6	ضع $A = J(\mathbf{x} + \mathbf{k}\ )$ حلَّ النظام الخطي $A\mathbf{k}_3 = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{k}_4$.
7	ضع $\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)/6$
8	المخرجات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ توقف.

■

EXERCISE SET مجموعة التمارين 5.10

1. للنظام غير الخطي

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 - 6 = 0$$

حلان $(0.625204094, 2.179355825)'$ و $(2.109511920, -1.334532188)'$

استخدم طريقة الاتصال وطريقة أويلر حيث $N = 2$ لتقريب هذين الحلين حيث

أ. $\mathbf{x}(0) = (0, 0)'$ ب. $\mathbf{x}(0) = (1, 1)'$ ج. $\mathbf{x}(0) = (3, -2)'$

2. كرِّر التمرين (1) باستخدام طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة و $N = 1$.

3. استخدم طريقة الاتصال وطريقة أويلر بأخذ $N = 2$ على الأنظمة غير الخطية الآتية:

أ.
$$4x_1^2 - 20x_1 + \tfrac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$$
$$\tfrac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

ب.
$$\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$$
$$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$$

ج.
$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

د.
$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0$$
$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

4. استخدم طريقة الاتصال وطريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة و$N = 1$ على الأنظمة غير الخطية الآتية، باستخدام $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ هل الإجابات هنا يمكن مقارنتها بطريقة نيوتن أم أنها تقريبات مبدئية مناسبة لطريقة نيوتن؟

أ.
$$x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12$$
$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25$$
قارن مع 10.2(5c)

ب.
$$5x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$
قارن مع 10 2(5d)

ج.
$$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$$
$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$$
$$x_2^3 - 25x_3 = -22$$
قارن مع 10.2(6c)

د.
$$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$$
$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$$
$$8x_2x_3 + 4 = 0$$
قارن مع 10.2(6d)

5. كرِّر التمرين (4) باستخدام التقريبات المبدئية كما يأتي:

أ. من 10.2(3c) ب. من 10.2(3d) ج. من 10.2(4c) د. من 10.2(4d)

6. استخدم طريقة الاتصال وطريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة و$N = 1$ على التمرين (7) في الفصل (2.10). هل النتائج بجودة تلك التي حصلنا عليها هناك؟

7. كرِّر التمرين (5) مستخدمًا $N = 2$.

8. كرِّر التمرين (8) في الفصل (2.10) باستخدام طريقة الاتصال وطريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة بأخذ $N = 1$.

9. كرِّر التمرين (9) في الفصل (2.10) باستخدام طريقة الاتصال وطريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة بأخذ $N = 2$.

10. برهن أن طريقة الاتصال وطريقة أويلر بأخذ $N = 1$ تعطيان النتيجة نفسها لطريقة نيوتن بالتكرار الأول، أي أنه باستخدام $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$ نحصل دائمًا على $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^{(1)}$.

11. برهن أن الناقل المتصل (homotopy)، $G(\lambda, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - e^{-\lambda}F(\mathbf{x}(0))$ المستخدم في طريقة

الاتصال ضمن طريقة أويلر و $h = 1$ يكافئ أيضًا طريقة نيوتن لأي $\mathbf{x}^{(0)}$، أي أنه بأخذ $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$ نحصل على $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^{(1)}$.

12. استخدم الاختصار CMRK4 ليعني طريقة الاتصال مع طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة. بعد إتمام التمارين (4، 5، 6، 7، 8 و 9) أجب عن الأسئلة الآتية:

أ. هل CMRK4 مع $N = 1$ متقارنة مع طريقة نيوتن؟ ادعم إجابتك بالنتائج من تمارين سابقة.

ب. هل يجب استخدام CMRK4 مع $N = 1$ بوصفها طريقة لإيجاد تقريب مبدئي لطريقة نيوتن؟ ادعم إجابتك بالنتائج من تمارين سابقة.

جـ. كرِّر الفقرة (أ) بالطريقة CMRK4 مع $N = 2$.

د. كرِّر الفقرة (ب) بالطريقة CMRK4 مع $N = 2$.

Survey Methods and Software 6.10 مسح الطرائق والبرمجيات

لقد درسنا في هذا الباب طرائق لتقريب حلول أنظمة غير خطية

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

وإن طريقة نيوتن للأنظمة تتطلب تقريبًا مبدئيًّا جيدًا $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^t$، وتنتج متتالية

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$$

تتقارب بسرعة لحلٍّ $\mathbf{p}$ إذا كان $\mathbf{x}^{(0)}$ قريبًا من $\mathbf{p}$ على نحو كافٍ. وعلى كل حال فإن طريقة نيوتن تتطلب تقييمًا أو تقريبًا n^2 من المشتقات الجزئية وحل نظام خطي n في n عند كل خطوة، مما يتطلب $O(n^3)$ من العمليات الحسابية. وتقلل طريقة برويدن مقدار الحساب في كل خطوة دون التقليل من سرعة التقارب على نحو كبير.

إن هذه الطريقة تستخدم مصفوفة جاكوبيان J مع المصفوفة A_{k-1} التي يُحسب معكوسها (نظيرها الضربي) مباشرة عند كل خطوة. وتختزل هذه الطريقة العمليات الحسابية من $O(n^3)$ إلى $O(n^2)$. وبالإضافة إلى ذلك فإن التقييمات الدّالية العددية الوحيدة المطلوبة هي تقييم الدوال f_i المتوفرة في n^2 من التقييمات الدّالية العددية في كل خطوة. وتتطلب طريقة برويدن أيضًا تقريبًا مبدئيًّا جيدًا. لقد عُرضت طريقة المنحدر الأشد انحدارًا بوصفها طريقة للحصول على تقريبات مبدئية جيدة لطريقتي نيوتن وبرويدن. وعلى الرغم من أن طريقة التناقص الأشد انحدارًا لا تعطي متتالية سريعة التقارب، فإنها لا تتطلب تقريبًا مبدئيًّا جيدًا.

إن طريقة التناقص الأشد انحدارًا تقرّب القيمة الصغرى لدالة كثيرة المتغيرات g. ولغرض التطبيق

نختار

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2$$

إن القيمة الصغرى للدالة g هي 0، التي تحدث عندما تكون الدوال f_i أصفارًا على نحو مؤقت. وتستخدم طرائق الاتصال والنقل المتصل أيضًا للأنظمة غير الخطية، وهي موضوع البحوث الجارية. (انظر [AG]). تتضمن هذه الطرائق مسألة معطاة

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

في عائلة مسائل أحادية الوسيط باستخدام الوسيط λ التي تأخذ قيمًا في $[0,1]$. إن المسألة الأصلية تقابل $\lambda = 1$، وأي مسألة ذات حل معلوم تقابل $\lambda = 0$. فعلى سبيل المثال، مجموعة المسائل

$$G(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}$$ لـ $0 \leq \lambda \leq 1$ جميعها

التي فيها المتجه الثابت $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ تشكل ناقلاً متصلاً (homotopy). عندما تكون $\lambda = 0$ يكون الحل $\mathbf{x}(\lambda = 0) = \mathbf{x}_0$. ويكون حل المسألة الأصلية مقابلًا للمتجه $\mathbf{x}(\lambda = 1)$، وتحاول طريقة الاتصال تحديد $\mathbf{x}(\lambda = 1)$ بحلّ متتالية المسائل التي تقابل $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m = 1$

إن التقريب المبدئي لحل

$$\lambda_i \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda_i)(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}$$

يكون الحل $\mathbf{x}(\lambda = \lambda_{i-1})$ للمسألة

$$\lambda_{i-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda_{i-1})(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}$$

إن حقيبة هومباك في نتلب (Hompack in netlib) تحل نظام معادلات غير خطية باستخدام طرائق متعددة للناقل المتصل. وإن طرائق الأنظمة غير الخطية في مكتبتي IMSL و NAG مبنية على البرنامجين HYBRD و HYBRJ الموجودين في MINPACK، وهي حقيبة لمجال عام. وتستخدم كلتا الطريقتين طريقة ليفنبرج – ماكوارد (Levenberg - Marquardt)، التي هي معدل موزون من طريقة نيوتن وطريقة التناقص الأشد انحدارًا. ويتحيز الوزن نحو طريقة التناقص الأشد انحدارًا حتى يُكتشف تقارب ما، وعند ذلك الوقت ينزاح الوزن نحو طريقة نيوتن الأسرع تقاربًا. وتستخدم البرمجية HYBRD الفرق المحدود لتقريب الجاكوبيان، وتتطلب البرمجية HYBRJ برنامج المستخدم لحساب الجاكوبيان.

إن برنامج NEQNF وهو IMSL يحلُّ نظامًا غير خطي دون استخدام جاكوبيان المزود بمستخدم. والبرنامج NEQNJ مماثل للبرنامج NEQNF إلا أن على المستخدم أن يزوده ببرنامج فرعي لحساب الجاكوبيان.

وفي مكتبة NAG نجد C05NBF مماثلاً لـِ HYBRD، والبرنامج C05PBF مماثل لـِ C05NBF إلا أن على المستخدم أن يزوده ببرنامج فرعي لحساب الجاكوبيان. إن البرنامج C05PBF مبني على HYBRJ في الحقيبة MINPACK. وتحتوي NAG أيضًا على تعديلات أخرى لطريقة ليفنبرج – ماكوراد.

إن معالجة مستفيضة لطرائق حل أنظمة المعادلات غير الخطية يمكن الحصول عليها في أورتيغا ورينبولت Ortega & Rheinbolt [OR]، وفي دينس وشنابل Dennis & Schnabel [DenS].

أما التطويرات الحديثة على طرائق التكرار والإعادة فيمكن الحصول عليها في أرغروس وزيداروفسكي Argyros & Szidarovszky [AS]، أما المعلومات عن استخدام طرائق الاتصال فهي متاحة في ألغور وجورج Allgower & Georg [AG].

الباب

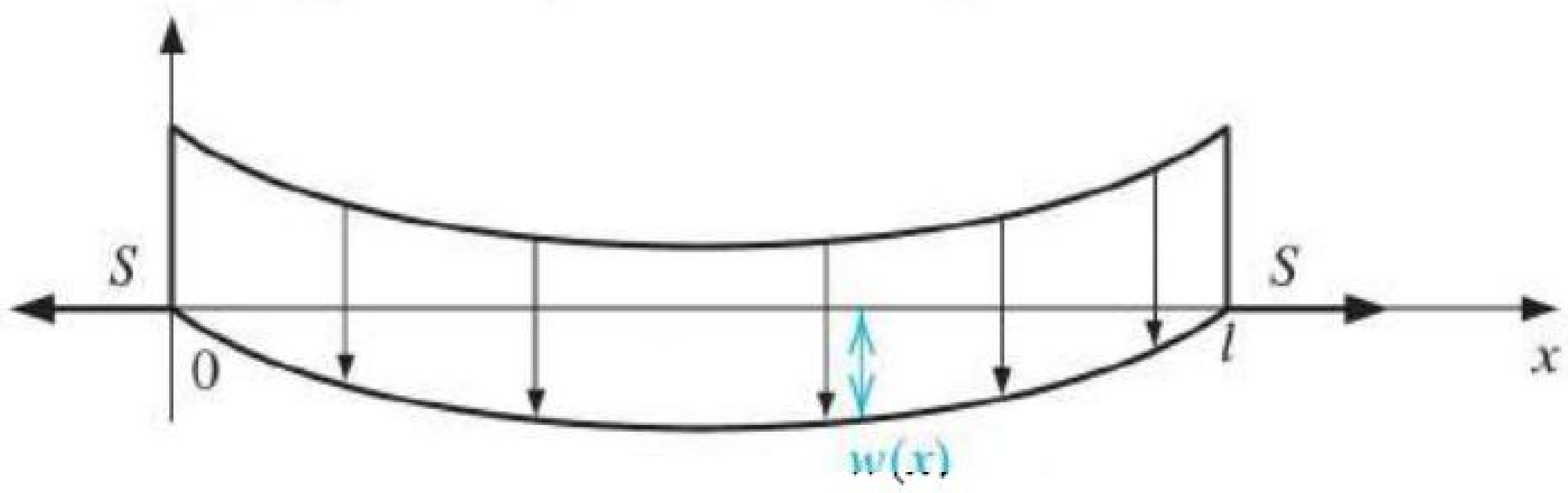
11

مسائل القيمة الحدية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية

Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations

مقدمة

ثمة مسألة عامة في الهندسة المدنية تتعلق بالإزاحة لقضيب ذي مقطع مستطيل وتحت تأثير وزن منتظم، أما نهايات القضيب فمدعومة بحيث لا يطرأ عليها أي إزاحة.



المعادلة التفاضلية التي تقرب الحالة الفيزيائية هي بالصيغة

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x-l)$$

حيث $w(x)$ عبارة عن إزاحة المسافة x من النهاية اليسرى للقضيب، وتمثِّل l, q, E, S و I طول القضيب، كثافة الوزن المنتظم، معامل المرونة، الضغط على النهايات واللحظة المركزية للسكون على التوالي. ولما كانت الإزاحة لا تظهر عند نهايات القضيب، فإن لدينا شرطين حديين أيضًا

$$w(0) = w(l) = 0$$

وعندما يكون القضيب منتظم الكثافة، فإن حاصل الضرب EI يكون ثابتًا، وإن الحل الصحيح يوجد بسهولة. وعندما لا تكون الكثافة منتظمة، فإن لحظة السكون I عبارة عن دالة حول x ويتطلب الموضوع أساليب تقريب. وقد أُخذ في الحسبان مسائل من هذا النوع في التمرين 7 من الفصل (3.11) والتمرين (6) من الفصل (4.11).

المعادلات التفاضلية في الباب الخامس هي من الرتبة الأولى، ولها شرط ابتدائي واحد لتحقيقه. وأخيرًا نرى في هذا الباب أن الأساليب يمكن تعميمها على أنظمة من المعادلات، ثم على معادلات من الرتبة أعلى. ونوضح في هذا الباب كيفية تقريب حل مسائل القيمة الحدية boundary-value المعادلات التفاضلية مع شروط تُفرض عند نقاط مختلفة. وبالنسبة إلى المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، فيتحدد شرط واحد فقط، لذلك لا وجود للتمييز ما بين مسائل القيمة الابتدائية ومسائل القيمة الحدية. وسنفترض المعادلات من الرتبة الثانية مع قيمتين حديتين.

وتُوضّح المسائل الفيزيائية التي تعتمد على الموقع وليس على الزمن بدلالة المعادلات التفاضلية مع شروط تُفترض عند أكثر من نقطة واحدة. وتتضمن مسائل القيمة الحدية ذات النقطتين ضمن هذا الباب معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالصيغة

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b \tag{1.11}$$

معًا مع الشروط الحدية

$$y(a) = \alpha \quad \text{و} \quad y(b) = \beta \tag{2.11}$$

1.11 طريقة الإطلاق الخطي The Linear Shooting Method

تعطي مبرهنة الآتية شروطًا عامة تضمن كون حل مسألة القيمة الحدية من الرتبة الثانية موجودًا ووحيدًا. ويمكن إيجاد برهان هذه مبرهنة في [Keller, H].

مبرهنة 1.11 افترض أن الدالة f في مسألة القيمة الحدية

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

متصلة على المجموعة

$$D = \{ (x, y, y') \mid a \le x \le b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$$

وأن كلًّا من المشتقتين الجزئيتين f_y و $f_{y'}$ متصلة على D أيضًا. إذا كان

(i) $f_y(x, y, y') > 0$ لكل $(x, y, y') \in D$

(ii) وإذا وجد M حيث $|f_{y'}(x, y, y')| \le M$ لكل $(x, y, y') \in D$

فإنه يوجد حل وحيد لمسألة القيمة الحدية ■

مثال 1 إن مسألة القيمة الحدية $y'' + e^{-xy} + \sin y' = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad y(1) = y(2) = 0$

يكون لها $f(x, y, y') = -e^{-xy} - \sin y'$

ولكون

$$f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0 \quad \text{و} \quad |f_{y'}(x, y, y')| = |-\cos y'| \le 1$$

فإن لهذه المسألة حلًّا وحيدًا. ■

المعادلة الخطيــة تتضمن فقط قوى خطية y ومشتقاتها.

وعندما تكون $f(x, y, y')$ ذات صيغة

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

فإن المعادلة التفاضلية

$$y'' = f(x, y, y')$$

تكون خطية. هذا النوع من المسائل كثير الظهور، وفي هذه الحالة يمكن تبسيط مبرهنة (1.11).

تمهيدية 2.11 إذا كانت مسألة القيمة الحدية الخطية

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

تحقق

(i) $p(x), q(x)$ و $r(x)$ متصلة على $[a, b]$,

(ii) $q(x) > 0$ على $[a, b]$

فإن للمسألة حلًّا وحيدًا. ■

لتقريب الحل الوحيد المؤمن من خلال تحقق فرضيات نتيجة (2.11)؛ دعنا نفترض أولاً مسائل القيمة الابتدائية

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0 \tag{3.11}$$

و

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad a \le x \le b, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1 \tag{4.11}$$

تضمن مبرهنة (16.5) في الفصل (9.5) في ظل فرضيات نتيجة (2.11) أن لكلتا المسألتين حلًّا وحيدًا. دع $y_1(x)$ يمثِّل حلَّ المعادلة (3.11) و $y_2(x)$ يمثِّل حلَّ المعادلة (4.11)، وليكن

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) \tag{5.11}$$

لذلك فإن

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x) \quad \text{and} \quad y''(x) = y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(x)$$

ومن ثم فإن

$$\begin{aligned} y'' &= p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \left(p(x)y_2' + q(x)y_2\right) \\ &= p(x)\left(y_1' + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'\right) + q(x)\left(y_1 + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2\right) + r(x) \\ &= p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x) \end{aligned}$$

والأكثر من ذلك

$$y(a) = y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot 0 = \alpha$$

و

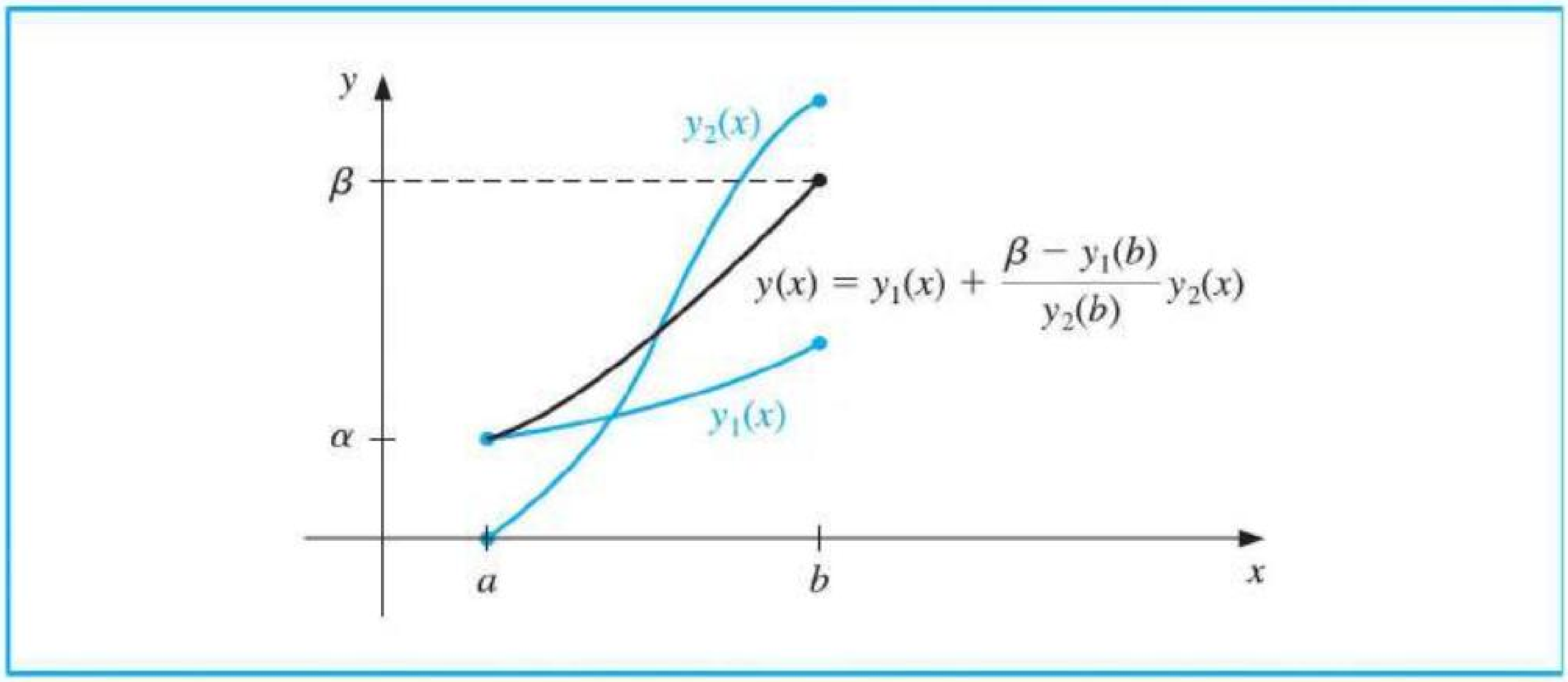
$$y(b) = y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(b) = y_1(b) + \beta - y_1(b) = \beta$$

ولذلك فإن $y(x)$ حلٌّ وحيد لمسألة القيمة الحدية الخطية، مع وجوب كون $y_2(b) \neq 0$ بطبيعة الحال. (إن $y_2(b) = 0$ يتناقض مع فرضيات نتيجة (2.11) والمأخوذ بها في التمرين 8).

إن طريقة إطلاق المعادلات الخطية تستند إلى استبدال مسألة القيمة الحدية الخطية بمسألتي القيمة الابتدائية (3.11) و (4.11). وتتوفر طرائق مختلفة من الباب الخامس لتقريب الحلين $y_1(x)$ و $y_2(x)$ وحالما تكون هذه الحلول متوفرة، فإن حلَّ مسألة القيمة الحدية تقرّب باستخدام المعادلة (5.11). يُظهر شكل (1.11) هذه الطريقة بيانيًّا.

هذا لقذف "shooting" يصيب الهدف بعد قذفة تجريبية واحدة. في الفصل التالي نرى أن المسائل غير الخطية تتطلب قذفات متكررة.

شكل 1.11



تستخدم الخوارزمية (1.11) أسلوب Runge–Kutta من الرتبة الرابعة لإيجاد التقريبات إلى $y_1(x)$ و $y_2(x)$، ولكن يمكن حل أسلوب آخر لإيجاد تقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية في الخطوة (4).

للخوارزمية خاصية إضافية وهي إيجاد التقريبات لمشتقة حل مسألة القيمة الحدية فضلاً عن إيجاد ذلك للمسألة نفسها. وإن استخدام الخوارزمية ليس مقتصرًا على تلك المسائل التي تتطلب إمكانية تحقق فرضيات نتيجة (2.11)، بل إنها تعمل في العديد من المسائل التي لا تحقق هذه الفرضيات.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.11

القذف الخطي

لتقريب حلّ مسألة القيمة الحدية

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

(إرشاد: المعادلتان (3.11) و (4.11) مكتوبتان بوصفهما نظامًا من الرتبة الأولى، ومحلولتان).

المدخلات: نقاط النهاية a, b شروط حدية α, β، عدد الفترات الفرعية N.

المخرجات: التقريبات $w_{1,i}$ إلى $y(x_i)$ و $w_{2,i}$ إلى $y'(x_i)$ لكل N, $i = 0, 1, \ldots,$

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/N$ $u_{1,0} = \alpha$ $u_{2,0} = 0$ $v_{1,0} = 0$ $v_{2,0} = 1$
2	عند $i = 0, \ldots, N-1$ ، نفّذ الخطوتين 3 و 4. (تستخدم طريقة *Runge–Kutta* للأنظمة في الخطوتين 3 و 4).
3	ضع $x = a + ih$
4	ضع $k_{1,1} = hu_{2,i}$ $k_{1,2} = h\left[p(x)u_{2,i} + q(x)u_{1,i} + r(x)\right]$ $k_{2,1} = h\left[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right]$; $k_{2,2} = h\left[p(x+h/2)\left(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)\right.$ $\left.+q(x+h/2)\left(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,1}\right) + r(x+h/2)\right]$ $k_{3,1} = h\left[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right]$; $k_{3,2} = h\left[p(x+\frac{1}{2}h)\left(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right)\right.$ $\left.+q(x+\frac{1}{2}h)(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}) + r(x+h/2)\right]$ $k_{4,1} = h\left[u_{2,i} + k_{3,2}\right]$ $k_{4,2} = h\left[p(x+h)(u_{2,i} + k_{3,2}) + q(x+h)(u_{1,i} + k_{3,1}) + r(x+h)\right]$ $u_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6}\left[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}\right]$ $u_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6}\left[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}\right]$ $k'_{1,1} = hv_{2,i}$ $k'_{1,2} = h\left[p(x)v_{2,i} + q(x)v_{1,i}\right]$ $k'_{2,1} = h\left[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}\right]$; $k'_{2,2} = h\left[p(x+h/2)\left(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}\right) + q(x+h/2)\left(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{1,1}\right)\right]$ $k'_{3,1} = h\left[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}\right]$; $k'_{3,2} = h\left[p(x+\frac{1}{2}h)\left(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}\right) + q(x+h/2)\left(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{2,1}\right)\right]$ $k'_{4,1} = h\left[v_{2,i} + k'_{3,2}\right]$ $k'_{4,2} = h\left[p(x+h)(v_{2,i} + k'_{3,2}) + q(x+h)(v_{1,i} + k'_{3,1})\right]$ $v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6}\left[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}\right]$ $v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6}\left[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}\right]$

ضع $w_{1,0} = \alpha;$ $w_{2,0} = \dfrac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}}$ المخرجات $(a, w_{1,0}, w_{2,0})$.	5
عند $i = 1, \ldots, N$ ضع $W1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i}$ $W2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i}$ $x = a + ih;$ المخرجات $(x, W1, W2)$ (المخرجات هي $x_i, w_{1,i}, w_{2,i}$).	6
توقف. (لقد اكتملت العملية).	7

■

مثال 2

لمسألة القيمة الحدية

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \le x \le 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

حل صحيح

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x)$$

حيث إن

$$c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12\sin(\ln 2) - 4\cos(\ln 2)] \approx -0.03920701320$$

و

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2 \approx 1.1392070132$$

إن تطبيق الخوارزمية (1.11) لهذه المسألة يتطلب تقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية

$$y_1'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \le x \le 2, \quad y_1(1) = 1, \quad y_1'(1) = 0$$

و

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2, \quad 1 \le x \le 2, \quad y_2(1) = 0, \quad y_2'(1) = 1$$

وتظهر نتائج الحسابات باستخدام الخوارزمية (1.11) مع $N = 10$ و $h = 0.1$ في جدول (1.11). القيمة $u_{1,i}$ تقرب $y_1(x_i)$ ، القيمة $v_{1,i}$ تقرب $y_2(x_i)$، و w_i تقرب

$$y(x_i) = y_1(x_i) + \frac{2 - y_1(2)}{y_2(2)}y_2(x_i)$$

■

تعود النتائج الدقيقة في هذا المثال إلى أن طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة تعطي تقريبات $O(h^4)$ لحلول مسائل القيمة الابتدائية. ولسوء الحظ نتيجة أخطاء التقريب؛ فمن الممكن أن يكون هناك مشكلات مخفية في هذا الأسلوب.

جدول 1.11

$\lvert y(x_i) - w_i \rvert$	$y(x_i)$	w_i	$v_{1,i}$	$u_{1,i}$	x_i
	1.00000000	1.00000000	0.00000000	1.00000000	1.0
1.43×10^{-7}	1.09262930	1.09262917	0.09117986	1.00896058	1.1
1.34×10^{-7}	1.18708484	1.18708471	0.16851175	1.03245472	1.2
9.78×10^{-8}	1.28338236	1.28338227	0.23608704	1.06674375	1.3
6.02×10^{-8}	1.38144595	1.38144589	0.29659067	1.10928795	1.4
3.06×10^{-8}	1.48115942	1.48115939	0.35184379	1.15830000	1.5
1.08×10^{-8}	1.58239246	1.58239245	0.40311695	1.21248372	1.6
5.43×10^{-10}	1.68501396	1.68501396	0.45131840	1.27087454	1.7
5.05×10^{-9}	1.78889853	1.78889854	0.49711137	1.33273851	1.8
4.41×10^{-9}	1.89392951	1.89392951	0.54098928	1.39750618	1.9
	2.00000000	2.00000000	0.58332538	1.46472815	2.0

فإذا كانت $y_1(x)$ تزداد بتسارع مع ذهاب x من a إلى b فإن $u_{1,N} \approx y_1(b)$ سيكون كبيرًا. وإذا كانت β صغيرة القيمة مقارنة بـ $u_{1,N}$ فإن الحد $w_{2,0} = (\beta - u_{1,N})/v_{1,N}$ سيكون مقداره $-u_{1,N}/v_{1,N}$ تقريبًا. إذن ستكون الحسابات في الخطوة (6)

$$W1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i} \approx u_{1,i} - \left(\frac{u_{1,N}}{v_{1,N}}\right) v_{1,i}$$

$$W2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i} \approx u_{2,i} - \left(\frac{u_{1,N}}{v_{1,N}}\right) v_{2,i}$$

التي تسمح باحتمال فقدان مراتب عشرية معنوية بسبب الحذف. على أي حال، بما أن $u_{1,i}$ تقريب إلى $y_1(x_i)$، فإن تصرف y_1 يمكن رصده بسهولة، وإذا كانت $u_{1,i}$ تزداد بسرعة من a إلى b فإن أسلوب القذف يمكن توظيفه تراجعيًّا من $x_0 = b$ إلى $x_N = a$، أي حل مسائل القيمة الابتدائية بدلًا من ذلك

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad y(b) = \beta, \quad y'(b) = 0$$

و

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad a \le x \le b, \quad y(b) = 0, \quad y'(b) = 1$$

فإذا كان أسلوب تراجعية القذف هذا لا يزال يعطي حذف مراتب عشرية معنوية، وإذا كانت الزيادة في الإحكام لا تعطي دقة أكبر، فإنه يجب استخدام أساليب أخرى مثل تلك التي تُعرض مؤخرًا في هذا الفصل. وعمومًا إذا كان $u_{1,i}$ و $v_{1,i}$ تقريبيين $O(h^n)$ إلى $y_1(x_i)$ و $y_2(x_i)$ على التوالي ولكل $i = 0, 1, \ldots, N$، فإن $w_{1,i}$ سيكون تقريبًا $O(h^n)$ إلى $y(x_i)$. وعلى نحو خاص فإن

$$|w_{1,i} - y(x_i)| \le Kh^n \left|1 + \frac{v_{1,i}}{v_{1,N}}\right|$$

عند الثابت K. (انظر [IK, p. 426])

مجموعة التمارين 1.11 EXERCISE SET

1. إن مسألة القيمة الحدية

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

لها حل $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$. استخدم طريقة القذف الخطي لتقريب الحل، وقارن النتائج بالحل الحقيقي

أ. مع $h = \frac{1}{2}$

ب. مع $h = \frac{1}{4}$

2. إن مسألة القيمة الحدية

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

لها حل $y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)$. استخدم طريقة القذف الخطي لتقريب الحل، وقارن النتائج بالحل الحقيقي

أ. مع $h = \frac{\pi}{4}$

ب. مع $h = \frac{\pi}{8}$

3. استخدم طريقة القذف الخطي لتقريب حل مسائل القيمة الحدية الآتية:

أ. $y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, \quad 0 \le x \le 1, y(0) = 2, y(1) = 1$ واستخدم $h = 0.1$

ب. $y'' = -\frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y - \frac{2}{x^2}\ln x, \quad 1 \le x \le 2, y(1) = -\frac{1}{2}, y(2) = \ln 2$ واستخدم $h = 0.05$

جـ. $y'' = -(x + 1)y' + 2y + (1 - x^2)e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1, y(0) = -1, y(1) = 0$ واستخدم $h = 0.1$

د. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{3}{x^2}y + \frac{\ln x}{x} - 1, \quad 1 \le x \le 2, y(1) = y(2) = 0$ واستخدم $h = 0.1$

4. على الرغم من أن $q(x) < 0$ في مسائل القيمة الحدية الآتية، توجد حلول وحيدة معطاة. استخدم خوارزمية القذف الخطي لتقريب حلول المسائل الآتية، وقارن النتائج بالحلول الحقيقية:

أ. $y'' + y = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$، استخدم $h = \frac{\pi}{20}$

الحل الحقيقي $y(x) = \cos x + (\sqrt{2} - 1)\sin x$

ب. $y'' + 4y = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$، استخدم $h = \frac{\pi}{20}$

الحل الحقيقي $y(x) = -\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{6}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x$

ج. $y'' = -\frac{4}{x}y' - \frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x^2}\ln x$، $1 \le x \le 2, y(1) = \frac{1}{2} y(2) = \ln 2$ استخدم $h = 0.05$

الحل الحقيقي $y(x) = \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \ln x - \frac{3}{2}$

د. $y'' = 2y' - y + xe^x - x, \quad 0 \le x \le 2, y(0) = 0, y(2) = -4$ استخدم $h = 0.2$

الحل الحقيقي $y(x) = \frac{1}{6}x^3e^x - \frac{5}{3}xe^x + 2e^x - x - 2$

5. استخدم خوارزمية القذف الخطي لتقريب الحل $y = e^{-10x}$ لمسألة القيمة الحدية

$$y'' = 100y, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-10}$$

استخدم $h = 0.1, 0.05$

6. اكتب مسألتي القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية (3.11) و (4.11) بوصفهما أنظمة من رتبة أولى واشتق المعادلات الضرورية لحل الأنظمة مستخدمًا طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة للأنظمة.

7. لتمثل u الجهد الكهربائي بين كرتين متداخلتين من المعدن بنصفي قطر R_1 و R_2 حيث

$(R_1 < R_2)$. لقد بقي جهد الكرة الداخلية ثابتًا عند V_1 فولت، وجهد الكرة الخارجية هو 0 فولت. والجهد في المنطقة ما بين الكرتين محكوم بمعادلة لابلاس التي تنخفض في هذا التطبيق خصوصًا إلى

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad R_1 \le r \le R_2, \quad u(R_1) = V_1, \quad u(R_2) = 0$$

افترض أن $R_1 = 2\text{ in}$, $R_2 = 4\text{in}$ و $V_1 = 110$ فولت

أ. قرِّب $u(3)$ مستخدمًا خوارزمية القذف الخطي.

ب. قارن نتائج الفقرة (أ) بالجهد الحقيقي $u(3)$ عندما $u(r) = \frac{V_1 R_1}{r}\left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right)$

8. أثبت من خلال فرضية نتيجة (2.11) أنه إذا كان y_2 حلًّا لـ $y'' = p(x)y' + q(x)y$ و $y_2(a) = y_2(b) = 0$، فإن $y_2 \equiv 0$.

9. افترض مسألة القيمة الحدية

$$y'' + y = 0, \quad 0 \le x \le b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B$$

أوجد اختيارات لـ b و B بحيث تكون مسألة القيمة الحدية:

أ. لا حلَّ لها.

ب. لها حلٌّ واحد بالضبط.

ج. لها حلول لانهائية.

10. حاول تطبيق التمرين (9) لمسألة القيمة الحدية.

$$y'' - y = 0, \quad 0 \le x \le b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B$$

ماذا يحدث؟ كيف ترتبط المسألتان بالنتيجة (2.11)؟

2.11 طريقة قذف المسائل اللاخطية
The shooting Method for Nonlinear Problems

إن أسلوب قذف مسألة القيمة الحدية غير الخطية من الرتبة الثانية

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \tag{6.11}$$

مشابه للأسلوب الخطي، إلا أن حل المسألة غير الخطية لا يمكن وضعه بصيغة تركيب خطي لحلول مسألتي القيمة الابتدائية. وبدلًا من ذلك نقرّب حلَّ مسألة القيمة الحدية باستخدام الحلول لمتتالية من مسائل القيمة الابتدائية تتضمن المتغيرة t. هذه المسائل لها الصيغة

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t \tag{7.11}$$

نؤدي هذا باختيار المتغيرات $t = t_k$ بطريقة تضمن كون

$$\lim_{k\to\infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta$$

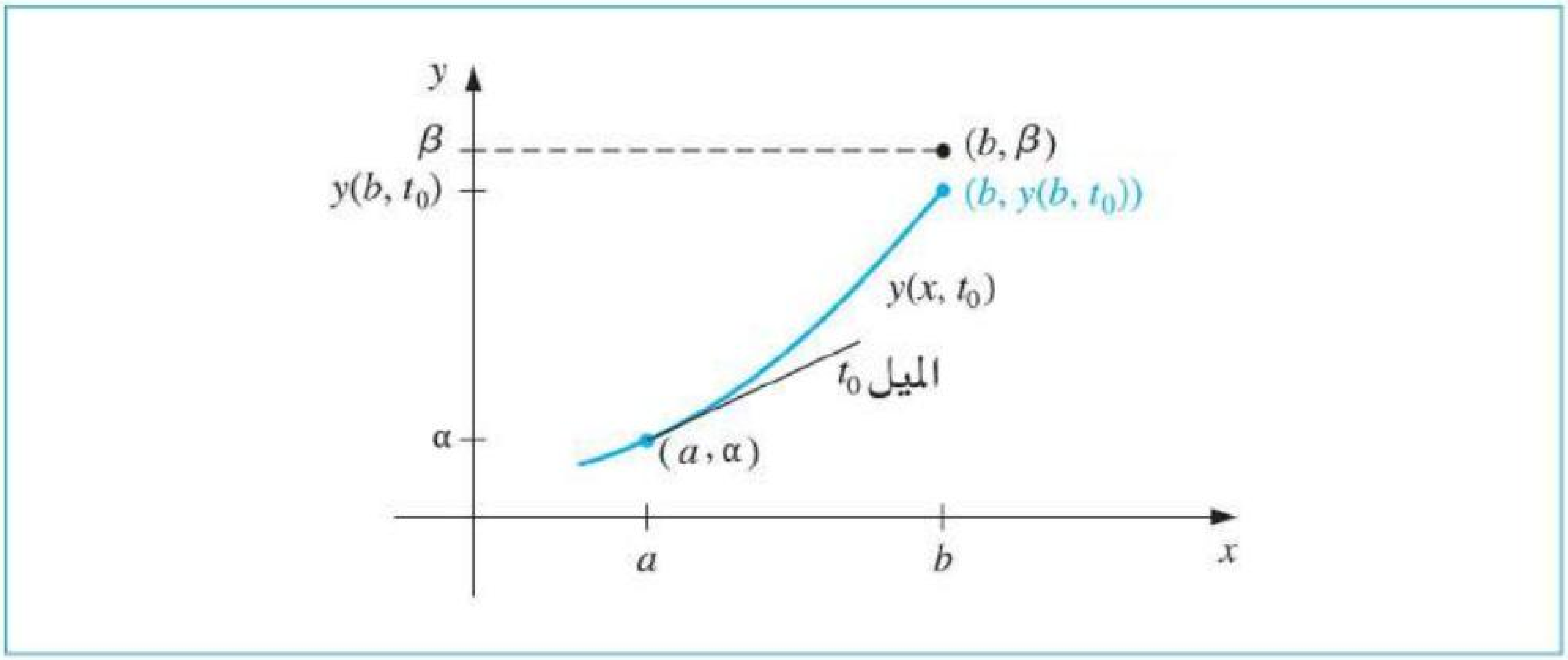
حيث يمثِّل $y(x, t_k)$ حلَّ مسألة القيمة الحدية (7.11) مع $t = t_k$، ويمثِّل $y(x)$ حلَّ مسألة القيمة الحدية (6.11).

طرق القذف لمسائل لاخطية تتطلب تكرارات للوصول إلى الهدف.

إن هذا الأسلوب يسمى طريقة "القذف"، من خلال التوافق مع عملية إطلاق مقذوفات على هدف مستقر. (انظر شكل 2.11) إننا نبدأ بمعلمة تحدد الصعود الابتدائي، الذي عنده ينطلق المقذوف من النقطة (a, α) وعلى امتداد المنحنى الموضح من خلال حلِّ مسألة القيمة الابتدائية

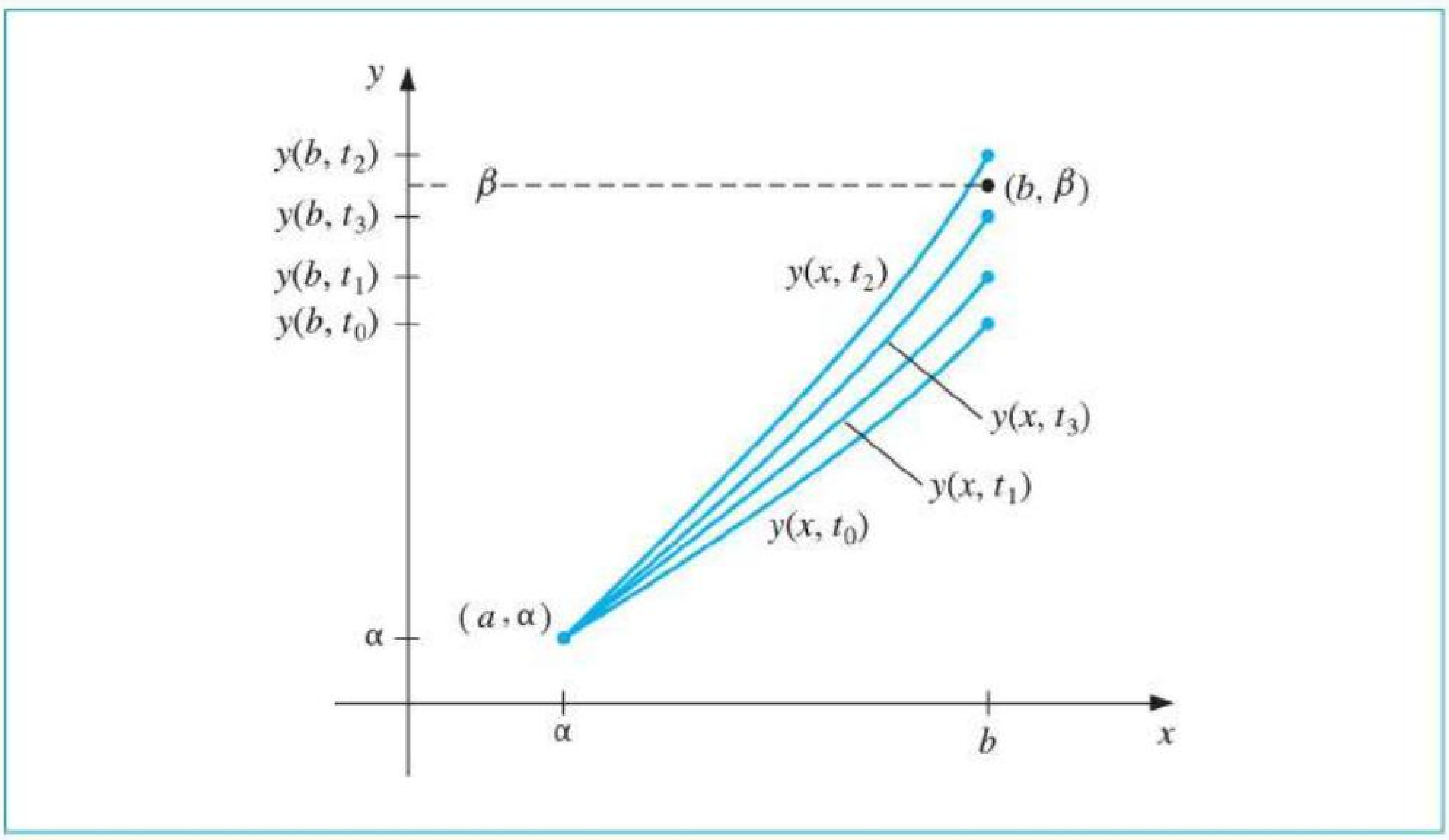
$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t_0$$

شكل 2.11



فإذا لم تكن $y(b, t_0)$ قريبة بما يكفي من β، نصحِّح تقريبنا باختيار تصعيدين t_1, t_2، وهكذا حتى تكون $y(b, t_k)$ قريبة بما يكفي من إصابة β. (انظر شكل 3.11)

شكل 3.11



ولتحديد المتغيرة t_k؛ افترض أن مسألة القيمة الحدية بصيغة (6.11) تحقق فرضيات مبرهنة (1.11). فإذا كانت $y(x, t)$ تمثِّل حلَّ مسألة القيمة الابتدائية (7.11) فسنحدد بعد ذلك t مع

$$y(b,t)-\beta=0 \tag{8.11}$$

هذه معادلة لاخطية من النوع المعتمد في الباب الثاني، لذا فإن عددًا من الطرائق متوفر.
لاستخدام طريقة القطع Secant لحلِّ المسألة؛ نحتاج إلى اختيار تقريبين ابتدائيين t_0 و t_1، ثم توليد الحدود المتبقية من المتتالية من خلال

$$t_k = t_{k-1} - \frac{(y(b,t_{k-1})-\beta)(t_{k-1}-t_{k-2})}{y(b,t_{k-1})-y(b,t_{k-2})}, \quad k=2,3,\ldots.$$

لاستخدام طريقة نيوتن الأقوى لتوليد المتتالية $\{t_k\}$؛ نحتاج إلى تقريب ابتدائي واحد t_0 فقط. وعلى أي حال فإن للإعادة الصيغة

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b,t_{k-1})-\beta}{(dy/dt)(b,t_{k-1})} \tag{9.11}$$

وتتطلب معلومات عن $(dy/dt)(b,t_{k-1})$. ويعد هذا صعبًا؛ لأن التمثيل الواضح لِـ $y(b,t)$ غير معروف، ونحن نعرف القيم $y(b,t_0), y(b,t_1),\ldots, y(b,t_{k-1})$ فقط.

افترض أننا أعدنا كتابة مسألة القيمة الابتدائية (7.11)، مؤكدين أن الحلَّ يعتمد على كل من x والمعلمة t:

$$y''(x,t) = f(x,y(x,t),y'(x,t)), \quad a\le x\le b, \quad y(a,t)=\alpha, \quad y'(a,t)=t \tag{10.11}$$

لقد أبقينا الصيغة الرئيسة التي تعبر عن الاشتقاق بالنسبة إلى x. ولأننا نحتاج إلى تحديد $(dy/dt)(b,t)$ عندما $t=t_{k-1}$، نأخذ أولًا المشتقة الجزئية للمعادلة (10.11) بالنسبة إلى t. وهذا يؤدي إلى أن

$$\begin{aligned}\frac{\partial y''}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(x,y(x,t),y'(x,t))\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x,t),y'(x,t))\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x,t),y'(x,t))\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y(x,t),y'(x,t))\frac{\partial y'}{\partial t}(x,t)\end{aligned}$$

ولكون x و t مستقلتين؛ فإن $\partial x/\partial t=0$ وإن

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x,t),y'(x,t))\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y(x,t),y'(x,t))\frac{\partial y'}{\partial t}(x,t) \tag{11.11}$$

عند $a\le x\le b$. وتعطي الشروط الابتدائية

$$\frac{\partial y'}{\partial t}(a,t)=1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(a,t)=0$$

وإذا بسّطنا الصيغة باستخدام $z(x,t)$ لتمثيل $(\partial y/\partial t)(x,t)$، وافترضنا إمكانية عكس ترتيب الاشتقاق لِـ x و t فإن المعادلة (11.11) مع الشروط الابتدائية تصبح مسألة للقيمة الابتدائية

$$z''(x,t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')z(x,t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')z'(x,t) \tag{12.11}$$

$$a\le x\le b, \quad z(a,t)=0, \quad z'(a,t)=1$$

وبذلك فإن طريقة نيوتن تتطلب حلَّ مسألتي القيمة الابتدائية (10.11) و (12.11) لكل إعادة. لذلك نحصل من المعادلة (9.11) على

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})} \qquad (13.11)$$

وبالطبع لا يكون حلُّ أيٍّ من مسائل القيمة الابتدائية هذه دقيقًا، وإن الحلول مقربة بإحدى الطرائق الموضحة في الباب الخامس. تستخدم الخوارزمية (2.11) طريقة Runge– Kutta من الرتبة الرابعة لتقريب كلا الحلين اللذين تتطلبهما طريقة نيوتن. ويؤخذ في الحسبان عملية مماثلة لطريقة القطع في التمرين (5).

ALGORITHM
الخوارزمية
2.11

القذف غير الخطي مع طريقة نيوتن

لتقريب حلِّ مسألة القيمة الحدية غير الخطية

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

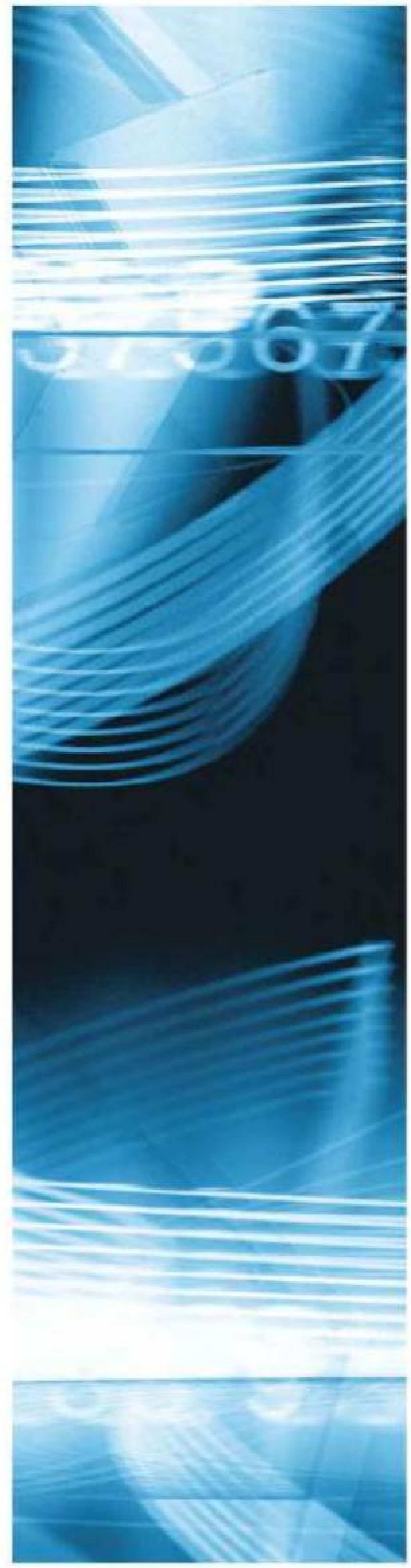
(إرشاد: المعادلتان (10.11) و (12.11) مكتوبتان على صورة أنظمة من الرتبة الأولى، ومحلولتان).

المدخلات: نقاط النهاية a, b، شروط حدية α, β، عدد الفترات الفرعية $N \ge 2$، حد سماح TOL أكبر عدد من التكرارات M.

المخرجات: التقريب s $w_{1,i}$ إلى $y(x_i)$ و $w_{2,i}$ إلى $y'(x_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, N$ أو عبارة تفيد بأن أكبر عدد من التكرارات تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$ $k = 1$ $TK = (\beta - \alpha)/(b - a)$ (إرشاد: يمكن أن يكون TK مدخلاً أيضًا).
2	ما دام $(k \le M)$ فنفذ الخطوات 3 – 10.
3	ضع $w_{1,0} = \alpha$ $w_{2,0} = TK$ $u_1 = 0$ $u_2 = 1$
4	عند $i = 1, \ldots, N$، نفذ الخطوتين 5 و 6. (تُستخدم طريقة *Runge–Kutta* للأنظمة في الخطوتين 5 و 6).
5	ضع $x = a + (i - 1)h$
6	ضع $k_{1,1} = hw_{2,i-1}$ $k_{1,2} = hf(x, w_{1,i-1}w_{2,i-1})$ $k_{2,1} = h\left(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)$ $k_{2,2} = hf\left(x + \frac{1}{2}h, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)$ $k_{3,1} = h\left(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right);$ $k_{3,2} = hf\left(x + \frac{1}{2}h, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right)$ $k_{4,1} = h(w_{2,i-1} + k_{3,2})$ $k_{4,2} = hf(x + h, w_{1,i-1} + k_{3,1}, w_{2,i-1} + k_{3,2})$

$w_{1,i} = w_{1,i-1} + (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})/6$ $w_{2,i} = w_{2,i-1} + (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})/6$ $k'_{1,1} = hu_2$ $k'_{1,2} = h[f_y(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_1$ $\quad + f_{y'}(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_2]$ $k'_{2,1} = h\left[u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2}\right]$ $k'_{2,2} = h\left[f_y(x + \frac{1}{2}h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})\left(u_1 + \frac{1}{2}k'_{1,1}\right)\right.$ $\quad \left. + f_{y'}(x + \frac{1}{2}h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})\left(u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2}\right)\right]$ $k'_{3,1} = h\left(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2}\right)$ $k'_{3,2} = h\left[f_y(x + \frac{1}{2}h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})\left(u_1 + \frac{1}{2}k'_{2,1}\right)\right.$ $\quad \left. + f_{y'}(x + \frac{1}{2}h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})\left(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2}\right)\right]$ $k'_{4,1} = h(u_2 + k'_{3,2})$ $k'_{4,2} = h\left[f_y(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})\left(u_1 + k'_{3,1}\right)\right.$ $\quad \left. + f_{y'}(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})\left(u_2 + k'_{3,2}\right)\right]$ $u_1 = u_1 + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}]$ $u_2 = u_2 + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}]$	
إذا كانت $\lvert w_{1,N} - \beta \rvert \leq TOL$ فنفذ الخطوتين 8 و 9.	7
عند $i = 0, 1, \ldots, N$، ضع $x = a + ih$ المخرجات $(x, w_{1,i}, w_{2,i})$	8
(لقد اكتملت العملية.) توقف.	9
ضع $TK = TK - \dfrac{w_{1,N} - \beta}{u_1}$ (استخدمت طريقة نيوتن في حساب TK). $k = k + 1$	10
المخرجات (تم تجاوز أكبر عدد من التكرارات). (كانت العملية غير ناجحة). توقف.	11



■

القيمة $t_0 = TK$ التي اختيرت في الخطوة (1) هي ميل الخط المستقيم عبر النقطتين (a, α) و(b, β) فإذا كانت المسألة تحقق فرضيات مبرهنة (1.11) فإن أي اختيار لـِ t_0 سيعطي تقاربًا ولكن الاختيار الجيد لـِ t_0 سيحسن التقارب، وإن العملية سوف تعمل في العديد من المسائل التي لا تحقق هذه الفرضيات.

مثال 1

افترض مسألة القيمة الحدية

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, \quad y(3) = \frac{43}{3}$$

التي لها حلٌّ صحيح $y(x) = x^2 + 16/x$.

إن تطبيق طريقة القذف المعطاة في الخوارزمية (2.11) على هذه المسألة يتطلب حلول تقريب لمسائل القيمة الابتدائية

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \le x \le 3, \quad y(1) = 17, \quad y'(1) = t_k$$

و

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y}z + \frac{\partial f}{\partial y'}z' = -\frac{1}{8}(y'z + yz'), \quad 1 \le x \le 3, \quad z(1) = 0, \quad z'(1) = 1$$

عند كل خطوة في التكرار. وإذا تطلب أسلوب التوقف أن

$$|w_{1,N}(t_k) - y(3)| \le 10^{-5}$$

فإننا نحتاج إذن إلى أربع تكرارات، وإن $t_4 = -14.000203$. وإن النتائج المستخرجة عند قيمة t مبينة في جدول (2.11). ■

جدول 2.11

x_i	$w_{1,i}$	$y(x_i)$	$\lvert w_{1,i} - y(x_i)\rvert$
1.0	17.000000	17.000000	
1.1	15.755495	15.755455	4.06×10^{-5}
1.2	14.773389	14.773333	5.60×10^{-5}
1.3	13.997752	13.997692	5.94×10^{-5}
1.4	13.388629	13.388571	5.71×10^{-5}
1.5	12.916719	12.916667	5.23×10^{-5}
1.6	12.560046	12.560000	4.64×10^{-5}
1.7	12.301805	12.301765	4.02×10^{-5}
1.8	12.128923	12.128889	3.14×10^{-5}
1.9	12.031081	12.031053	2.84×10^{-5}
2.0	12.000023	12.000000	2.32×10^{-5}
2.1	12.029066	12.029048	1.84×10^{-5}
2.2	12.112741	12.112727	1.40×10^{-5}
2.3	12.246532	12.246522	1.01×10^{-5}
2.4	12.426673	12.426667	6.68×10^{-6}
2.5	12.650004	12.650000	3.61×10^{-6}
2.6	12.913847	12.913845	9.17×10^{-7}
2.7	13.215924	13.215926	1.43×10^{-6}
2.8	13.554282	13.554286	3.46×10^{-6}
2.9	13.927236	13.927241	5.21×10^{-6}
3.0	14.333327	14.333333	6.69×10^{-6}

وعلى الرغم من أن استخدام طريقة نيوتن مع أسلوب القذف يتطلب حلَّ مسألة إضافية للقيمة الابتدائية، فإنها ستعطي تقاربًا أسرع عمومًا مما هو الحال في طريقة القطع. وكلتا الطريقتين متقاربتان محليًّا؛ لأنهما تتطلبان تقريبات ابتدائية جيدة. ولمناقشة التقارب في أساليب القذف لمسائل لاخطية مناقشة تامة؛ نوجه القارئ إلى الكتاب المتميز لمؤلفه Keller [Keller, H]. وقد نوقش في ذلك المرجع شروط حدية أعمّ. انظر أيضًا أن أسلوب القذف حساس تجاه أخطاء التقريب، وخصوصًا إذا كان الحل $y(x)$ و $z(x, t)$ عبارة عن دوال سريعة التزايد لـ x على الفترة $[a, b]$.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 2.11

1. استخدم خوارزمية القذف غير الخطي مع $h = 0.5$ لتقريب حلِّ مسألة القوة الحدية

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \le x \le 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2$$

قارن نتائجك بالحل الحقيقي $y = \ln x$.

2. استخدم خوارزمية القذف غير الخطي مع $h = 0.25$ لتقريب حلِّ مسألة القوة الحدية

$$y'' = 2y^3, \quad -1 \le x \le 0, \quad y(-1) = \tfrac{1}{2}, \quad y(0) = \tfrac{1}{3}$$

قارن نتائجك بالحلِّ الحقيقي $y(x) = 1/(x+3)$.

3. استخدم طريقة القذف غير الخطي مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلِّ مسائل القوة الحدية الآتية: الحل الحقيقي موجود لمقارنة نتائجك.

أ. $y'' = y^3 - yy', \quad 1 \le x \le 2, y(1) = \tfrac{1}{2}, y(2) = \tfrac{1}{3}$، استخدم $h = 0.2$;
الحل الحقيقي $y(x) = (x+1)^{-1}$

ب. $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3, \quad 1 \le x \le 2, y(1) = 2, y(2) = \tfrac{5}{2}$، استخدم $h = 0.2$;
الحل الحقيقي $y(x) = x + x^{-1}$

ج. $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}, 2 \le x \le 3, y(2) = \tfrac{1}{2} + \ln 2, y(3) = \tfrac{1}{3} + \ln 3$، استخدم $h = 0.2$
الحل الحقيقي $y(x) = x^{-1} + \ln x$

د. $y'' = [x^2(y')^2 - 9y^2 + 4x^6]/x^5, \quad 1 \le x \le 2, y(1) = 0, y(2) = \ln 256$، استخدم $h = 0.1$
الحل الحقيقي $y(x) = x^3 \ln x$

4. استخدم طريقة القذف غير الخطي مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلِّ مسائل القوة الحدية الآتية: الحل الحقيقي موجود لمقارنة نتائجك.

أ. $y'' = y^3 - yy', \quad 1 \le x \le 2, y(1) = \tfrac{1}{2}, y(2) = \tfrac{1}{3}$، استخدم $h = 0.1$
الحل الحقيقي $y(x) = (x+1)^{-1}$

ب. $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3, \quad 1 \le x \le 2, y(1) = 2, y(2) = \tfrac{5}{2}$، استخدم $h = 0.1$
الحل الحقيقي $y(x) = x + x^{-1}$

ج. $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}, 2 \le x \le 3, y(2) = \tfrac{1}{2} + \ln 2, y(3) = \tfrac{1}{3} + \ln 3$، استخدم $h = 0.1$
الحل الحقيقي $y(x) = x^{-1} + \ln x$

د. $y'' = [x^2(y')^2 - 9y^2 + 4x^6]/x^5, \quad 1 \le x \le 2, y(1) = 0, y(2) = \ln 256$، استخدم $h = 0.05$
الحل الحقيقي $y(x) = x^3 \ln x$

5. أ. غيّر الخوارزمية (2.11) لتضمينها طريقة القاطع بدلًا من طريقة نيوتن. استخدم $t_0 = (\beta - \alpha)/(b - a)$ و $t_1 = t_0 + (\beta - y(b, t_0))/(b - a)$

ب. كرّر التمرين 4(أ) و 4(جـ) مستخدمًا خوارزمية القاطع للفقرة (أ)، وقارن بين عدد مرات التكرار التي تتطلبها كل طريقة.

6. إن معادلة Van der Pol

$$y'' - \mu(y^2 - 1)y' + y = 0, \quad \mu > 0$$

تتحكم في تدفق التيار في أنبوب تفريغ مع ثلاثة عناصر داخلية. ليكن $\mu = \tfrac{1}{2}, y(0) = 0$ و $y(2) = 1$
قرّب الحل إلى $y(t)$ عند $t = 0.2i$، حيث إن $1 \le i \le 9$.

3.11 طرائق الفرق المنتهي للمسائل الخطية Finite-DifferenceMethodsforLinearProblems

قد تؤدي طرائق القذف الخطي واللاخطي لمسائل القيمة الحدية إلى مشكلات في عدم الاستقرار. والطرائق في هذا الفصل لها خواص استقرار أحسن، ولكنها تتطلب عموماً حساباتٍ أكثر لإيجاد دقة محددة.

إن الطرائق التي تتضمن فروقات منتهية لحل مسائل القيمة الحدية تستبدل كل مشتقة في المعادلة التفاضلية بتقريب الفرق الحاصل differential equation من النوع المعتمَد في الفصل (1.4). ويُختار الفرق الحاصل المحدد وحجم الخطوة h للإبقاء على رتبة محددة لخطأ القطع. وعلى أي حال فإن h لا يمكن اختيارها صغيرة جداً؛ بسبب عدم استقرار تقريبات المشتقة.

إن طريقة الفرق المنتهي لمسألة القيمة الحدية الخطية من الرتبة الثانية

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \tag{14.11}$$

تتطلب استخدام تقريبات الفرق الحاصل لتقريب كل من y' و y''. أولاً: نختار عدداً صحيحاً $N > 0$، ونقسم الفترة $[a, b]$ إلى $(N + 1)$ من الفترات الفرعية التي نهاياتها عبارة عن نقاط شبكية $x_i = a + ih$ عند $i = 0, 1, \ldots, N + 1$، حيث إن $h = (b - a)/(N + 1)$. إن اختيار حجم الخطوة بهذا الأسلوب يسهل تطبيق خوارزمية المصفوفة من الباب السادس، التي تحل نظاماً خطياً يتضمن مصفوفة $N \times N$.

وعند النقاط الشبكية الداخلية x_i عند $i = 1, 2, \ldots, N$، فإن المعادلة التفاضلية التي يراد تقريبها هي

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \tag{15.11}$$

وبتوسعة y لكثيرة حدود تايلور الثالثة حول x_i مقيّمة عند x_{i+1} و x_{i-1}، وبافتراض $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$، يكون لدينا

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+)$$

لعدد ما ξ_i^+ ضمن (x_i, x_{i+1})،

و

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^-)$$

لعدد ما ξ_i^- ضمن (x_{i-1}, x_i). وإذا ما جُمعت هذه المعادلات، يكون لدينا

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + \frac{h^4}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)]$$

وبحل $y''(x_i)$ نحصل على

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)]$$

إن مبرهنة القيمة الوسطية يمكن استخدامها لتبسيط هذه إلى

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) \tag{16.11}$$

لعددٍ ما ξ_i ضمن (x_{i-1}, x_{i+1}) . وتسمى هذه صيغةَ الفرق المركزي centered-difference formula لِـ $y''(x_i)$.

إن صيغة الفرق المركزي لِـ $y'(x_i)$ توجد بنفس الأسلوب (أُخذ في الحسبان التفصيلات في الفصل 1.4) لتنتج في

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i) \tag{17.11}$$

لقيمة ما η_i ضمن (x_{i-1}, x_{i+1}) .

إن استخدام صيغ الفرق المركزي هذه في المعادلة (15.11) ينتج في المعادلة

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i)$$
$$+ r(x_i) - \frac{h^2}{12}\left[2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\right]$$

إن طريقة الفرق المنتهي مع خطأ القطع من الرتبة $O(h^2)$ تظهر باستخدام هذه المعادلة أيضًا مع الشروط الحدية $y(a) = \alpha$ و $y(b) = \beta$ لتعريف

$$w_0 = \alpha, \qquad w_{N+1} = \beta$$

و

$$\left(\frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{h^2}\right) + p(x_i)\left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) + q(x_i)w_i = -r(x_i) \tag{18.11}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, N$.

وبهذه الصيغة سنفترض المعادلة (18.11) مكتوبة بحسب

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i-1} + \left(2 + h^2q(x_i)\right)w_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i+1} = -h^2r(x_i)$$

ونظام المعادلات الناتج موضوع بصيغة مصفوفة $N \times N$ ثلاثية الأقطار

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b} \tag{19.11}$$

حيث إن

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2q(x_1) & -1 + \frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 1 - \frac{h}{2}p(x_2) & 2 + h^2q(x_2) & -1 + \frac{h}{2}p(x_2) & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 + \frac{h}{2}p(x_{N-1}) \\ 0 & \cdots & 0 & -1 - \frac{h}{2}p(x_N) & 2 + h^2q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)w_0 \\ -h^2r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2r(x_{N-1}) \\ -h^2r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_N)\right)w_{N+1} \end{bmatrix}$$

وتعطي المبرهنة الآتية شروطًا تجعل النظام الثلاثي الأقطار الخطي (19.11) ذات حل وحيد. وبرهان ذلك هو بمنزلة نتيجة للمبرهنة (29.6) وقد اعتُمد في التمرين (9).

مبرهنة 3.11 لنفترض أن كلًا من p، q و r متصلة على $[a, b]$. إذا كانت $q(x) \geq 0$ على $[a, b]$، فإن النظام الثلاثي الأقطار الخطي (19.11) له حل وحيد شريطة أن $h < 2/L$، حيث إن $L = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|$

يجب ملاحظة كون فرضيات مبرهنة (3.11) تضمن حلًّا وحيدًا لمسألة القيمة الحدية (14.11) ولكنها لا تضمن كون $y \in C^4[a, b]$. نحتاج هنا إلى برهنة أن $y^{(4)}$ متصل على $[a, b]$ لضمان أن لخطأ القطع رتبة $O(h^2)$.

ALGORITHM
الخوارزمية 3.11

طريقة الفرق المنتهي الخطي

لتقريب الحل إلى مسألة القيمة الحدية

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

المدخلات: نقاط النهاية a, b، شروط حدية α, β، عدد الفترات الفرعية $N \geq 2$

المخرجات: التقريبات w_i إلى $y(x_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, N+1$

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/(N+1)$ $x = a + h;$ $a_1 = 2 + h^2 q(x)$ $b_1 = -1 + (h/2)\,p(x)$ $d_1 = -h^2 r(x) + (1 + (h/2)\,p(x))\alpha$
2	عند $i = 2, \ldots, N-1$، ضع $x = a + ih$ $a_i = 2 + h^2 q(x)$ $b_i = -1 + (h/2)\,p(x)$ $c_i = -1 - (h/2)\,p(x)$ $d_i = -h^2 r(x)$
3	ضع $x = b - h$ $a_N = 2 + h^2 q(x)$ $c_N = -1 - (h/2)\,p(x)$ $d_N = -h^2 r(x) + (1 - (h/2)\,p(x))\beta$
4	ضع(تنفذ الخطوات 4 – 8 نظامًا خطيًّا ثلاثي الأقطار باستخدام الخوارزمية 6.7). $l_1 = a_1$ $u_1 = b_1/a_1$ $z_1 = d_1/l_1$
5	عند $i = 2, \ldots, N-1$، ضع $l_i = a_i - c_i u_{i-1}$ $u_i = b_i/l_i$ $z_i = (d_i - c_i z_{i-1})/l_i$



6	ضع $l_N = a_N - c_N u_{N-1}$ $z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/ l_N$
7	ضع $w_0 = \alpha$ $w_{N+1} = \beta$ $w_N = z_N$
8	عند $i = N-1, \ldots, 1$ ، ضع $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.
9	عند $i = 0, \ldots, N+1$ ، ضع $x = a + ih$ المخرجات (x, w_i)
10	توقف. (العملية كاملة)

■

مثال 1 ستُستخدم الخوارزمية (3.11) في تقريب الحل إلى مسألة القيمة الحدية الخطية

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \le x \le 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

التي كانت مقربة أيضًا من خلال طريقة القذف في مثال (2) من الفصل (1.11). وبالنسبة إلى هذا المثال، فسنستخدم $N = 9$، لذا فإن $h = 0.1$، ولدينا نفس التباعد كما في المثال (2) من الفصل (1.11). النتائج الكاملة مدونة في جدول (3.11).

تعد هذه النتائج أقل دقة من تلك التي وجدت في المثال (2) من الفصل (1.11). وهذا بسبب أن الطريقة المستخدمة في ذلك المثال تشمل أسلوب Runge–Kutta مع خطأ قطع محلّي من رتبة $O(h^4)$، أما طريقة الفرق المستخدمة هنا فلها خطأ قطع محلّي من رتبة $O(h^2)$. ■

جدول 3.11

x_i	w_i	$y(x_i)$	$\lvert w_i - y(x_i)\rvert$
1.0	1.00000000	1.00000000	
1.1	1.09260052	1.09262930	2.88×10^{-5}
1.2	1.18704313	1.18708484	4.17×10^{-5}
1.3	1.28333687	1.28338236	4.55×10^{-5}
1.4	1.38140205	1.38144595	4.39×10^{-5}
1.5	1.48112026	1.48115942	3.92×10^{-5}
1.6	1.58235990	1.58239246	3.26×10^{-5}
1.7	1.68498902	1.68501396	2.49×10^{-5}
1.8	1.78888175	1.78889853	1.68×10^{-5}
1.9	1.89392110	1.89392951	8.41×10^{-6}
2.0	2.00000000	2.00000000	

لإيجاد طريقة الفرق مع دقة أكبر، يمكننا المضي مع عددٍ من السبل. إن استخدام سلسلة تايلور من رتبة خامسة لتقريب $y''(x_i)$ و $y'(x_i)$ يعطي حد خطأ قطع يتضمن h^4. وعلى أي حال فهذه العملية تتطلب استخدام مضاعفات ليست لـ $y(x_{i+1})$ و $y(x_{i-1})$ فقط، وإنما لـ $y(x_{i+2})$ و $y(x_{i-2})$ في صيغ التقريب إلى $y''(x_i)$ و $y'(x_i)$. وهذا يؤدي إلى صعوبة ما عند $i = 0$ و $i = N$. والأكثر من ذلك، فإن نظام المعادلات الناتج والمناظر للمعادلة (9.11) ليس في صيغة اعتيادية، وإن حل النظام يتطلب الكثير من الحسابات.

وبدلاً من محاولة إيجاد طريقة الفرق من رتبة خطأ قطع عالية وفق هذا الأسلوب، فإن الأفضل عمومًا افتراض التخفيض من حجم الخطوة. وبالإضافة إلى ذلك فإن أسلوب Richardson للاستكمال الخارجي يمكن استخدامه بفاعلية في هذه الطريقة؛ إذ يعبّر عن حد الخطأ بقوى زوجية لِـ h مع معامل مستقل عن h، بحيث يكون y قابلًا للتفاضل جيدًا. (انظر على سبيل المثال [Keller, H, p. 81].)

مثال 2 بتطبيق استكمال ريتشاردسون Richardson الخارجي لتقريب حلّ مسألة القيمة الحدية

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \le x \le 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

مع $h = 0.1, 0.05, 0.025$، نحصل على النتائج المبينة في جدول (4.11). إن الاستكمال الخارجي الأول هو

$$\mathrm{Ext}_{1i} = \frac{4\,w_i(h = 0.05) - w_i(h = 0.1)}{3}$$

والثاني هو

$$\mathrm{Ext}_{2i} = \frac{4\,w_i(h = 0.025) - w_i(h = 0.05)}{3}$$

والأخير هو

$$\mathrm{Ext}_{3i} = \frac{16\mathrm{Ext}_{2i} - \mathrm{Ext}_{1i}}{15}$$

جدول 4.11

Ext_{3i}	Ext_{2i}	Ext_{1i}	$w_i(h = 0.025)$	$w_i(h = 0.05)$	$w_i(h = 0.1)$	x_i
1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.0
1.09262930	1.09262930	1.09262925	1.09262749	1.09262207	1.09260052	1.1
1.18708484	1.18708484	1.18708477	1.18708222	1.18707436	1.18704313	1.2
1.28338236	1.28338236	1.28338230	1.28337950	1.28337094	1.28333687	1.3
1.38144595	1.38144595	1.38144589	1.38144319	1.38143493	1.38140205	1.4
1.48115942	1.48115941	1.48115937	1.48115696	1.48114959	1.48112026	1.5
1.58239246	1.58239246	1.58239242	1.58239042	1.58238429	1.58235990	1.6
1.68501396	1.68501396	1.68501393	1.68501240	1.68500770	1.68498902	1.7
1.78889853	1.78889853	1.78889852	1.78889748	1.78889432	1.78888175	1.8
1.89392951	1.89392951	1.89392950	1.89392898	1.89392740	1.89392110	1.9
2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.0

نتائج Ext_{3i} جميعها صحيحة بالنسبة إلى المرتبة العشرية المبينة. وفي الحقيقة لو استخدمت مراتب كسرية كافية، لكان هذا التقريب موافقًا للحلّ الصحيح مع خطأ قدره 6.3×10^{-1} في حده الأعلى عند النقاط الشبكية، وهذا تحسن رائع. ■

EXERCISE SET مجموعة التمارين 3.11

1. إن مسألة القيمة الحدية

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

لها حل $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$.استخدم طريقة الفرق المنتهي الخطي لتقريب الحل، وقارن النتائج بالحل الحقيقي

أ. مع $h = \frac{1}{2}$

ب. مع $h = \frac{1}{4}$

ج. استخدام التقريب للاستيفاء $y(\frac{1}{2})$

2. إن مسألة القيمة الحدية

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

لها حل $y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)$. استخدم طريقة الفرق المنتهي الخطي لتقريب الحل، وقارن النتائج بالحل الحقيقي

أ. مع $h = \frac{\pi}{4}$

ب. مع $h = \frac{\pi}{8}$

ج. استخدم الاستكمال الخارجي لتقريب $y(\pi/4)$

3. استخدم خوارزمية الفرق المنتهي الخطي لتقريب حل مسائل القيمة الحدية الآتية:

أ. $y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, \quad 0 \le x \le 1, y(0) = 2, y(1) = 1$، واستخدم $h = 0.1$

ب. $y'' = -\dfrac{4}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y - \dfrac{2}{x^2}\ln x, \quad 1 \le x \le 2, y(1) = -\dfrac{1}{2}, y(2) = \ln 2$، واستخدم $h = 0.05$

ج. $y'' = -(x+1)y' + 2y + (1 - x^2)e^{-x}, \; 0 \le x \le 1, y(0) = -1, y(1) = 0$، واستخدم $h = 0.1$

د. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{3}{x^2}y + \dfrac{\ln x}{x} - 1, \quad 1 \le x \le 2, y(1) = y(2) = 0$، واستخدم $h = 0.1$

4. على الرغم من أن $q(x) < 0$ في مسائل القيمة الحدية الآتية، توجد حلول وحيدة معطاة. استخدم خوارزمية الفرق المنتهي الخطي لتقريب حلول المسائل الآتية، وقارن النتائج بالحلول الحقيقية:

أ. $y'' + y = 0, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, y(0) = 1, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$، استخدم $h = \dfrac{\pi}{20}$

الحل الحقيقي $y(x) = \cos x + (\sqrt{2} - 1)\sin x$

ب. $y'' + 4y = \cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, y(0) = 0, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$، استخدم $h = \dfrac{\pi}{20}$

الحل الحقيقي $y(x) = -\dfrac{1}{3}\cos 2x - \dfrac{\sqrt{2}}{6}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\cos x$

ج. $y'' = -\dfrac{4}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y + \dfrac{2\ln x}{x^2}, \quad 1 \le x \le 2, y(1) = \dfrac{1}{2}, y(2) = \ln 2$، استخدم $h = 0.05$

الحل الحقيقي $y(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \ln x - \dfrac{3}{2}$

د. $y'' = 2y' - y + xe^x - x, \quad 0 \le x \le 2, y(0) = 0, y(2) = -4$، استخدم $h = 0.2$

الحل الحقيقي $y(x) = \dfrac{1}{6}x^3e^x - \dfrac{5}{3}xe^x + 2e^x - x - 2$

5. استخدم خوارزمية الفرق المنتهي الخطي لتقريب الحل $y = e^{-10x}$ لمسألة القيمة الحدية

$$y'' = 100y, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-10}$$

استخدم $h = 0.1, 0.05$، هل يمكنك تفسير النتائج؟

6. كرر التمرين 3(أ) و(ب) مستخدمًا الاستكمال الخارجي الموضح في مثال (2).

7. إن المثال في مقدمة هذا الباب قد أخذ في الحسبان إزاحة قضيب مدعم النهايات بما يتوافق مع الثقل المنتظم. وإن مسألة القيمة الحدية التي تحكم هذه الحالة تكون

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x-l), \quad 0 < x < l$$

مع شرطين حديين $w(0) = 0$ و $w(l) = 0$.

افترض أن القضيب من نوع W10-type steel I-beam بالخصائص الآتية: الطول $l = 120$ كثافة الثقل $q = 100$ lb/ft المنتظم، معامل المرونة $E = 3.0 \times 10^7$ lb/in.^{2}، الشد عند النهايات $S = 1000$ lb واللحظة المركزية للسكون $I = 625$ in.^{4}.

أ. قرّب إزاحة القضيب كل 6 in.

ب. العلاقة الحقيقية معطاة من خلال

حيث إن $$w(x) = c_1e^{ax} + c_2e^{-ax} + b(x-l)x + c$$

$c_1 = 7.7042537\times 10^4, c_2 = 7.9207462\times 10^4, a = 2.3094010\times 10^{-4}, b = -4.1666666\times 10^{-3}, c = -1.5625\times 10^5$

هل أكبر قيمة للخطأ على الفترة ضمن 0.2 in؟

ج. يتطلب قانون الحالة كون $\max_{0<x<l} w(x) < 1/300$. هل هذا القضيب يستوفي قانون الحالة؟

8. إن إزاحة صفيحة مستطيلة شكل منتظمة الثقل وتحت شد محوري محكومةٌ بمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية. دع S يمثّل القوة المحورية و q يمثّل كثافة الثقل المنتظم. إن الإزاحة W على امتداد وحدات الطول معطاة من خلال

$$W''(x) - \frac{S}{D}W(x) = \frac{-ql}{2D}x + \frac{q}{2D}x^2, \quad 0 \le x \le l,\ W(0) = W(l) = 0$$

حيث l هو طول الصفيحة، وD هو معامل صلابة الصفيحة. ليكن

$$q = 200 \text{ lb/in.}^2, S = 100 \text{ lb/in.}, D = 8.8\times 10^7 \text{ lb/in.} l = 50 \text{ in}$$

قرِّب الإزاحة عند فترة إنش واحد (1 - in).

9. برهن مبرهنة (3.11). [إرشاد: لكي تستخدم مبرهنة 29.6، أثبت أولاً أن $\left|\frac{h}{2}p(x_i)\right| < 1$ يؤدي إلى أن $\left[\left|-1-\frac{h}{2}p(x_i)\right| + \left|-1+\frac{h}{2}p(x_i)\right| = 2\right]$

10. أثبت أنه إذا كانت $y \in C^6[a,b]$ وإذا كانت $w_0, w_1, \ldots, w_{N+1}$ تحقق المعادلة (8.11)، فإن $w_i - y(x_i) = Ah^2 + O(h^4)$، حيث إن A مستقلة عن h، مع ضرورة كون $q(x) \ge w > 0$ على $[a,b]$ لقيمة ما w.

4.11 طرائق الفرق المنتهي لمسائل غير خطية
Finite-Difference Methods for Nonlinear Problems

بالنسبة إلى مسألة القيمة الحدية غير الخطية

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

فإن طريقة الفرق تماثل الطريقة المطبقة على المسائل الخطية في الفصل (3.11). وعلى أي حال، فإن نظام المعادلات هنا لن يكون خطيًّا، لذلك سيتطلب الأمر عملية إعادة لحله.

ولتطوير العملية؛ فإننا نفترض من الآن فصاعدًا أن f تحقق الشروط الآتية:

- إن f والمشتقتين الجزئيتين f_y و $f_{y'}$ جميعها متصلة على

$$D = \{ (x, y, y') \mid a \le x \le b \ -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty \}$$

- $f_y(x, y, y') \ge \delta$، لقيمة ما $\delta > 0$
- الثابتان k و L موجودان مع

$$L = \max_{(x,y,y')\in D} |f_{y'}(x, y, y')| \quad \text{و} \quad k = \max_{(x,y,y')\in D} |f_y(x, y, y')|$$

وهذا يضمن من مبرهنة (1.11) أن حلًّا وحيدًا موجود.

وكما في الحالة الخطية نقسم $[a, b]$ إلى عدد $(N+1)$ من الفترات الفرعية المتساوية التي أطرافها تكون عند $x_i = a + ih$ لكل $i = 0, 1, \dots, N+1$، مفترضين أن الحل الصحيح له مشتقة رابعة محددة تسمح لنا باستبدال $y''(x_i)$ و $y'(x_i)$ في كل من المعادلات

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i))$$

بصيغة الفرق المركزي المناسبة والمعطاة في المعادلتين (6.11) و (7.11). وهذا يعطي لكل $i = 1, 2, \dots, N$

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i)\right) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i)$$

ولقيم ما ξ_i و η_i في الفترة (x_{i-1}, x_{i+1}).

وكما في الحالة الخطية، فإن طريقة الفرق تظهر عندما تكون حدود الخطأ محذوفة. وإن الشروط الحدية توظّف

$$w_0 = \alpha, \quad w_{N+1} = \beta,$$

و

$$-\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0$$

لكل $i = 1, 2, \dots, N$.

النظام $N \times N$ غير الخطي الذي يوجد من الطريقة الآتية:

$$
\begin{aligned}
2w_1 - w_2 + h^2 f\left(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h}\right) - \alpha &= 0 \\
-w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f\left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}\right) &= 0 \\
&\vdots \\
-w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f\left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h}\right) &= 0 \\
-w_{N-1} + 2w_N + h^2 f\left(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}\right) - \beta &= 0
\end{aligned}
\tag{20.11}
$$

له حلٌّ وحيد بحيث $h < 2/L$، كما يظهر في [Keller, H, p. 86].

نحن نستخدم طريقة نيوتن للأنظمة غير الخطية التي تناولناها في الفصل (2.10)، لتقريب حلِّ هذا النظام. إن متتالية من التكرارات $\{(w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_N^{(k)})^t\}$ تتولد لتتقارب إلى حل النظام (20.11) بحيث يكون التقريب الابتدائي $(w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \dots, w_N^{(0)})^t$ قريبًا بما يكفي من الحل $(w_1, w_2, \dots, w_N)^t$

وإن مصفوفة جاكوبيان Jacobian للنظام غير مفردة. وبالنسبة إلى النظام (20.11)، فإن مصفوفة جاكوبيان $J(w_1, \ldots, w_N)$ ثلاثية الأقطار مع العناصر ij-th

$$J(w_1, \ldots, w_N)_{ij} = \begin{cases} -1 + \dfrac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, w_i, \dfrac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right), & \text{لكل } i = j - 1 \text{ و } j = 2, \ldots, N \\ 2 + h^2 f_y\left(x_i, w_i, \dfrac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right), & \text{لكل } i = j \text{ و } j = 1, \ldots, N \\ -1 - \dfrac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, w_i, \dfrac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right), & \text{لكل } i = j + 1 \text{ و } j = 1, \ldots, N - 1 \end{cases}$$

حيث إن $w_0 = \alpha$ و $w_{N+1} = \beta$.

في طريقة نيوتن للأنظمة غير الخطية عند كل إعادة نجد أن النظام $N \times N$ الخطي

$$\begin{aligned} J(w_1, \ldots, w_N)(v_1, \ldots, v_n)^t = -\Bigg(& 2w_1 - w_2 - \alpha + h^2 f\left(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h}\right) \\ & - w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f\left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}\right), \ldots \\ & - w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f\left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h}\right) \\ & - w_{N-1} + 2w_N + h^2 f\left(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}\right) - \beta\Bigg)^t \end{aligned}$$

يُحَل كما يلي: $v_1, v_2, \ldots, v_N$، لأن

$w_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} + v_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, N$.

ولكون J ثلاثي الأقطار، فهذا ليس صعبًا كما بدا في البداية. ويمكن تطبيق خوارزمية تحليل كراوت Crout Factorization (6.7) . والعملية مفصلة في الخوارزمية (4.11).

ALGORITHM
الخوارزمية
4.11

الفرق المنتهي غير الخطي Nonlinear Finite-Difference

لتقريب الحل إلى مسألة القيمة الحدية غير الخطية

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

المدخلات: نقاط النهاية a, b، شروط حدية α, β، عدد صحيح $N \ge 2$، حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرارات M.

المخرجات: التقريبات w_i إلى $y(x_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, N + 1$ أو عبارة تفيد بأن أكبر عدد من التكرارات تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/(N + 1)$ $w_0 = \alpha$ $w_{N+1} = \beta$

2	عند $i = 1,\ldots, N$ ، ضع $w_i = \alpha + i\left(\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}\right)h$
3	ضع $k = 1$
4	ما دام $k \le M$ فنفذ الخطوات 5 – 16.
5	ضع $x = a + h$ $t = (w_2 - \alpha)/(2h)$ $a_1 = 2 + h^2 f_y(x, w_1, t)$ $b_1 = -1 + (h/2) f_{y'}(x, w_1, t)$ $d_1 = -\big(2w_1 - w_2 - \alpha + h^2 f(x, w_1, t)\big)$
6	عند $i = 2,\ldots, N-1$، ضع $x = a + ih$ $t = (w_{i+1} - w_{i-1})/(2h)$ $a_i = 2 + h^2 f_y(x, w_i, t)$ $b_i = -1 + (h/2) f_{y'}(x, w_i, t)$ $c_i = -1 - (h/2) f_{y'}(x, w_i, t)$ $d_i = -\big(2w_i - w_{i+1} - w_{i-1} + h^2 f(x, w_i, t)\big)$
7	ضع $x = b - h;$ $t = (\beta - w_{N-1})/(2h);$ $a_N = 2 + h^2 f_y(x, w_N, t);$ $c_N = -1 - (h/2) f_{y'}(x, w_N, t);$ $d_N = -\big(2w_N - w_{N-1} - \beta + h^2 f(x, w_N, t)\big)$
8	ضع $l_1 = a_1$ (تنفذ الخطوات 8 – 12 النظام الخطي ثلاثي الأبعاد باستخدام الخوارزمية 7.6). $u_1 = b_1/a_1$ $z_1 = d_1/l_1$
9	عند $i = 2,\ldots, N-1$، ضع $l_i = a_i - c_i u_{i-1}$ $u_i = b_i/l_i$ $z_i = (d_i - c_i z_{i-1})/l_i$
10	ضع $l_N = a_N - c_N u_{N-1}$ $z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/l_N$
11	ضع $v_N = z_N$ $w_N = w_N + v_N$
12	عند $i = N-1,\ldots, 1$، ضع $v_i = z_i - u_i v_{i+1}$ $w_i = w_i + v_i$
13	إذا كانت $\lVert \mathbf{v} \rVert \le TOL$ فنفذ الخطوتين 14 و 15.
14	عند $i = 0,\ldots, N+1$، ضع $x = a + ih$ المخرجات (x, w_i)
15	توقف. (العملية كانت ناجحة).



16	ضع $k = k + 1$
17	المخرجات (أكبر عدد من التكرارات تم تجاوزه). (العملية كانت غير ناجحة). توقف.

■

من الممكن إثبات (انظر[IK, p. 433]) أن طريقة الفرق المنتهي غير الخطي هذه هي من رتبة $O(h^2)$.

ولأن التقريب الابتدائي الجيد من المتطلبات عندما لا تتحقق الشروط الكافية المعطاة في بداية هذا العرض؛ يجب تحديد حد أعلى لعدد مرات التكرار، وفي حالة تجاوزه يُعتمد تقريب ابتدائي جديد أو ينخفض حجم الخطوة. توجد التقريبات الابتدائية $w_i^{(0)}$ إلى w_i، ولكل $i = 1, 2, \ldots, N$ في الخطوة (2) بتعبير خط مستقيم من خلال النقطتين (a, α) و (b, β) وإجراء التقييم عند x_i.

مثال 1 نحن نطبق الخوارزمية (4.11) مع $h = 0.1$ لمسألة القيمة الحدية غير الخطية

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \le x \le 3, \quad y(1) = 17, \quad y(3) = \frac{43}{3}$$

مبينين النتائج في جدول (5.11). إن عملية التوقف المستخدمة في هذا المثال كانت تكمن في التكرار لتكون القيم في التكرارات اللاحقة تقل بـ 10^{-8} عن سابقتها. وقد حصلنا على هذا بأربعة تكرارات. وإن المسألة في هذا المثال هي نفسها التي اعتُمدت لطريقة القذف غير الخطية في مثال (1) من الفصل (11.2). ■

جدول 5.11

x_i	w_i	$y(x_i)$	$\lvert w_i - y(x_i)\rvert$
1.0	17.000000	17.000000	
1.1	15.754503	15.755455	9.520×10^{-4}
1.2	14.771740	14.773333	1.594×10^{-3}
1.3	13.995677	13.997692	2.015×10^{-3}
1.4	13.386297	13.388571	2.275×10^{-3}
1.5	12.914252	12.916667	2.414×10^{-3}
1.6	12.557538	12.560000	2.462×10^{-3}
1.7	12.299326	12.301765	2.438×10^{-3}
1.8	12.126529	12.128889	2.360×10^{-3}
1.9	12.028814	12.031053	2.239×10^{-3}
2.0	11.997915	12.000000	2.085×10^{-3}
2.1	12.027142	12.029048	1.905×10^{-3}
2.2	12.111020	12.112727	1.707×10^{-3}
2.3	12.245025	12.246522	1.497×10^{-3}
2.4	12.425388	12.426667	1.278×10^{-3}
2.5	12.648944	12.650000	1.056×10^{-3}
2.6	12.913013	12.913846	8.335×10^{-4}
2.7	13.215312	13.215926	6.142×10^{-4}
2.8	13.553885	13.554286	4.006×10^{-4}
2.9	13.927046	13.927241	1.953×10^{-4}
3.0	14.333333	14.333333	

جدول 11.6

x_i	$w_i(h = 0.05)$	$w_i(h = 0.025)$	Ext_{1i}	Ext_{2i}	Ext_{3i}
1.0	17.00000000	17.00000000	17.00000000	17.00000000	17.00000000
1.1	15.75521721	15.75539525	15.75545543	15.75545460	15.75545455
1.2	14.77293601	14.77323407	14.77333479	14.77333342	14.77333333
1.3	13.99718996	13.99756690	13.99769413	13.99769242	13.99769231
1.4	13.38800424	13.38842973	13.38857346	13.38857156	13.38857143
1.5	12.91606471	12.91651628	12.91666881	12.91666680	12.91666667
1.6	12.55938618	12.55984665	12.56000217	12.56000014	12.56000000
1.7	12.30115670	12.30161280	12.30176684	12.30176484	12.30176471
1.8	12.12830042	12.12874287	12.12899094	12.12888902	12.12888889
1.9	12.03049438	12.03091316	12.03105457	12.03105275	12.03105263
2.0	11.99948020	11.99987013	12.00000179	12.00000011	12.00000000
2.1	12.02857252	12.02892892	12.02902924	12.02904772	12.02904762
2.2	12.11230149	12.11262089	12.11272872	12.11272736	12.11272727
2.3	12.24614846	12.24642848	12.24652299	12.24652182	12.24652174
2.4	12.42634789	12.42658702	12.42666773	12.42666673	12.42666667
2.5	12.64973666	12.64993420	12.65000086	12.65000005	12.65000000
2.6	12.91362828	12.91379422	12.91384683	12.91384620	12.91384615
2.7	13.21577275	13.21588765	13.21592641	13.21592596	13.21592593
2.8	13.55418579	13.55426075	13.55428603	13.55428573	13.55428571
2.9	13.92719268	13.92722921	13.92724153	13.92724139	13.92724138
3.0	14.33333333	14.33333333	14.33333333	14.33333333	14.33333333

إن عملية Richardson للاستيفاء الخارجي يمكن استخدامها أيضًا في طريقة الفرق المنتهي غير الخطية. ويبين جدول (6.11) النتائج عندما تطبّق هذه الطريقة على مثالنا مستخدمين القيم $h = 0.1, 0.05$ و 0.025، أم، أربعة تكرارات في كل حالة. والرموز هي نفسها في المثال (2) من الفصل (3.11)، وإن قيم Ext_{3i} دقيقة لغاية الفواصل العشرية المبينة، مع أكبر خطأ حقيقي قدره 3.68×10^{-10}. ولقد حذفت قيم $w_i(h = 0.1)$ من الجدول؛ لأنه قد سبق بيانها.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 4.11

1. استخدم طريقة الفرق المنتهي غير الخطية مع $h = 0.5$ لتقريب حلّ مسألة القيمة الحدية

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \le x \le 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2$$

قارن نتائجك بالحل الحقيقي $y = \ln x$.

2. استخدم طريقة الفرق المنتهي غير الخطية مع $h = 0.25$ لتقريب حلّ مسألة القيمة الحدية

$$y'' = 2y^3, \quad -1 \le x \le 0, \quad y(-1) = \tfrac{1}{2}, \quad y(0) = \tfrac{1}{3}$$

قارن نتائجك بالحل الحقيقي $y(x) = 1/(x + 3)$.

3. استخدم خوارزمية الفرق المنتهي غير الخطية مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلّ مسائل القيمة الحدية الآتية. أعطِ الحل الحقيقي لتقارن نتائجك.

أ. $y'' = y^3 - yy', \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = \frac{1}{2},\ y(2) = \frac{1}{3}$

استخدم $h = 0.2$، الحل الحقيقي $y(x) = (x+1)^{-1}$

ب. $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3, \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = 2,\ y(2) = \frac{5}{2}$

استخدم $h = 0.2$، الحل الحقيقي $y(x) = x + x^{-1}$

ج. $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}, \quad 2 \le x \le 3,\ y(2) = \frac{1}{2} + \ln 2,\ y(3) = \frac{1}{3} + \ln 3$

استخدم $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(x) = x^{-1} + \ln x$

د. $y'' = \left(x^2(y')^2 - 9y^2 + 4x^6\right)/x^5, \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = 0,\ y(2) = \ln 256$

استخدم $h = 0.1$، الحل الحقيقي $y(x) = x^3 \ln x$

4. استخدم خوارزمية الفرق المنتهي غير الخطية مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلّ مسائل القيمة الحدية الآتية. أعطِ الحل الحقيقي لتقارن نتائجك.

أ. $y'' = y^3 - yy', \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = \frac{1}{2},\ y(2) = \frac{1}{3}$

استخدم $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(x) = (x+1)^{-1}$

ب. $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3, \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = 2,\ y(2) = \frac{5}{2}$

استخدم $h = 0.1$، الحل الحقيقي $y(x) = x + x^{-1}$

ج. $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}, \quad 2 \le x \le 3,\ y(2) = \frac{1}{2} + \ln 2,\ y(3) = \frac{1}{3} + \ln 3$

استخدم $h = 0.1$، الحل الحقيقي $y(x) = x^{-1} + \ln x$

د. $y'' = \left(x^2(y')^2 - 9y^2 + 4x^6\right)/x^5, \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = 0,\ y(2) = \ln 256$

استخدم $h = 0.05$ الحل الحقيقي $y(x) = x^3 \ln x$

5. كرِّر التمرين 4 (أ) و 4 (ب) مستخدمًا الاستكمال الخارجي.

6. في التمرين (7) من الفصل (11.3) قُرِّبت إزاحة القضيب مع نهايات مدعمة ومرتبطة بالثقل المنتظم. وباستخدام تمثيلات أكثر مناسبة للمنحنى، تعطي المعادلة التفاضلية

$$[1 + (w'(x))^2]^{-3/2} w''(x) = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{qx}{2EI}(x - l), \quad \text{لكل } 0 < x < l$$

طبّق تقريبًا للإزاحة $w(x)$ للقضيب كل 6 in، وقارن النتائج بتلك التي في التمرين (7) من الفصل (11.3).

7. أثبت أن الفرضيات المبينة في مقدمة الفصل تضمن بأن تكون مصفوفة Jacobian J غير مفردة عند $h < 2/L$.

5.11 طريقة ريليه - رتز The Rayleigh–Ritz Method

إن طريقة القذف لتقريب حلّ مسألة القيمة الحدية قد استعيضت مسألة القيمة الحدية بزوج من مسائل القيمة الابتدائية. وتستبدل طريقة الفرق المنتهي العملية المتصلة للتفاضل بعملية متقطعة للفروقات المحدودة. وإن طريقة Rayleigh–Ritz عبارة عن أسلوب متغير لمجابهة المسألة من جانب ثالث. في البداية تُعاد صياغة مسألة القيمة المنتهية لمسألة اختيار الدالة التي تحقق أدنى تكامل معلوم من مجموعة الدّوال كلها القابلة للتفاضل والمحققة للشروط الحدية. وبعد ذلك ينخفض حجم الدّوال المجدية، لنحصل على تقريب لحل المسألة الأدنى وكذلك التقريب لحل مسألة القيمة الحدية.

إن جون وليم ستروت لورد ريليه John William Strutt Lord (1842-1919) Rayleigh الفيزيائي البريطاني الذي كان مهتمًا على وجه الخصوص بانتشار الموجة قد حصل على جائزة نوبل في الفيزياء عام 1904.

ولتوضيح طريقة Rayleigh–Ritz، سنفترض تقريب حل المسألة القيمة الحدية الخطية بنقطتين ومن تحليل ضغط القضيب. إن مسألة القيمة الحدية هذه موضحة بالمعادلة التفاضلية

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x) \quad \text{لكل } 0\le x\le 1 \qquad (21.11)$$

مع الشروط الحدية

$$y(0)=y(1)=0 \qquad (22.11)$$

توضح هذه المعادلة التفاضلية الإزاحة $y(x)$ لقضيب ذي طول 1 مع مقطع عرضي متغير ممثل بـ $q(x)$. وتكون الإزاحة بسبب الضغطين المضافين $p(x)$ و $f(x)$.

سنفترض في النقاش الآتي أن $p\in C^1[0,1]$ و $q, f\in C[0,1]$. والأكثر من ذلك، سنفترض حتمية وجود ثابت $\delta>0$ بحيث إن

$p(x)\ge\delta$ و $q(x)\ge 0$ لكل x في $[0,1]$.

هذه الافتراضات كافية لضمان كون مسألة القيمة الحدية المعطاة في (21.11) و (22.11) لها حل وحيد. (انظر [BSW])

وكما هو الحال في العديد من مسائل القيمة الحدية التي توضح الظواهر الفيزيائية، فإن حل معادلة القضيب يحقق خاصية التغاير variational. إن مبدأ التغاير لمعادلة القضيب يكون أساسًا لتطوير طريقة Rayleigh–Ritz. ويوصف حلّ معادلة القضيب بأنه دالة يصغر قيمة تكامل معلوم من بين الدّوال جميعها في $C_0^2[0,1]$، لمجموعة تلك الدّوال u في $C^2[0,1]$ مع خاصية كون $u(0)=u(1)=0$. وتعطي مبرهنة الآتية الوصف (الخصوصية) characterization.

مبرهنة 4.11 ليكن $p\in C^1[0,1], q, f\in C[0,1]$، $q(x)\ge 0$، $p(x)\ge\delta>0$ لكل $0\le x\le 1$

الدالة $y\in C_0^2[0,1]$ هي الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x) \quad \text{لكل } 0\le x\le 1 \qquad (23.11)$$

إذا وفقط إذا كان y هو الدالة الوحيدة في $C_0^2[0,1]$ التي تجعل قيمة التكامل

$$I[u]=\int_0^1\{p(x)[u'(x)]^2+q(x)[u(x)]^2-2f(x)u(x)\}\,dx \qquad (24.11)$$

أصغر ما يمكن. ■

إن تفاصيل برهان هذه مبرهنة يمكن إيجاده في [Shul, pp. 88–89]، وذلك في ثلاث خطوات.

أولًا: قد أثبتنا أن أيّ حلٍّ y للمعادلة (23.11) يحقق أيضًا المعادلة

$$\int_0^1 f(x)u(x)dx=\int_0^1 p(x)\frac{dy}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)+q(x)y(x)u(x)dx \qquad (25.11)$$

لكل $u\in C_0^2[0.1]$.

الخطوة الثانية: تثبت أن $y\in C_0^2[0,1]$ هو حلٌّ للمعادلة (24.11) إذا وفقط إذا حققت المعادلة (25.11) كل $u\in C_0^2[0,1]$.

وتثبت الخطوة الأخيرة أن المعادلة (25.11) لها حلٌّ وحيد. وسيكون هذا الحل الوحيد أيضًا حلًّا للمعادلتين (24.11) و (23.11)، وبذلك تكون الحلول للمعادلتين (24.11) و (23.11) واحدة.

إن طريقة Rayleigh–Ritz تقرب الحلَّ y بتصغير التكامل، ليس من خلال جميع الدّوال في $C_0^2[0, 1]$، وإنما من خلال مجموعة أصغر من الدّوال تشكل تركيبات خطية لدوال أساسية معينة $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. وتكون الدّوال الأساسية مستقلة خطيًّا، وتحقق

$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

ثمة تقريب $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)$ إلى الحل $y(x)$ للمعادلة (23.11)، إذن نحصل عليه بإيجاد الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ لجعل قيمة $I\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\emptyset_i\right]$ أصغر ما يمكن. ومن المعادلة (24.11)، فإن

$$I[\phi] = I\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i\right] \tag{26.11}$$

$$= \int_0^1 \left\{p(x)\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i'(x)\right]^2 + q(x)\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)\right]^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)\right\} dx$$

ولتحقيق التصغير؛ فمن الضروري عند افتراض I دالة لِـ $c_1, c_2, \ldots, c_n$، أن يكون لدينا

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad \text{لكل} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{27.11}$$

وبتفاضل المعادلة (26.11) نحصل على

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_0^1 \left\{2p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i'(x)\phi_j'(x) + 2q(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)\phi_j(x) - 2f(x)\phi_j(x)\right\} dx$$

وبالتعويض في المعادلة (27.11) نحصل على

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^1 \{p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\}\, dx\right] c_i - \int_0^1 f(x)\phi_j(x)\, dx \tag{28.11}$$

لكل $j = 1, 2, \ldots, n$.

المعادلات القانونية *normal equations* الموضحة في المعادلة (28.11) تنتج نظامًا خطيًّا $n \times n$ $A\mathrm{c} = \mathrm{b}$ في المتغيرات $c_1, c_2, \ldots, c_n$ حيث إن المصفوفة المتماثلة A معطاة من خلال

$$a_{ij} = \int_0^1 [p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)]\, dx$$

وإن b معرفة من خلال

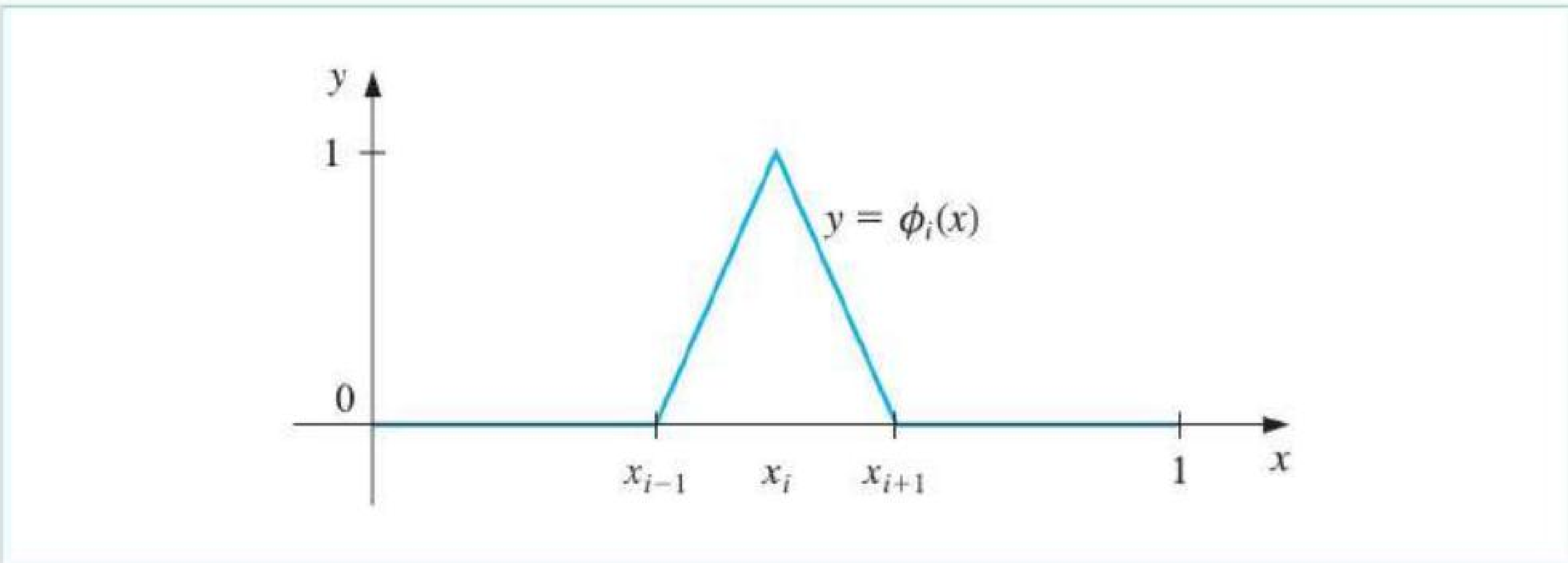
$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\, dx$$

إن الاختيار الأبسط للدوال الأساسية يتضمن كثيرات حدود خطية جزئيًّا. وتكون الخطوة الأولى بتجزئة $[0, 1]$ باختيار النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ مع

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$$

وبجعل $h_i = x_{i+1} - x_i$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$، فإننا نعرف الدّوال الأساسية $\phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$ من خلال

شكل 4.11



$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_{i-1} \text{ إذا كان } \\ \dfrac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}), & x_{i-1} < x \le x_i \text{ إذا كان } \\ \dfrac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & x_i < x \le x_{i+1} \text{ إذا كان } \\ 0, & x_{i+1} < x \le 1 \text{ إذا كان } \end{cases} \qquad (29.11)$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. (انظر شكل 4.11)

بما أن الدّوال ϕ_i خطية جزئيًّا، فإن المشتقات ϕ_i' طالما أنها ليست متصلة فهي ثابتة على (x_j, x_{j+1})، لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ و

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_{i-1} \text{ إذا كان } \\ \dfrac{1}{h_{i-1}}, & x_{i-1} < x < x_i \text{ إذا كان } \\ -\dfrac{1}{h_i}, & x_i < x < x_{i+1} \text{ إذا كان } \\ 0, & x_{i+1} < x < 1 \text{ إذا كان } \end{cases} \qquad (30.11)$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

ولأن ϕ_i و ϕ_i' ليستا صفرين فقط على (x_{i-1}, x_{i+1})، يكون لدينا

$$\phi_i(x)\phi_j(x) \equiv 0 \quad \text{و} \quad \phi_i'(x)\phi_j'(x) \equiv 0$$

إلا عندما j يكون $i - 1$، i أو $i + 1$. ونتيجة لذلك، فإن النظام الخطي المعطى من خلال (28.11) يتقلص إلى نظام خطي $n \times n$ ثلاثي الأقطار. والعناصر اللاصفرية في A هي

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 \left\{p(x)[\phi_i'(x)]^2 + q(x)[\phi_i(x)]^2\right\} dx \\ &= \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\, dx + \left(\frac{-1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\, dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x)\, dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x)\, dx \end{aligned}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

و

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \{p(x)\phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\}\,dx$$

$$= -\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)\,dx$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$

و

$$a_{i,i-1} = \int_0^1 \{p(x)\phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\}\,dx$$

$$= -\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)(x - x_{i-1})q(x)\,dx$$

لكل $i = 2, \ldots, n$

وعناصر b هي

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\,dx = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f(x)\,dx + \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x)\,dx$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

هناك 6 أنواع من التكاملات تقيّم، وهي:

$$Q_{1,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)\,dx \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$Q_{2,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x)\,dx \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$Q_{3,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x)\,dx \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$Q_{4,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n+1$$

$$Q_{5,i} = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f(x)\,dx \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$Q_{6,i} = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x)\,dx \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n$$

عناصر المصفوفة A والمتجه b في النظام الخطي $Ac = b$ هي

$$a_{i,i} = Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i} \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$a_{i,i+1} = -Q_{4,i+1} + Q_{1,i} \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$a_{i,i-1} = -Q_{4,i} + Q_{1,i-1} \quad \text{لكل } i = 2, 3, \ldots, n$$

$$b_i = Q_{5,i} + Q_{6,i} \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n$$

وعناصر **c** هي المعاملات المجهولة $c_1, c_2, \ldots, c_n$، التي منها يتكون تقريب Rayleigh Ritz ϕ المعطى من خلال $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)$.

ثمة صعوبةٍ في تطبيق هذه الطريقة تفرضها عملية تقييم $6n$ من التكاملات. ويمكن تقييم التكاملات إما مباشرةً وإما من خلال صيغة تربيعية مثل قاعدة سمبسون المركبة Composite Simpson. والأسلوب البديل لتقييم التكامل هو تقريب كل واحد من الدّوال p, q و f مع كثيرة حدود الاستكمال الداخلي الخطي الجزئي، ومن بعد ذلك نكامل التقريب. افترض على سبيل المثال التكامل $Q_{1,i}$. إن الاستكمال الداخلي الخطي جزئيًّا لـ q هو

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^{n+1} q(x_i)\phi_i(x)$$

حيث إن $\phi_1, \ldots, \phi_n$ معرفة في المعادلة (11.30) وإن

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1}, & \text{إذا كان } 0 \le x \le x_1 \\ 0, & \text{غير ذلك} \end{cases} \quad \text{و} \quad \phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_n}{1 - x_n}, & \text{إذا كان } x_n \le x \le 1 \\ 0, & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

وحيث إن فترة التكامل هي $[x_i, x_{i+1}]$، فإن كثيرة الحدود جزئيًّا $P_q(x)$ تتقلص إلى كثيرة حدود

$$P_q(x) = q(x_i)\phi_i(x) + q(x_{i+1})\phi_{i+1}(x)$$

ها هي كثيرة حدود الاستكمال الداخلي من الرتبة الأولى قد دُرِست في الفصل (1.3). ومن خلال مبرهنة (3.3) فإن

$$|q(x) - P_q(x)| = O(h_i^2) \quad \text{عند} \quad x_i \le x \le x_{i+1}$$

إذا كانت $q \in C^2[x_i, x_{i+1}]$. وعندما $i = 1, 2, \ldots, n-1$، فإن التقريب إلى $Q_{1,i}$ يوجد من خلال مكاملة التقريب إلى المتكاملة

$$\begin{aligned} Q_{1,i} &= \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)\,dx \\ &\approx \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)\left[\frac{q(x_i)(x_{i+1} - x)}{h_i} + \frac{q(x_{i+1})(x - x_i)}{h_i}\right] dx \\ &= \frac{h_i}{12}[q(x_i) + q(x_{i+1})] \end{aligned}$$

وأكثر من ذلك، فإذا كانت $q \in C^2[x_i, x_{i+1}]$، فإن

$$\left| Q_{1,i} - \frac{h_i}{12}[q(x_i) + q(x_{i+1})] \right| = O(h_i^3)$$

وتشتَق تقريبات التكاملات الأخرى بنفس الأسلوب، وهي معطاة من خلال

$$Q_{2,i} \approx \frac{h_{i-1}}{12}[3q(x_i) + q(x_{i-1})], \qquad Q_{3,i} \approx \frac{h_i}{12}[3q(x_i) + q(x_{i+1})]$$

$$Q_{4,i} \approx \frac{h_{i-1}}{2}[p(x_i) + p(x_{i-1})], \qquad Q_{5,i} \approx \frac{h_{i-1}}{6}[2f(x_i) + f(x_{i-1})]$$

$$Q_{6,i} \approx \frac{h_i}{6}[2f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

تضع الخوارزمية (5.11) النظام الخطي الثلاثي الأقطار، وتدمج خوارزمية Crout للتحليل (7.6) لحلِّ النظام، ويمكن حساب التكاملات $Q_{1,i}, \ldots, Q_{6,i}$ من خلال واحدة من الطرائق المذكورة سابقًا.

ALGORITHM
الخوارزمية
5.11

طريقة ريليه-رتز الخطية الجزئية Piecewise Linear Rayleigh-Ritz

لتقريب الحلِّ إلى مسألة القيمة المنتهية

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

بالدالة الخطية الجزئية

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)$$

المدخلات: عدد صحيح $n \ge 1$، نقاط $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$.

المخرجات: المعاملات $c_1, \ldots, c_n$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 0, \ldots, n$، ضع $h_i = x_{i+1} - x_i$
2	عند $i = 1, \ldots, n$ عرف الأساس الخطي الجزئي ϕ_i من خلال $$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_{i-1} \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x_{i-1} < x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i}, & x_i < x \le x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} < x \le 1 \end{cases}$$
3	لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$، احسب $Q_{1,i}, Q_{2,i}, Q_{3,i}, Q_{4,i}, Q_{5,i}, Q_{6,i}$ احسب $Q_{2,n}, Q_{3,n}, Q_{4,n}, Q_{4,n+1}, Q_{5,n}, Q_{6,n}$
4	لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$، ضع $\alpha_i = Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i}$ $\beta_i = Q_{1,i} - Q_{4,i+1}$ $b_i = Q_{5,i} + Q_{6,i}$
5	ضع $\alpha_n = Q_{4,n} + Q_{4,n+1} + Q_{2,n} + Q_{3,n}$ $b_n = Q_{5,n} + Q_{6,n}$
6	ضع $a_1 = \alpha_1$ (تنفذ الخطوات 6-10 نظامًا خطيًّا ثلاثي الأقطار متماثلاً باستخدام الخوارزمية 6.7) $\zeta_1 = \beta_1/\alpha_1$ $z_1 = b_1/a_1$
7	عند $i = 2, \ldots, n-1$، ضع $a_i = \alpha_i - \beta_{i-1}\zeta_{i-1}$ $\zeta_i = \beta_i/a_i$ $z_i = (b_i - \beta_{i-1}z_{i-1})/a_i$

8	ضع $a_n = \alpha_n - \beta_{n-1}\zeta_{n-1}$ $z_n = (b_n - \beta_{n-1}z_{n-1})/a_n$
9	ضع $c_n = z_n$ المخرجات (c_n)
10	عند $i = n-1, \ldots, 1$، ضع $c_i = z_i - \zeta_i c_{i+1}$ المخرجات (c_i)
11	توقف. (اكتملت العملية.)



■

يستخدم المثال الآتي الخوارزمية (5.11). وبسبب الطبيعة الابتدائية البسيطة لهذا المثال، فإن التكاملات في الخطوات 3 ، 4، و 5 توجد مباشرةً.

مثال 1 افترض مسألة القيمة الحدية

$$-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

ليكن $h_i = h = 0.1$، لذا فإن $x_i = 0.1i$ لكل $i = 0, 1, \ldots, 9$. التكاملات هي:

$$Q_{1,i} = 100 \int_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)(x - 0.1i)\pi^2 \, dx = \frac{\pi^2}{60}$$

$$Q_{2,i} = 100 \int_{0.1i-0.1}^{0.1i} (x - 0.1i + 0.1)^2 \pi^2 \, dx = \frac{\pi^2}{30}$$

$$Q_{3,i} = 100 \int_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)^2 \pi^2 \, dx = \frac{\pi^2}{30}$$

$$Q_{4,i} = 100 \int_{0.1i-0.1}^{0.1i} dx = 10$$

$$Q_{5,i} = 10 \int_{0.1i-0.1}^{0.1i} (x - 0.1i + 0.1) 2\pi^2 \sin \pi x \, dx$$
$$= -2\pi \cos 0.1\pi i + 20[\sin(0.1\pi i) - \sin((0.1i - 0.1)\pi)]$$

و

$$Q_{6,i} = 10 \int_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x) 2\pi^2 \sin \pi x \, dx$$
$$= 2\pi \cos 0.1\pi i - 20[\sin((0.1i + 0.1)\pi) - \sin(0.1\pi i)]$$

النظام الخطي $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ له

$$a_{i,i} = 20 + \frac{\pi^2}{15} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, 9$$

$$a_{i,i+1} = -10 + \frac{\pi^2}{60} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, 8$$

$$a_{i,i-1} = -10 + \frac{\pi^2}{60} \quad \text{لكل} \quad i = 2, 3, \ldots, 9$$

$$b_i = 40\sin(0.1\pi i)[1 - \cos 0.1\pi] \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, 9$$

وحل النظام الخطي الثلاثي الأقطار هو

$$c_9 = 0.3102866742, \ c_8 = 0.5902003271, \ c_7 = 0.8123410598$$

$$c_6 = 0.9549641893, \ c_5 = 1.004108771, \ c_4 = 0.9549641893$$

$$c_3 = 0.8123410598, \ c_2 = 0.5902003271, \ c_1 = 0.3102866742$$

والتقريب الخطي الجزئي هو

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{9} c_i \phi_i(x)$$

والحل الحقيقي لمسألة القيمة المنتهية هو

$$y(x) = \sin \pi x$$

ويبين جدول (7.11) الخطأ في التقريب، ولكل $i = 1, \ldots, 9$. ■

جدول 7.11

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$\lvert\phi(x_i) - y(x_i)\rvert$
1	0.1	0.3102866742	0.3090169943	0.00127
2	0.2	0.5902003271	0.5877852522	0.00241
3	0.3	0.8123410598	0.8090169943	0.00332
4	0.4	0.9549641896	0.9510565162	0.00390
5	0.5	1.0041087710	1.0000000000	0.00411
6	0.6	0.9549641893	0.9510565162	0.00390
7	0.7	0.8123410598	0.8090169943	0.00332
8	0.8	0.5902003271	0.5877852522	0.00241
9	0.9	0.3102866742	0.3090169943	0.00127

من الممكن إثبات أن المصفوفة الثلاثية الأقطار A المعطاة من خلال الدالة الأساس الخطية الجزئية هي موجبة التحديد (انظر التمرين 12)، لذا ومن خلال مبرهنة (24.6)، فإن النظام الخطي يكون مستقرًّا بالنسبة إلى خطأ التقريب. وفي ظل الفرضيات التي عُرضت عند بداية هذا الفصل، يكون لدينا

$$|\phi(x) - y(x)| = O(h^2) \quad \text{لكل } x \text{ في } [0, 1]$$

إن برهان هذه النتيجة يمكن إيجاده في [Schul, pp. 103–104].

إن دوال الأساس الخطية الجزئية تستخدم في تقريب الحل إلى المعادلتين (21.11) و(22.11) المتصلتين، لكنهما ليستا قابلتين للتفاضل على [0, 1]. ويتطلب الأمر مجموعة دوال أساس أكثر تعقيدًا لإنشاء تقريب تابع لـِ $C_0^2[0, 1]$. ودوال الأساس هذه مماثلة لشرائح الاستكمال الداخلي التكعيبية التي نوقشت في الفصل (4.3).

تذكر أن شريحة الاستكمال الداخلي S على النقاط الخمس x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 للدّالة f معرفة من خلال:

أ. S عبارة عن كثيرة حدود تكعيبية، ويُرمز إليها بـِ S_j، على $[x_j, x_{j+1}]$ عند $j = 0, 1, 2, 3$ (هذا يعطي 16 من الثوابت المختارة لـِ S، بواقع 4 لكل تكعيب.)

ب. $S(x_j) = f(x_j)$، عند $j = 0, 1, 2, 3, 4$ (5 شروط محددة)

ج. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$، عند $j = 0, 1, 2$ (3 شروط محددة)

د. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$، عند $j = 0, 1, 2$ (3 شروط محددة)

هـ. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$، عند $j = 0, 1, 2$ (3 شروط محددة)

و. أحد الشروط الحدية الآتية متحقق:

(i) حر: $S''(x_0) = S''(x_4) = 0$ (شرطين محددين)

(ii) مفروض: $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_4) = f'(x_4)$ (شرطين محددين)

وحيث إن وحدانية الحل تتطلب أن يكون عدد الثوابت في 16 (أ)، ليكون مساويًا لعدد الشروط في (ب) – (و)، فإن أحد الشروط فقط في (و) يمكن تحديده لشرائح الاستكمال الداخلي التكعيبية.

إن دوال الشريحة التكعيبية التي سنستخدمها في دوال الأساس تسمى شرائح B-splines أو شرائح ذات شكل الجرسي *bell-shaped splines*. وتختلف هذه عن شرائح الاستكمال الداخلي؛ إذ إن كلًا من مجموعتي الشروط الحدية في (و) متحققة. وهذا يتطلب غض النظر عن اثنين من الشروط في (ب) – (و). ولأن الشريحة يجب أن يكون له مشتقتان متصلتان على $[x_0, x_4]$ فإننا نحذف من وصف الأخاديد شرطين من شروط الاستكمال الداخلي. وبوجه خاص، فإننا نعدل الشرط (ب) إلى

ب. $S(x_j) = f(x_j)$ عند $j = 0, 2, 4$.

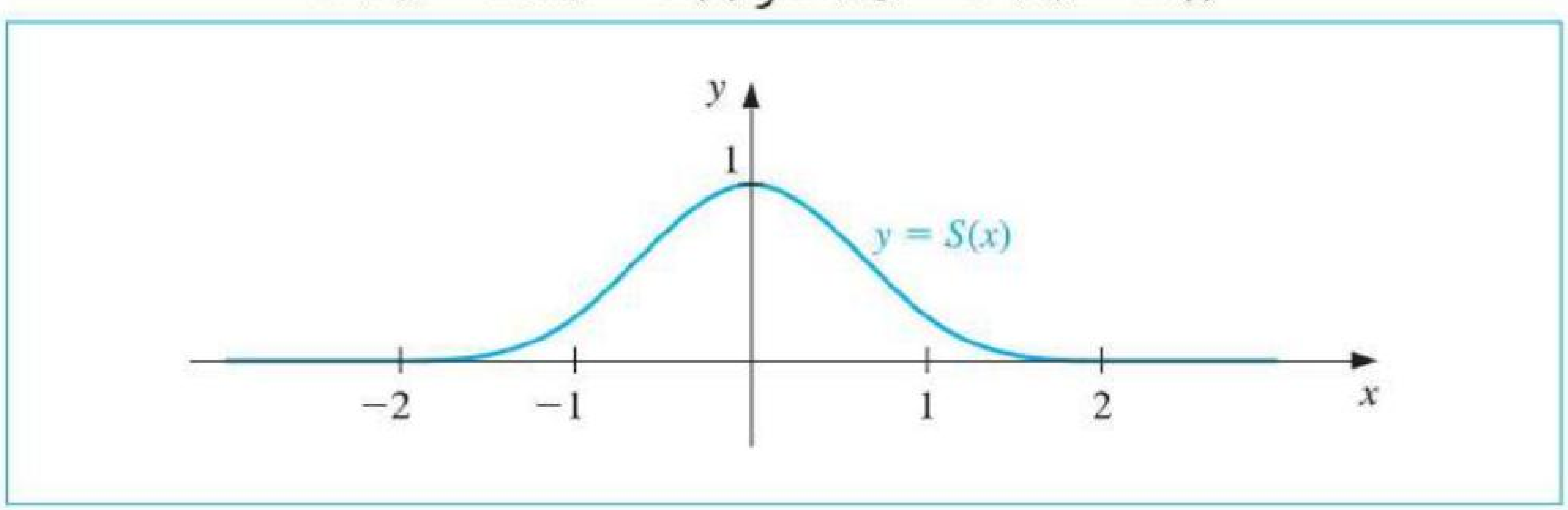
إن شريحة B-spline، S التالي ويشاهد في شكل (5.11) يستخدم النقاط المتساوية التباعد $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1,$ و $x_4 = 2$ إنها تحقق شروط الاستكمال الداخلي

ب. $S(x_0) = 0, \quad S(x_2) = 1, \quad S(x_4) = 0$.

ومجموعتي الشروط كذلك

$S''(x_0) = S''(x_4) = 0$ (i) و $S'(x_0) = S'(x_4) = 0$ (ii)

الأخاديد الجرسية شكل B-(basis) تم تقديمها عام 1946 من قبل شونبرغ I.J. Schoenberg [Scho]. ولكن كان من الصعب حسابها لأكثر من عقد من الزمن. وفي عام 1972 أوضح كارل دي بور (-1938) صيغ إعادة لتقييمها، التي أسهمت في تحسين استقراريتها واستخدامها.
Carl de Boor [Debl]



شكل 5.11

ونتيجة لذلك، فإن $S \in C_0^2(-\infty\ ,\ \infty)$، و

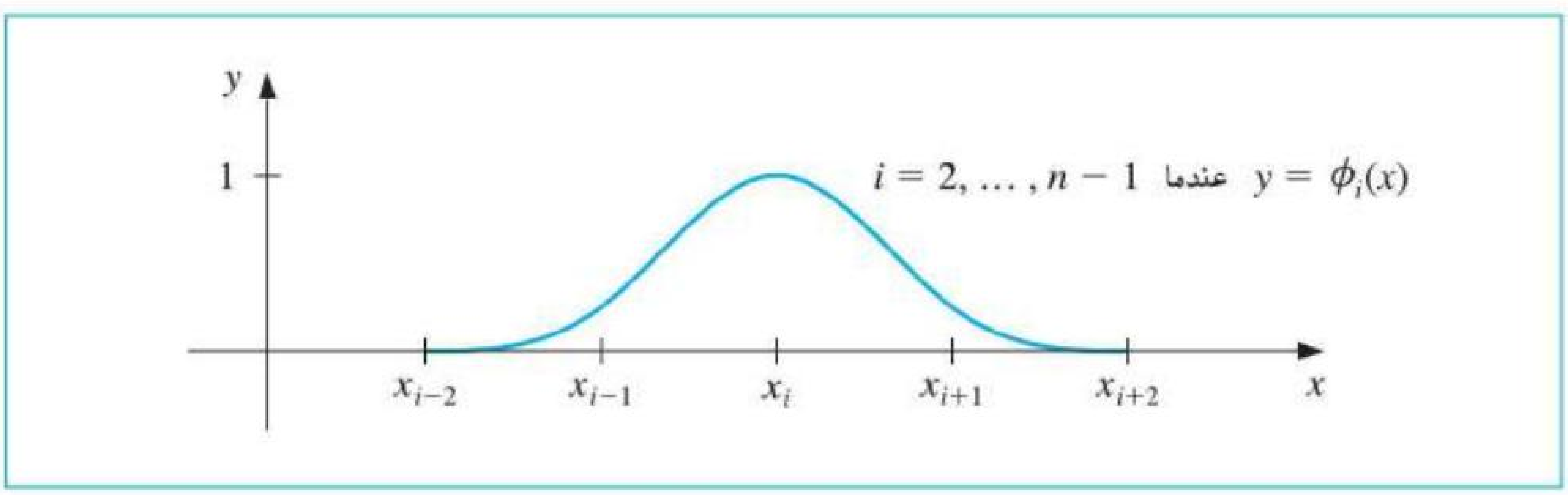
$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } x \le -2 \\ \frac{1}{4}(2+x)^3 & \text{إذا كان } -2 \le x \le -1 \\ \frac{1}{4}\left[(2+x)^3 - 4(1+x)^3\right] & \text{إذا كان } -1 < x \le 0 \\ \frac{1}{4}\left[(2-x)^3 - 4(1-x)^3\right] & \text{إذا كان } 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & \text{إذا كان } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{إذا كان } 2 < x \end{cases} \qquad \textbf{(31.11)}$$

ولإنشاء دوال الأساس ϕ_i في $C_0^2[0, 1]$، نبدأ أولاً بتجزئة $[0, 1]$ من خلال اختيار عدد صحيح n وتعريف $h = 1/(n+1)$. وهذا ينتج النقاط المتســاوية التباعد $x_i = ih$، لكل $i = 0, 1, \ldots, n+1$. وبعدئذٍ نعرف دوال الأساس $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$ لتكون

$$\phi_i(x) = \begin{cases} S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right) & \text{إذا كان } i = 0 \\ S\left(\frac{x-h}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right) & \text{إذا كان } i = 1 \\ S\left(\frac{x-ih}{h}\right) & \text{إذا كان } 2 \le i \le n-1 \\ S\left(\frac{x-nh}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right) & \text{إذا كان } i = n \\ S\left(\frac{x-(n+1)h}{h}\right) - 4S\left(\frac{x-(n+2}{h}\right) & \text{إذا كان } i = n+1 \end{cases}$$

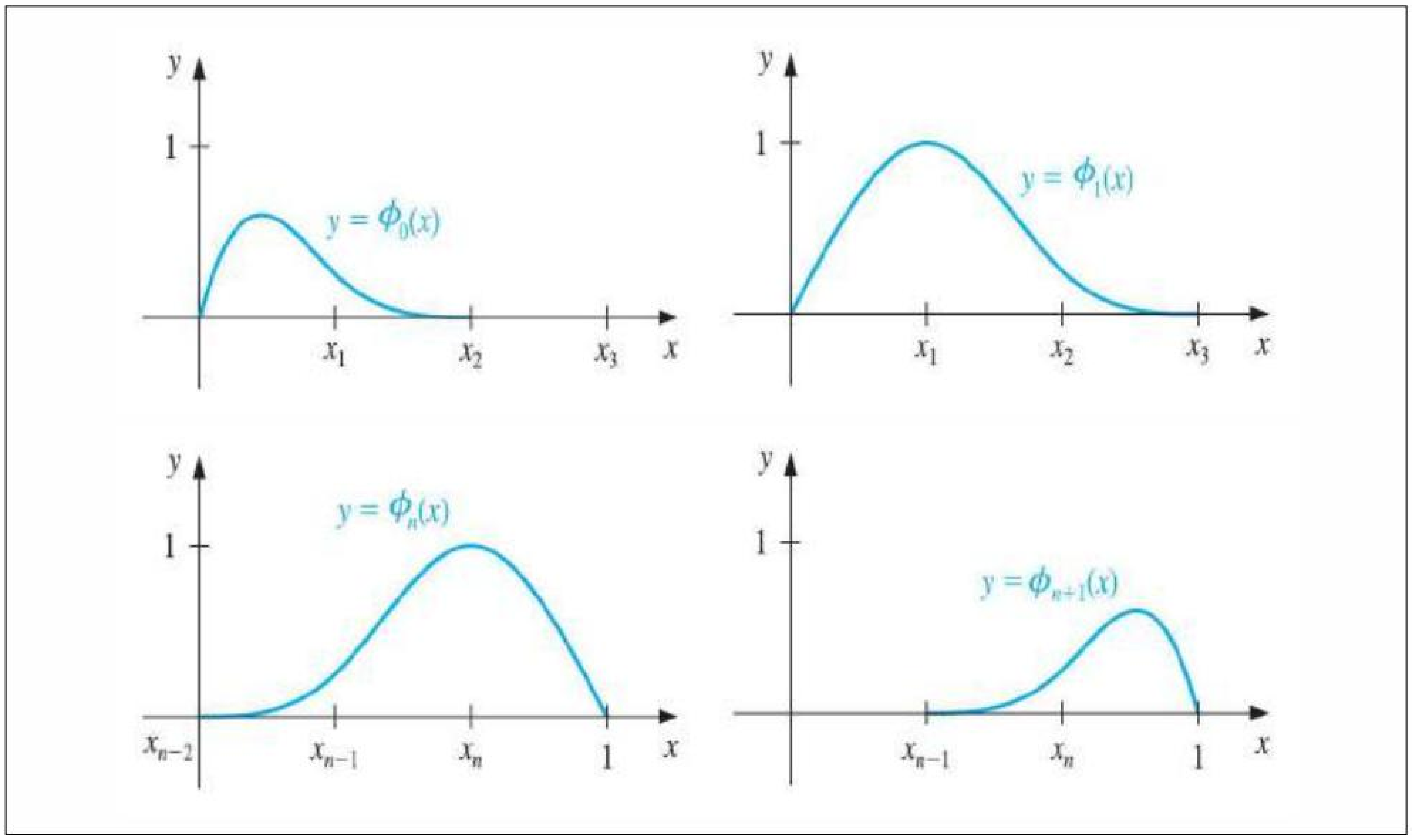
وليس من الصعب إثبات أن $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$ مجموعة شرائح تكعيبية مستقلة خطيًّا وتحقق $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$، لكل $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$.

(انظر التمرين 11) الرسم البياني لـ ϕ_i عند $2 \le i \le n-1$ موضح في شكل (6.11)، وإن الرسم البياني لـ $\phi_0, \phi_1, \phi_n, \phi_{n+1}$ في شكل (7.11).



شكل 6.11

شكل 7.11



وحيث إن $\phi_i(x)$ و $\phi_i'(x)$ ليستا صفرًا فقط عند $x \in [x_{i-2},\ x_{i+2}]$، فإن المصفوفة في تقريب ريليه–ريتز Rayleigh–Ritz هي مصفوفة نطاق band matrix مع سعة نطاق bandwidth قدرها 7 غالبًا

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ddots & & \vdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \ddots & \vdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n+1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n,n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n+1,n-2} & a_{n+1,n-1} & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \qquad (11.32)\ (32.11)$$

حيث إن

$$a_{ij} = \int_0^1 \{p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\}\, dx$$

لكل $i,\ j = 0, 1, \ldots,\ n+1$. للمتجه **b** العناصر

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\, dx$$

المصفوفة A موجبة التحديد، (انظر التمرين 13)، لذلك فإن النظام الخطي $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ يمكن حله من خلال خوارزمية تشولسكي Choleski (6.6) أو من خلال طريقة جاوس Gaussian للحذف.

وتعطي الخوارزمية (6.11) تفصيلاً لإنشاء تقريب الشريحة التكعيبية $\phi(x)$ بطريقة ريليه–ريتز

ALGORITHM

الخوارزمية 6.11

Rayleigh–Ritz لمسألتي القيمة الحدية (21.11) و (22.11) المعطاتين عند بداية هذا الفصل.

طريقة ريليه – رتز

لتقريب حلِّ مسألة القيمة الحدية

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

مع مجموع الشرائح التكعيبية $\phi(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i\phi_i(x)$:

المدخلات: عدد صحيح $n \ge 1$.

المخرجات: المعاملات $c_0, \ldots, c_{n+1}$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = 1/(n+1)$.
2	عند $i = 0, \ldots, n+1$، ضع $x_i = ih$ ضع $x_{-2} = x_{-1} = 0; x_{n+2} = x_{n+3} = 1$
3	عرف الدالة S من خلال $S(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{1}{4}(2+x)^3, & -2 < x \le -1 \\ \frac{1}{4}\left[(2+x)^3 - 4(1+x)^3\right], & -1 < x \le 0 \\ \frac{1}{4}\left[(2-x)^3 - 4(1-x)^3\right], & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & 1 < x \le 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$
4	عرف أساس الشرائح التكعيبية $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$ من خلال $\phi_0(x) = S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right)$ $\phi_1(x) = S\left(\frac{x-x_1}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right)$ $\phi_i(x) = S\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$ لكل $i = 2, \ldots, n-1$ $\phi_n(x) = S\left(\frac{x-x_n}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right)$ $\phi_{n+1}(x) = S\left(\frac{x-x_{n+1}}{h}\right) - 4S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right)$
5	عند $i = 0, \ldots, n+1$، نفِّذ الخطوات 6–9. (إرشاد: يمكن تقييم التكاملات في الخطوتين 6 و 9 باستخدام عملية تكامل عددي).



6	عند $j = i, i+1, \ldots, \min\{i+3, n+1\}$ ، ضع $L = \max\{x_{j-2}, 0\}$ $U = \min\{x_{i+2}, 1\}$ $a_{ij} = \int_L^U \left[p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\right] dx$ وإذا كان $i \neq j$ فضع $a_{ji} = a_{ij}$ (لكون A متماثلة.)
7	إذا كان $i \geq 4$ عند $j = 0, \ldots, i-4$ فضع $a_{ij} = 0$.
8	إذا كان $i \leq n-3$ عند $j = i+4, \ldots, n+1$ فضع $a_{ij} = 0$.
9	ضع $L = \max\{x_{i-2}, 0\}$ $U = \min\{x_{i+2}, 1\}$ $b_i = \int_L^U f(x)\phi_i(x)\, dx$
10	نفّذ حل النظام الخطي $A\mathrm{c} = \mathrm{b}$، حيث إن $A = (a_{ij}), \mathrm{b} = (b_0, \ldots, b_{n+1})^t$, $\mathrm{c} = (c_0, \ldots, c_{n+1})^t$
11	عند $i = 0, \ldots, n+1$ المخرجات (c_i)
12	توقف. (اكتملت العملية.)

■

مثال 1

افترض مسألة القوة الحدية

$$-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

جعلنا $h = 0.1$ في المثال (1)، وأنتجنا تقريبات مستخدمين دوال أساس خطية جزئية. ويبين جدول (8.11) النتائج من خلال تطبيق الشرائح B *B*-splines، وقد ذُكِرت تفاصيلها في الخوارزمية (6.11) مع نفس اختيارات النقاط نفسها. ■

جدول 8.11

i	c_i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$\|y(x_i) - \phi(x_i)\|$
0	$0.50964361 \times 10^{-5}$	0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
1	0.20942608	0.1	0.30901644	0.30901699	0.00000055
2	0.39835678	0.2	0.58778549	0.58778525	0.00000024
3	0.54828946	0.3	0.80901687	0.80901699	0.00000012
4	0.64455358	0.4	0.95105667	0.95105652	0.00000015
5	0.67772340	0.5	1.00000002	1.00000000	0.00000020
6	0.64455370	0.6	0.95105713	0.95105652	0.00000061
7	0.54828951	0.7	0.80901773	0.80901699	0.00000074
8	0.39835730	0.8	0.58778690	0.58778525	0.00000165
9	0.20942593	0.9	0.30901810	0.30901699	0.00000111
10	$0.74931285 \times 10^{-5}$	1.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000

لقد أوصينا بتنفيذ التكاملات المبينة في الخطوتين 6 و 9 على مرحلتين. الأولى بأن تنشأ كثيرات حدود استكمال داخلي تكعيبية الشرائح لـِ p, q و f باستخدام الطرائق المبينة في الفصل (4.3). وبعد ذلك تقريب المتكاملات بضرب الشرائح التكعيبية أو مشتقاتها. وتعدّ المتكاملات الآن كثيرات حدود جزئية، وبالإمكان إجراء التكامل لها بالضبط عند كل فترة فرعية، ومن ثم جمعها. وهذا ينتج تقريبات دقيقة للتكاملات.

تعد الفرضيات المفترضة في بداية هذا الفصل كافية لضمان كون

$$\left\{\int_0^1 |y(x)-\phi(x)|^2\,dx\right\}^{1/2} = O(h^4) \quad \text{إذا كان} \quad 0 \le x \le 1$$

ولبرهنة هذه نتيجة ؛ انظر [Schul, pp. 107–108].

يمكن تعريف شرائح B ‏B-splines أيضًا في حالة النقاط التي لا تكون المسافات بينها متساوية ، ولكن التفاصيل أكثر تعقيدًا. ويمكن إيجاد عرض للأسلوب في [Schul, p. 73]. وهناك أساس آخر شائع الاستخدام هو كثيرات حدود هرمايت Hermite التكعيبية جزئيًا. وللحصول على شرح ممتاز لهذه الطريقة انظر [Schul, pp. 24ff] مرة أخرى.

تستقطب طرائق أخرى مثل Galerkin اهتمامًا واضحًا أو طرائق الصيغة الضعيفة "weak form," وبالنسبة إلى مسألة القيمة الحدية فقد افترضنا

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

بوريس غريغوريفتش جالركن (1871-1945) أنجز Boris Grigorievich Galerkin عملا رئيسا في تطبيق تقنيات التقريب لحل مسائل القيمة الحدية المرتبطة بمسائل الهندسة المدنية. نشر ورقته الأولى حول تحليل العنصر المنتهي finite-element عام 1915 . ومسودته الرئيسة حول الصفائح الرقيقة المرنة عام 1937 .

في ظل الافتراضات المبينة في بداية هذا الفصل، وتحدّد طريقتا Galerkin و Rayleigh–Ritz بالمعادلة (11.28). وعلى أي حال فهذه ليست الحالة بالنسبة إلى مسألة قيمة حدية معينة. ويمكن إيجاد معالجة التماثلات والفروقات ما بين الطريقتين، ومناقشة تطبيق واسع لطريقة Galerkin في [Schul] وفي [SF].

وهناك أسلوب شائع آخر لحل مسائل القيمة الحدية، وهو طريقة الارتصاف method of collocation وهذه العملية تبدأ باختيار مجموعة دوال أساس $\{\phi_1,\ldots,\phi_N\}$ ومجموعة أعداد $\{x_i,\ldots,\ x_n\}$ في $[0, 1]$، وكون التقريب

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\phi_i(x)$$

كلمة ارتصاف "collocation" لها جذور في اللاتينية co-and Locus التي تعني معا و المكان. إنها مكافئة لـ تسمية استكمال داخليّ.

يحقق المعادلة التفاضلية مع كل عدد x_j، عند $1 \le j \le n$. وبالإضافة إلى ذلك، فكون $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ عند $1 \le i \le N$ متطلبًا، فإن الشروط الحدية تكون متحققة آليًا. وقد تمركز الاهتمام بالكثير من الأدبيات حول اختيار الأعداد $\{x_j\}$ ودوال الأساس $\{\phi_i\}$. وأحد الاختيارات الشائعة يكون بجعل ϕ_i تمثل دوال الأساس لدوال الشرائح بالنسبة إلى تجزئة $[0, 1]$، وجعل النقاط $\{x_j\}$ بمنزلة نقاط Gaussian أو جذور دوال متعامدة معينة تتحول إلى فترة فرعية مناسبة. وإن طرائق الارتصاف مختلفة، وطرائق الفرق المنتهي موجودة في [Ru]. ونستنتج أن طرائق الارتصاف باستخدام شرائح بدرجة عالية تكون مكافئة لأساليب الفرق المنتهي باستخدام استكمال خارجي. وتوجد مصادر أخرى لطرائق الارتصاف في [DebS] و [LR].

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 5.11

1. استخدم خوارزمية الخطي الجزئي لتقريب حل مسألة القيمة الحدية

$$y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{16}\cos\frac{\pi}{4}x, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

مستخدمًا $x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.7, x_3 = 1$. قارن نتائجك بالحل الحقيقي

$$y(x) = -\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{6}\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4}x$$

2. استخدم خوارزمية الخطي الجزئي لتقريب حلِّ مسألة القيمة الحدية

$$-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

مستخدمًا $x_0 = 0, x_1 = 0.4, x_2 = 0.8, x_3 = 1$. قارن نتائجك بالحلِّ الحقيقي $y(x) = x^2 - x$

3. استخدم خوارزمية الخطي الجزئي لتقريب حلِّ مسائل القيمة الحدية الآتية، وقارن النتائج بالحل الحقيقي:

أ. $-x^2y'' - 2xy' + 2y = -4x^2, \quad 0 \le x \le 1, y(0) = y(1) = 0$ استخدم $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(x) = x^2 - x$

ب. $-\frac{d}{dx}(e^x y') + e^x y = x + (2-x)e^x, \quad 0 \le x \le 1, y(0) = y(1) = 0$ استخدم $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(x) = (x-1)(e^{-x} - 1)$

ج. $-\frac{d}{dx}(e^{-x}y') + e^{-x}y = (x-1) - (x+1)e^{-(x-1)}, \quad 0 \le x \le 1, y(0) = y(1) = 0$

استخدم $h = 0.05$ الحل الحقيقي $y(x) = x(e^x - e)$

د. $-(x+1)y'' - y' + (x+2)y = [2-(x+1)^2]e\ln 2 - 2e^x, \quad 0 \le x \le 1, y(0) = y(1) = 0$

استخدم $h = 0.05$ الحل الحقيقي $y(x) = e^x\ln(x+1) - (e\ln 2)x$

4. استخدم خوارزمية الشريحة التكعيبية مع $n = 3$ لتقريب الحل لكلٍّ من مسائل القيمة الحدية الآتية، وقارن النتائج بالحل الحقيقي في التمرين (1) والتمرين (2).

أ. $y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{16}\cos\frac{\pi}{4}x, \quad 0 \le x \le 1, y(0) = 0, y(1) = 0$

ب. $-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \le x \le 1, y(0) = 0, y(1) = 0$

5. كرِّر التمرين (3) مستخدمًا خوارزمية الشريحة التكعيبية.

6. أثبت أن مسألة القيمة الحدية

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

يمكن تحويلها من خلال تبديل المتغير $z = y - \beta x - (1-x)\alpha$ إلى الصيغة

$$-\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z = F(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0$$

7. استخدم التمرين (6) وخوارزمية الخطي الجزئي مع $n = 9$ لتقريب حلِّ مسألة القيمة الحدية

$$-y'' + y = x, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e^{-1}.$$

8. كرِّر التمرين (7) مستخدمًا خوارزمية الشريحة التكعيبية.

9. أثبت أن مسألة القيمة الحدية

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

يمكن تحويلها إلى الصيغة

$$-\frac{d}{dw}(p(w)z') + q(w)z = F(w), \quad 0 \le w \le 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0$$

من خلال طريقة مماثلة لتلك المعطاة في التمرين (6).

10. أثبت أن دوال الأساس الخطية الجزئية $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ تكون مستقلة خطيًّا.
11. أثبت أن دوال الأساس الشريحة التكعيبية $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$ تكون مستقلة خطيًّا.
12. أثبت أن دوال الأساس الخطية الجزئية تكون موجبة التحديد. [إرشاد: استخدم التعريف.]
13. أثبت أن المصفوفة المعطاة من خلال دوال أساس الشريحة التكعيبية تكون موجبة التحديد.

6.11 مسح الطرائق والبرمجيات SurveyofMethodsandSoftware

ناقشنا في هذا الباب طرائق لتقريب حلول مسائل القيمة الحدية. وقد افترضنا لمسألة القيمة الحدية

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

كلًّا من طريقة القذف الخطية وطريقة الفرق المنتهي لتقريب الحل. وتستخدم طريقة القذف أسلوب القيمة الابتدائية لحل المسائل

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0$$

و

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad a \le x \le b, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1$$

وينتج المعدل الموزون لهذه الحلول حلًّا لمسألة القيمة الحدية الخطية.

استبدلنا في طريقة الفرق المنتهي y'' و y' بتقريبات الفرق، وقمنا بحلٍّ نظام خطي. وعلى الرغم من أن الحلول ليست بدقة طريقة القذف، إلا أن هناك تحسس أقل بالنسبة إلى خطأ التقريب. وتتوافر طرائق الفرق برتب أعلى، أو أنه يمكن استخدام الاستكمال الخارجي لتحسين الدقة.

في مسألة القيمة المنتهية غير الخطية

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

استعرضنا طريقتين أيضًا. وتتطلب طريقة القذف غير الخطية حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t$$

عند اختيار ابتدائي لـ t. لقد أحسنا الاختيار من خلال استخدام طريقة نيوتن لتقريب الحل t إلى $y(b, t) = \beta$. وتتطلب هذه الطريقة حل مسألتي قيمة ابتدائية عند كل تكرار. وتكمن الدقة في اختيار طريقة حل مسائل القيمة الابتدائية.

وتتطلب طريقة الفرق المنتهي للمعادلة غير الخطية استبدال y'' و y' بحواصل الفرق، التي تحصل لكونها نتيجة في نظام غير خطي. ويُحل هذا النظام باستخدام طريقة نيوتن. ويمكن استخدام فروقات أو استكمال خارجي من رتبة أعلى لتحسين الدقة. وتبدو طرائق الفرق المنتهي أقل حساسية لخطأ التقريب من طرائق القذف.

إن طريقة Rayleigh–Ritz–Galerkin شُرحت من خلال تقريب حل مسألة القيمة الحدية

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

ومن الممكن إيجاد تقريب خطي جزئي أو تقريب شريحة تكعيبي.

يمكن توسيع غالبية المادة المتعلقة بمسائل القيمة الحدية من الرتبة الثانية لمسائل ذات شروط حدية بالصيغة

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha \quad \text{و} \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta$$

حيث إن $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ و $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$ ، لكن بعض الأساليب تصبح معقدة بعض الشيء. وننصح القارئ المهتم بهذا النوع من المسائل باعتماد كتاب مختص في مسائل القيمة الحدية، مثل [Keller, H] .

وإننا نذكر اثنتين فقط من طرائق عديدة في مكتبة IMSL لحل مسائل القيمة الحدية. وتستند البرمجية BVPFD إلى فروقات منتهية، أما البرمجية BVPMS فتستند إلى القذف المتعدد باستخدام IVPRK طريقة Runge–Kutta–Verner لمسائل القيمة الابتدائية. ويمكن استخدام كلتا الطريقتين في أنظمة مسائل قيمة حدية وسيطية parameterized .

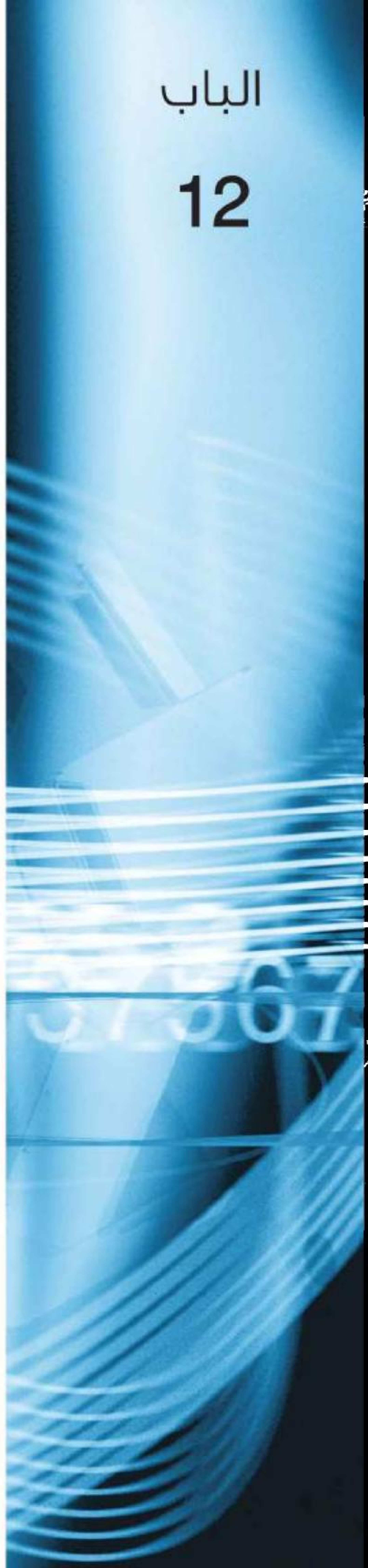
إن مكتبة NAG فيها الكثير من البرمجيات أيضًا لحلِّ مسائل القيمة الحدية. والبرمجية D02HAF هي طريقة قذف تستخدم طريقةRunge–Kutta–Merson للقيمة الابتدائية بالتزامن مع طريقة نيوتن. وتستخدم البرمجية D02GAF طريقة الفرق المنتهي مع طريقة نيوتن لحل نظام لاخطي. والبرمجية D02GBF هي طريقة الفرق المنتهي الخطي، والبرمجية D02JAF هي طريقة تستند إلى الارتصاف.

تحلُّ البرمجيتان MUSL و MUSN في حزمة ODE ضمن مكتبة Netlib مسائل قيمة حدية ذات نقطتين خطية وغير الخطية على التوالي. وكلتا البرمجيتين تستند إلى طرائق القذف.

ويمكن إيجاد معلومات أكثر حول المسائل العامة التي تكون ضمن الحل العددي لمسائل قيمة حدية ذات نقطتين في Keller [Keller, H] و Shampine and Waltman [BSW]. و يركز Roberts and Shipman [RS] على طرائق القذف لمسائل قيمة حدية ذات نقطتين، ويحصر Pryce [Pr] الاهتمام بالمسائل. ويتضمن الكتاب من تأليف Ascher, Mattheij, and Russell [AMR] عرضًا واسعًا لمسائل القذف المتعدد والقذف المتوازي.

الباب

12



الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية

Numerical Solutions to Partial Differential Equations

مقدمة

الجسم المتناحي (isotropic) هو الجسم الذي يكون التوصيل الحراري على كل نقطة فيه مستقلًا عن اتجاه تيار الحرارة خلال تلك النقطة. ويمكن إيجاد الحرارة $u \equiv u(x, y, z, t)$ في جسم متناحٍ عن طريق حلِّ المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}$$

حيث إن c، k و ρ دوالّ في (x, y, z) وتمثل التوصيل الحراري، الحرارة النوعية وكثافة الجسم عند النقطة (x, y, z) على التوالي.

عندما تكون c ، k و ρ ثوابت، تعرف هذه المعادلة بمعادلة الحرارة البسيطة الثلاثية الأبعاد، ويعبر عنها بِـ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

إذا كانت حدود الجسم بسيطة نسبيًّا أمكن إيجاد حلٍّ لهذه المعادلة باستخدام سلاسل فورييه. في معظم الأحيان حيث لا تكون c ، k و ρ ثابتة أو عندما تكون الحدود غير منتظمة يجب إيجاد حلِّ المعادلة التفاضلية الجزئية بطرائق التقريب. وستُعرض في هذا الباب مقدمة عن هذا النوع من الطرائق.

إن المعادلة التفاضلية الجزئية التي سنفرضها في الفصل (1.12) هي المعادلة الإهليليجية (معادلة ناقصيّة) (elliptic equation) التي تعرف بمعادلة بواسون (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)=f(x, y)$$

نفترض في هذه المعادلة أن f يصف مدخلات المسألة على منطقة مستوية R بالحدود S. تظهر معادلات من هذا النوع في دراسة مسائل فيزيائية متعددة ومستقلة عن الزمن، مثل توزيع الحرارة المنتظم في منطقة في مستوى، ثم تعرّضها لقوى الجاذبية في المستوى، ومسائل ثنائية الأبعاد في حالة استقرار (منتظمة) ومحتوية على سوائل غير قابلة للانضغاط.

ويجب وضع تحديدات إضافية للحصول على حل وحيد لمعادلة بواسون. فعلى سبيل المثال إن

عمل بيير – سيمون لابلاس
Pierre - Simon Laplace (1749-1827)
في كثير من الحقول الرياضية منتجاً أبحاثاً إبداعية في الاحتمالات والفيزياء الرياضية. ولقد نشر إنتاجه الرئيس في نظرية الحرارة في الفترة (1817-1820).

دراسة توزيع الحرارة مستقر الحالة في منطقة في المستوى يتطلب كون $f(x, y) \equiv 0$ وناتجًا بالتبسيط إلى

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

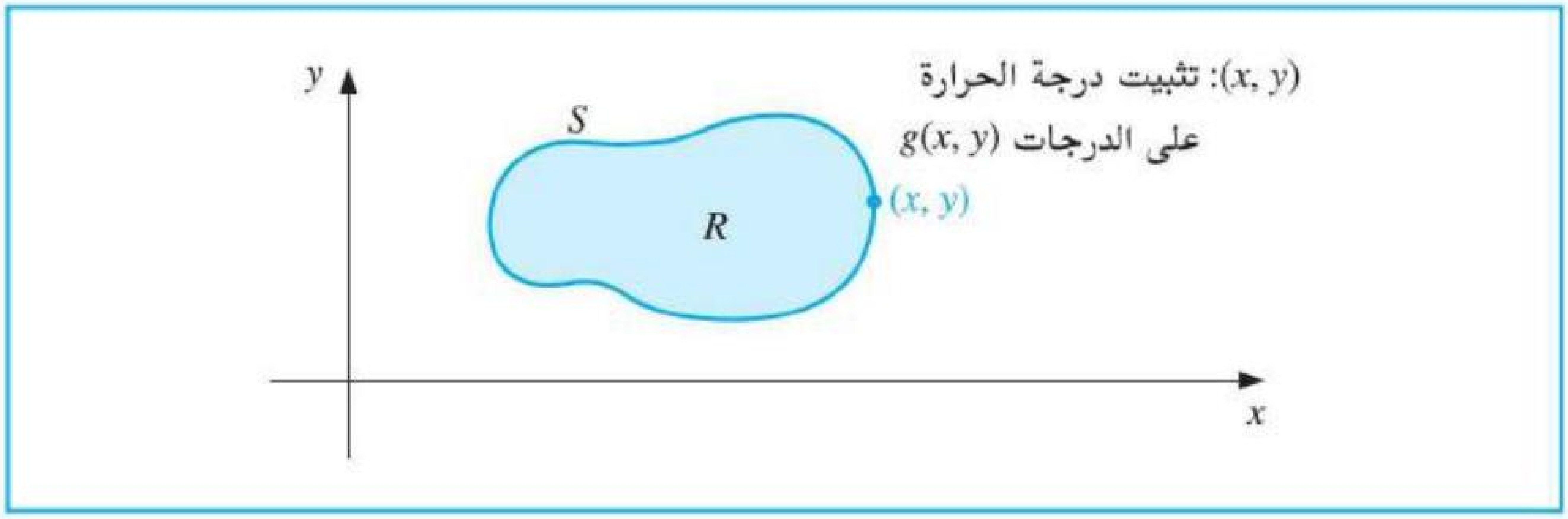
التي تسمى معادلة لابلاس **Laplace's equation**.

إذا كانت الحرارة داخل المنطقة قابلة للتحديد بتوزيعها على حدود المنطقة فإن المحددات تسمى حالات دريشليه الحدودية **(Dirichlet boundary Conditions)** وتُعطى بِـ

$$u(x, y) = g(x, y)$$

لِـ (x, y) جميعها على S، حدود المنطقة R. (انظر شكل 1.12)

شكل 1.12



ملحوظة: قدّم جوهان دريشليه
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)
مساهمات كبيرة في حقول نظرية الأعداد وتقارب السلاسل. ويمكن في الحقيقة اعتباره مؤسس سلاسل فورييه، لأنه كان أول من كتب بحثاً عميقاً في الموضوع بحسب ريمان.

النقطة (x, y) داخل الشكل هي (x, y) بحيث تكون درجة الحرارة ثابتة عند $g(x, y)$ درجة.

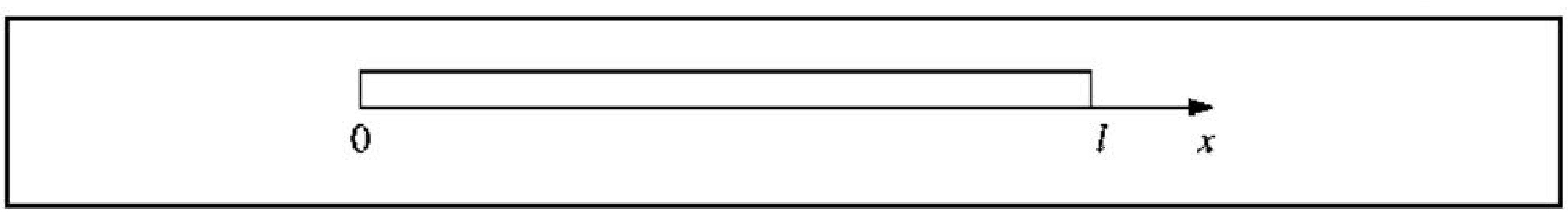
سنفترض في الفصل (2.12) الحل العددي لمسألة تحتوي معادلة تفاضلية جزئية تكافئية على الصيغة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

إن المسألة الفيزيائية التي افتُرضت هنا تُعنى بانسياب الحرارة خلال قضيب طوله l (انظر الشكل 2.12) وفيه حرارة متجانسة ضمن كل مقطعٍ عرضي.

إن هذا يتطلب أن يكون القضيب معزولاً تمامًا على سطحه الخارجي. الثابت α مستقل عن المكان في القضيب ويتحدد بخواص توصيل الحرارة للمادة التي يتكون منها القضيب.

شكل 2.12



إن إحدى المجموعات النمطية للتحديدات في مسألة انسياب الحرارة من هذا النوع هي كيفية تحديد توزيع الحرارة الابتدائية في القضيب

$$u(x, 0) = f(x)$$

ووصف السلوك على طرفي القضيب. وعلى سبيل المثال إذا ثُبّتت حرارة الطرفين عند U_1 و U_2

فإن حالات الحدود تأخذ الصيغة

$$u(l,t) = U_2 \quad \text{و} \quad u(0,t) = U_1$$

ويتقارب توزيع الحرارة من توزيع الحرارة المنتج للنهاية

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}x$$

وبدلاً من هذا فإذا كان القضيب معزولاً بحيث لا تنساب الحرارة خلال الطرفين فإن حالات الحدود تكون

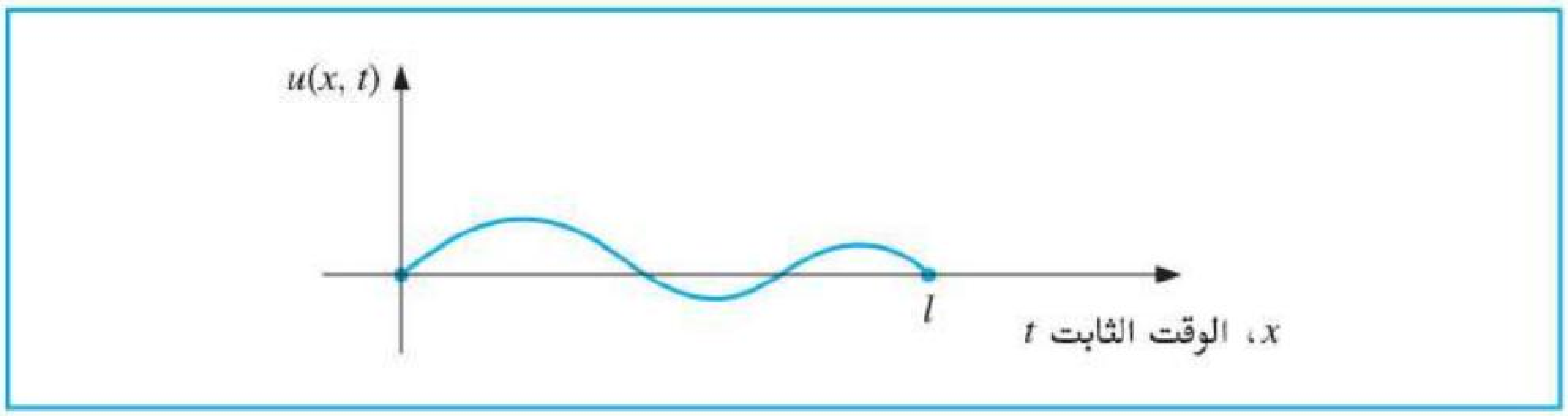
$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

إن تسميات المعادلات التفاضلية الجزئية توازي تسميات القطع المخروطية.

منتجة حرارة ثابتة في القضيب بوصفها حالة نهائية. إن المعادلة التفاضلية الجزئية ذات القطع المكافئ مهمة أيضًا في دراسة انتشار الغاز، وفي الحقيقة، تعرف في بعض الأوساط باسم معادلة الانتشار **diffusion equation**.

المسألة التي دُرست في فصل (3.12)، هي معادلة الموجة (**wave equation**) أحادية البعد، وهي مثال للمعادلة التفاضلية الجزئية ذات القطع الزائد. افترض أن سلكًا مرنًا طوله l قد شُدّ بين داعمين على المستوى الأفقي نفسه. (انظر شكل 3.12)

شكل 3.12



إذا جعلنا السلك يهتز في مستوى عمودي فإن الإزاحة العمودية $u(x,t)$ لنقطة x عند الزمن t تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{لكل} \quad 0 < x < l \quad \text{و} \quad 0 < t$$

بشرط أن تأثيرات التخمد مهملة وأن السعة كبيرة جدًّا. ولكي نضع محددات على هذه المسألة افترض الموقع الابتدائي لسلك، وأن سرعته معطاة بـِ

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{لكل} \quad 0 \le x \le l$$

إذا كانت نقطتا النهاية ثابتتين نحصل على $u(0,t) = 0$ و $u(l,t) = 0$ أيضًا.

هناك مسائل فيزيائية أخرى تحتوي على معادلة تفاضلية جزئية زائدة وهي التي تحدث في دراسة الدعائم المهتزة حيث يُثبّت أحد طرفيها أو كلاهما، وكذلك في انتقال الكهرباء في خط طويل خاضع لبعض التسرب في التيار إلى الأرض.

1.12 المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية (الإهليليجية)
Elliptic Partial Differential Equations

أسهم سيمون دينس بواسون
Sime'on Denis Poisson
(1781-1840)
في إنتاجه حول الحركة في المستوى. وبعد ذلك في نظرية الاحتمال. أنجز عمله في المعادلات التفاضلية عندما كان يافعًا خلال السنوات الأولى من القرن التاسع عشر.

Elliptic Partial Differential Equations المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية (الإهليليجية)

إن المعادلة التفاضلية الجزئية الناقصية التي نتناولها هنا هي معادلة بواسون

$$\nabla^2 u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y) \qquad (1.12)$$

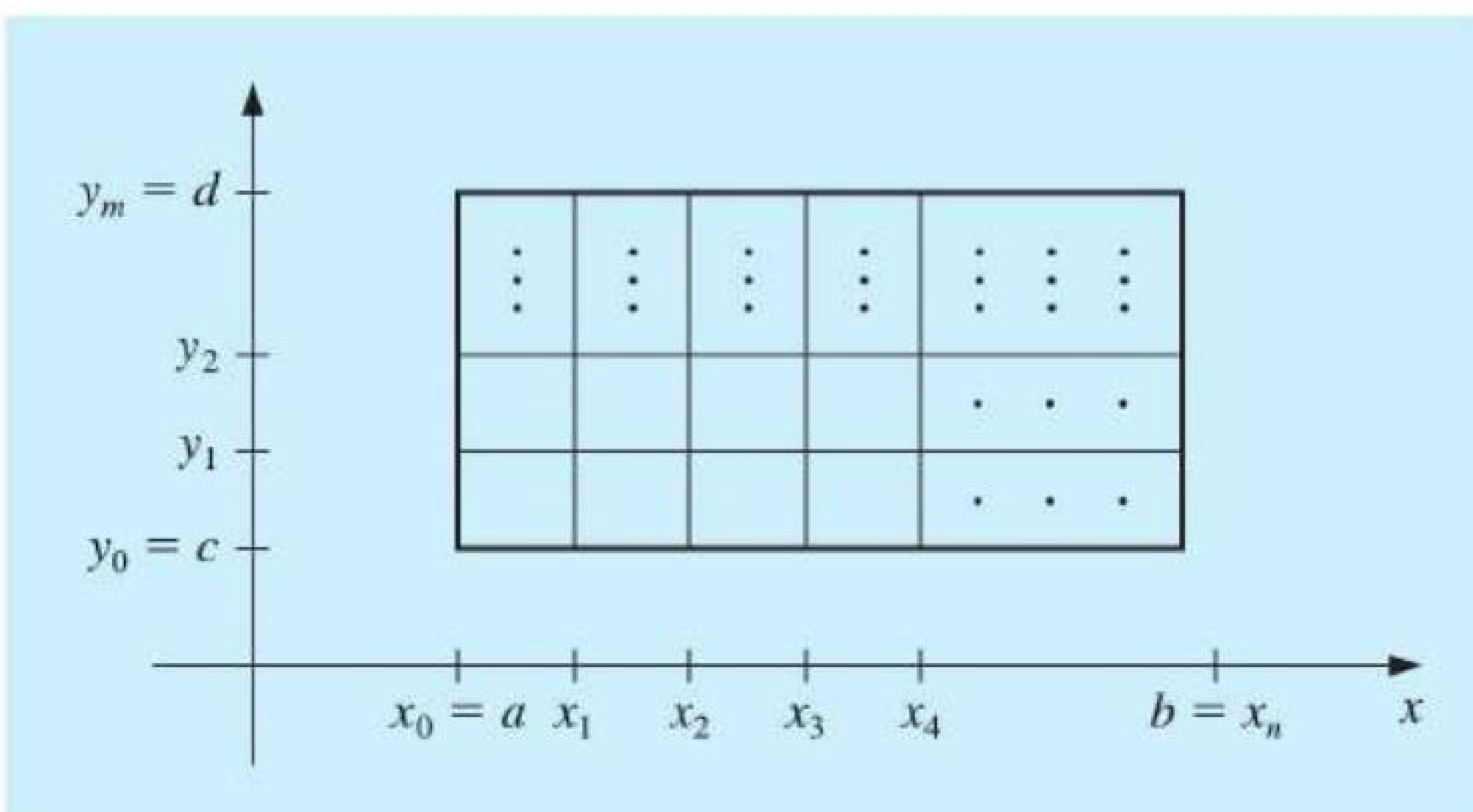
على $R = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$ مع

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ لكل } (x, y) \in S$$

حيث S تعبر عن حدود R. إذا كان f و g متصلين على مجاليهما فعندئذ يوجد حلٌ وحيد لهذه المعادلة.

إن الطريقة المستخدمة هي تكييف لطريقة الفرق المحدود للمسائل الخطية ذات القيم الحدودية التي بحثت في الفصل (3.11). إن الخطوة الأولى هي اختيار عددين صحيحين n و m وتعريف حجمي الخطوة $h = (b-a)/n$ و $k = (d-c)/m$. خذ تجزئة للفترة $[a, b]$ تحوي n من الأجزاء المتساوية بعرض h، وجزّئ الفترة $[c, d]$ إلى m من الأجزاء المتساوية بعرض k. (انظر شكل 4.12)

شكل 4.12



ضع تقسيمًا على المستطيل R برسم خطوط عمودية وأخرى أفقية على النقاط بالإحداثيات (x_i, y_j) حيث

$$x_i = a + ih \text{ لكل } i = 0, 1, \ldots, n$$

و

$$y_j = c + jk \text{ لكل } j = 0, 1, \ldots, m$$

الخطوط $x = x_i$ و $y = y_j$ هي خطوط تقسيم **grid lines**، وتقاطعاتها هي نقاط الشبكة **mesh points** للتقسيم.

لكل نقطة شبكة (x_i, y_j) داخل التقسيم، لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$ و $j = 1, 2, \ldots, m-1$

نستخدم سلسلة تايلور في المتغير x حول x_i لتوليد معادلة الفرق المركزي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) \qquad (2.12)$$

حيث $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

نستخدم سلسلة تايلور أيضًا في المتغير y حول y_j لتوليد معادلة الفرق المركزي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j) \qquad (3.12)$$

حيث $\eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$.

وباستخدام هذه المعادلات في المعادلة (1.12) يسمح لنا بالتعبير عن معادلة بواسون عند النقاط (x_i, y_j) كما يأتي:

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2}$$

$$= f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j)$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$ و $j = 1, 2, \ldots, m-1$ والتعبير عن حالات الحدود كالآتي:

$u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j)$ و $u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j)$ لكل $j = 0, 1, \ldots, m$

$u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0)$ و $u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m)$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$

وبصيغة معادلة الفروق، فإن هذا ينتج في طريقة الفرق المحدود بخطأ قطع محلي من الرتبة $O(h^2 + k^2)$:

$$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 1\right] w_{ij} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \left(\frac{h}{k}\right)^2 (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j) \qquad (4.12)$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$ و $j = 1, 2, \ldots, m-1$

و

$$w_{0j} = g(x_0, y_j) \text{ و } w_{nj} = g(x_n, y_j) \text{ لكل } j = 0, 1, \ldots, m \qquad (5.12)$$

$$w_{i0} = g(x_i, y_0) \text{ و } w_{im} = g(x_i, y_m) \text{ لكل } i = 1, 2, \ldots, n-1$$

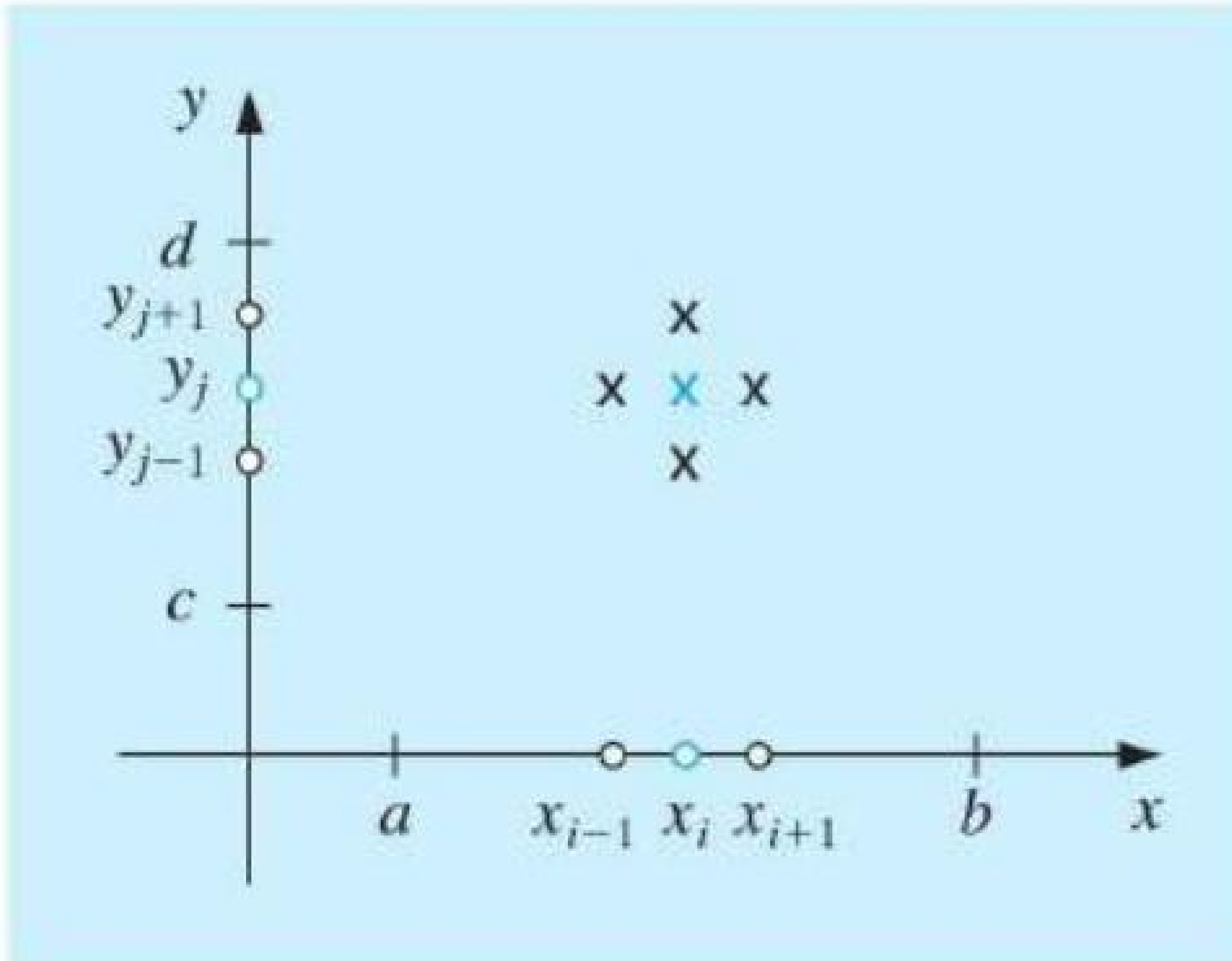
حيث w_{ij} تقرّب $u(x_i, y_j)$.

إن المعادلة النمطية في (4.12) تحتوي تقريبات لـِ $u(x, y)$ عند النقاط

(x_i, y_{j-1}), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_j), (x_{i-1}, y_j) و (x_i, y_{j+1})

وبإعادة النظر إلى التقسيم حيث تقع هذه النقاط، يظهر أن كل معادلة تحتوي على تقريبات في منطقة نجمية الشكل حول (x_i, y_j). (انظر شكل 5.12) إذا استخدمنا المعلومات من حالات الحدود (5.12) حيثما كان ذلك مناسبًا في النظام المعطى بالمعادلة (4.12)، أي على النقاط (x_i, y_j) المجاورة جميعها لخلية حدودية، نحصل على نظام خطي $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$ بمجاهيل هي تقريبات w_{ij} لـِ $u(x_i, y_j)$ على النقاط الداخلية لخلية. يُعبّر عن النظام الخطي المتضمن لهذه المجاهيل من أجل حساب المصفوفات بفاعلية أكثر إذا ما أعيدت تسمية النقاط الداخلية للخلية. وهناك نظام محبّذ لتسمية هذه النقاط.

شكل 5.12



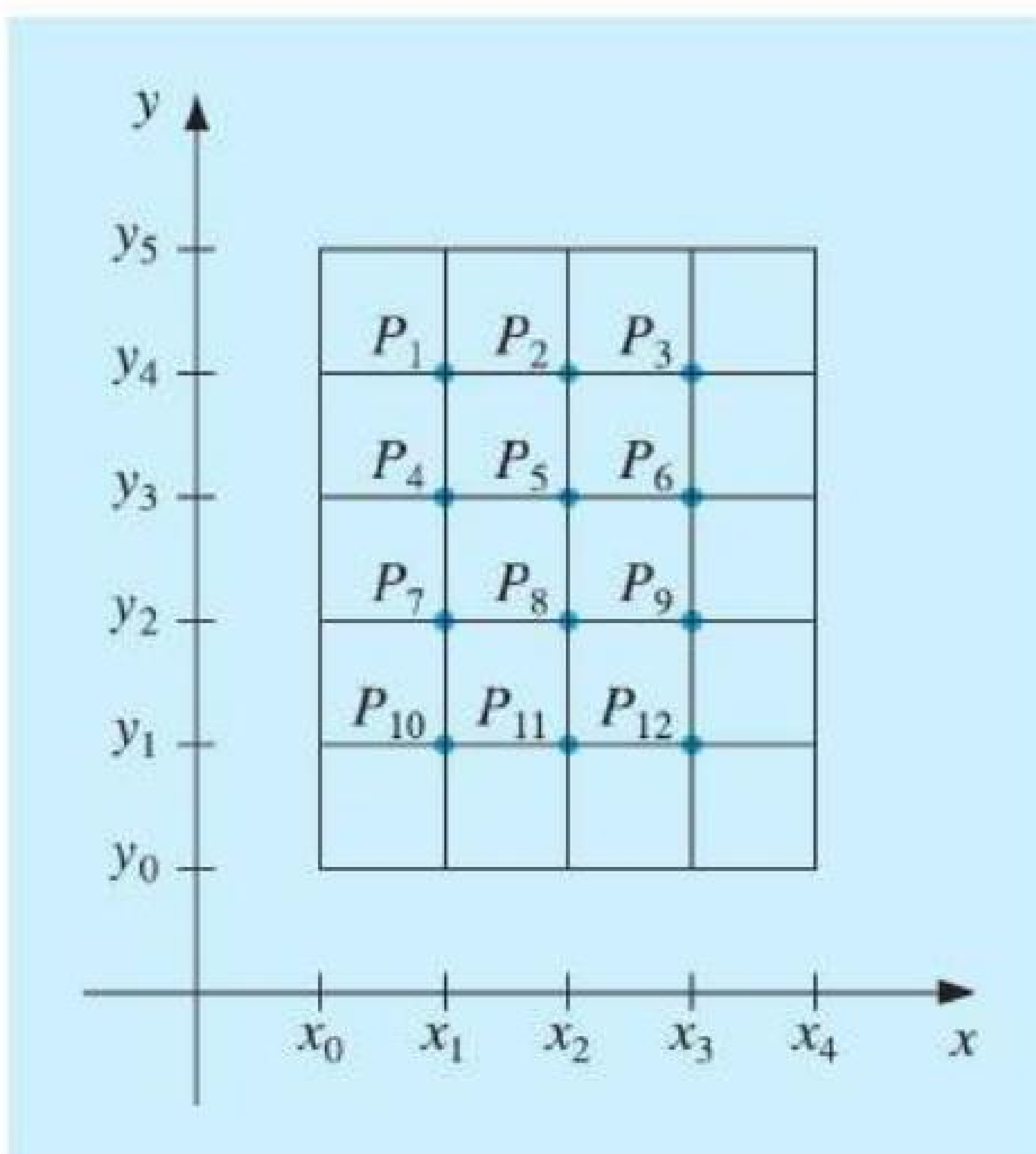
(انظر [Var 1, p.210]) يتلخص بوضع

$$w_l = w_{i,j} \text{ و } P_l = (x_i, y_j)$$

حيث $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$ لكل $i = 1, 2, \dots, n - 1$ و $j = 1, 2, \dots, m - 1$

إن هذا يعطي تسمية لنقاط الخلايا بالتتابع من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل. وعلى سبيل المثال إذا كان $n = 4$ و $m = 5$ فإن التسمية الجديدة تنتج تقسيمًا تظهر نقاطه في شكل (6.12). إن تسمية النقاط بهذه الطريقة يضمن أن النظام اللازم لتحديد w_{ij} هو مصفوفة مطوّقة ذات طوق عرضه $2n - 1$ على الأكثر.

شكل 6.12



مثال 1 افترض مسألة توزيع الحرارة في الحالة المستقرة في صفيحة معدنية مربعة دقيقة ذات أبعاد 0.5 m في 0.5 m. تثبت درجة حرارة حدين متجاورين عند $0^\circ C$، وتزداد الحرارة على الحدين الآخرين خطيًّا عند إحدى الزوايا من $0^\circ C$ إلى $100^\circ C$ حيث يلتقي الضلعان.

إذا وضعنا الضلعين اللذين في الحالة الحدودية صفر على الإحداثي x والإحداثي y أمكن التعبير عن المسألة بالمعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

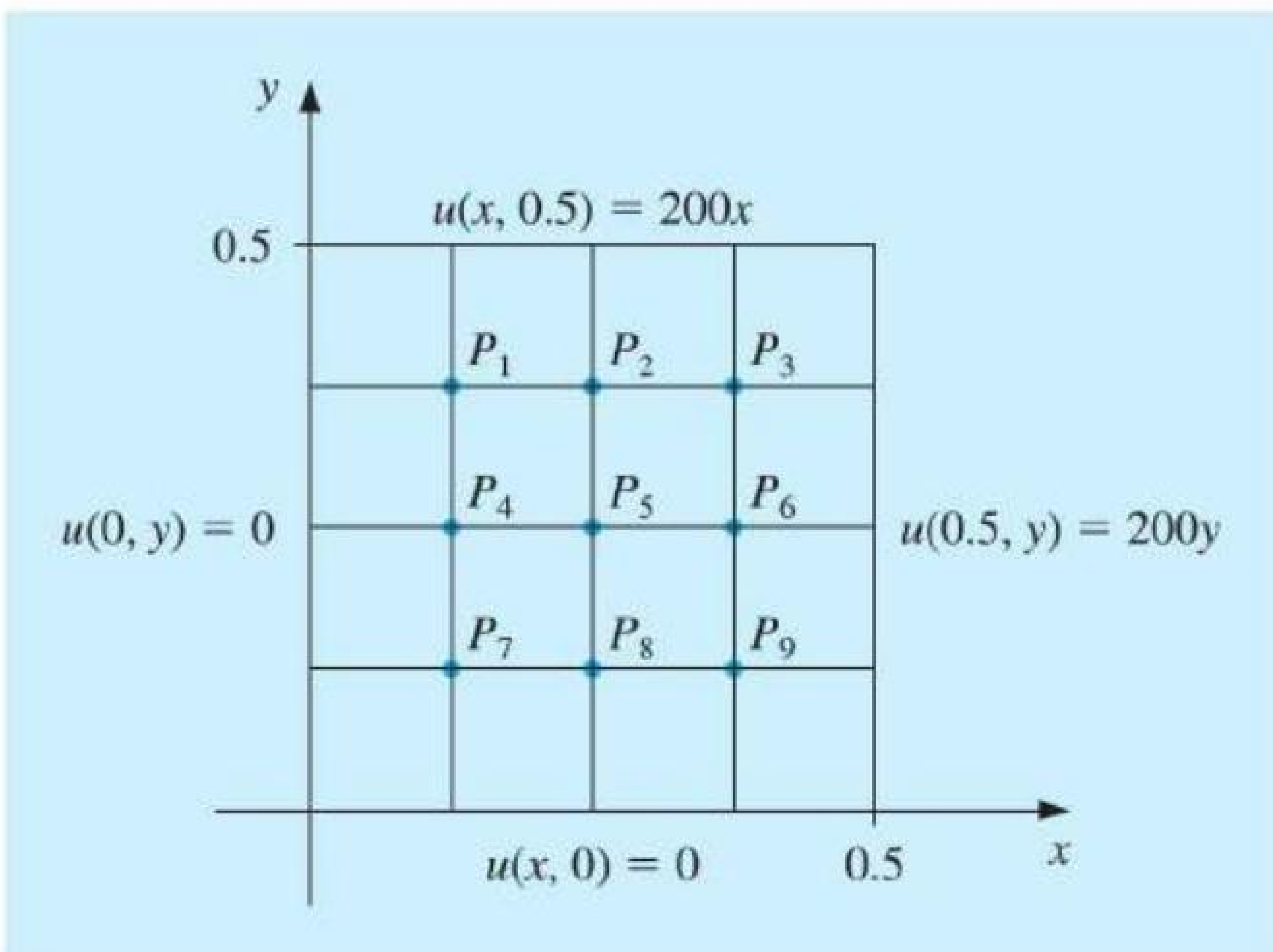
لكل (x, y) في المجموعة $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 0.5,\ 0 < y < 0.5\}$ وفي الحالات الحدودية

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 0.5) = 200x, \quad u(0.5, y) = 200y$$

إذا كان $n = m = 4$ فإن المسألة تخضع للتقسيم المعطى في شكل (7.12)، وتكون معادلة الفرق (4.12) كما يأتي:

$$4w_{i,j} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1} = 0 \quad \text{لكل } i = 1, 2, 3 \text{ و } j = 1, 2, 3$$

شكل 7.12



وبالتعبير عن هذا بدلالة التسمية الجديدة لنقاط التقسيم $w_i = u(P_i)$ يتضمن أن المعادلات على النقاط P_i تصبح

$$\begin{aligned}
P_1 &: \quad 4w_1 - w_2 - w_4 = w_{0,3} + w_{1,4}\\
P_2 &: \quad 4w_2 - w_3 - w_1 - w_5 = w_{2,4}\\
P_3 &: \quad 4w_3 - w_2 - w_6 = w_{4,3} + w_{3,4}\\
P_4 &: \quad 4w_4 - w_5 - w_1 - w_7 = w_{0,2}\\
P_5 &: \quad 4w_5 - w_6 - w_4 - w_2 - w_8 = 0\\
P_6 &: \quad 4w_6 - w_5 - w_3 - w_9 = w_{4,2}\\
P_7 &: \quad 4w_7 - w_8 - w_4 = w_{0,1} + w_{1,0}\\
P_8 &: \quad 4w_8 - w_9 - w_7 - w_5 = w_{2,0}\\
P_9 &: \quad 4w_9 - w_8 - w_6 = w_{3,0} + w_{4,1}
\end{aligned}$$

حيث نحصل على الأطراف اليمنى للمعادلات من الحالات الحدودية.

وفي الحقيقة، تتضمن الحالات الحدودية ما يأتي:

$$w_{1,0} = w_{2,0} = w_{3,0} = w_{0,1} = w_{0,2} = w_{0,3} = 0,$$

$$w_{3,4} = w_{4,3} = 75 \text{ و } w_{1,4} = w_{4,1} = 25, \quad w_{2,4} = w_{4,2} = 50$$

إن النظام الخطي المرتبط بهذه المسألة يكون على الصيغة

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

إن قيم $w_1, w_2, \ldots, w_9$ التي قد وجدت بتطبيق طريقة جاوس – سيدل على هذه المصفوفة معطاة في جدول (12.1).

جدول 1.12

w_i	i
18.75	1
37.50	2
56.25	3
12.50	4
25.00	5
37.50	6
6.25	7
12.50	8
18.75	9

إن هذه الإجابات صحيحة؛ لأن الحلّ الحقيقي $u(x, y) = 400xy$ يحقق

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \equiv 0$$

ولذلك فإن خطأ القطع يكون صفرًا عند كل خطوة. ■

إن المسألة التي افرضناها في المثال (1) فيها الحجم نفسه لكل خلية، وهو 0.125 على كل إحداثي، وتتطلب حل نظام خطي 9×9 فقط. إن هذا يبسّط الوضع، ولا يحتاج إلى المسائل الحسابية التي تظهر عندما يكون النظام أكبر. تستخدم الخوارزمية (1.12) طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel بتكرار لحل النظام الخطي الناتج، كما أنها تسمح بحجوم خلايا غير متساوية على الإحداثيات.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.12

الفرق المنتهي في معادلة بواسون Poisson Equation Finite - Difference

لتقريب حل معادلة بواسون

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

تحت الشروط الحدودية

$u(x, y) = g(x, y)$ إذا كان $x = a$ أو $x = b$ و $c \le y \le d$

و $u(x, y) = g(x, y)$ إذا كان $y = c$ أو $y = d$ و $a \le x \le b$

المدخلات: نقاط النهاية a, b, c, d، أعداد صحيحة $m \ge 3, n \ge 3$ حد الخطأ المسموح به TOL أكبر عدد من التكرارات N.

المخرجات: التقريبات $w_{i,j}$ للقيم $u(x_i, y_j)$ لكل $i = 1,\ldots, n-1$ ولكل $j = 1,\ldots, m-1$ أو رسالة تفيد بأنه قد تم تجاوز العدد الأكبر من التكرارات.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/n$ $k = (d-c)/m$
2	لكل $i = 1,\ldots,\ n-1$ ضع $x_i = a + ih$ (تحدد الخطوتان 2 و 3 نقاط الشبكة).
3	لكل $j = 1,\ldots,\ m-1$ ضع $y_j = c + jk$.
4	لكل $i = 1,\ldots,\ n-1$ ، لكل $j = 1,\ldots,\ m-1$ ضع $w_{i,j} = 0$
5	ضع $\lambda = h^2/k^2$ $\mu = 2(1+\lambda)$ $l = 1$
6	ما دام $l \le N$ فنفّذ الخطوات 7-20. (تنفذ الخطوات 7-20 تكرارات جاوس – سيدل).
7	ضع $z = \big(-h^2 f(x_1, y_{m-1}) + g(a, y_{m-1}) + \lambda g(x_1, d) + \lambda w_{1,m-2} + w_{2,m-1}\big)/\mu$ $NORM = \lvert z - w_{1,m-1} \rvert$ $w_{1,m-1} = z$
8	لكل $i = 2,\ldots,n-2$ ضع $z = \big(-h^2 f(x_i, y_{m-1}) + \lambda g(x_i, d) + w_{i-1,m-1} + w_{i+1,m-1} + \lambda w_{i,m-2}\big)/\mu$ إذا كان $\lvert w_{i,m-1} - z \rvert > NORM$ فضع $NORM = \lvert w_{i,m-1} - z \rvert$ ضع $w_{i,m-1} = z$
9	ضع $z = \big(-h^2 f(x_{n-1}, y_{m-1}) + g(b, y_{m-1}) + \lambda g(x_{n-1}, d) + w_{n-2,m-1} + \lambda w_{n-1,m-2}\big)/\mu$ إذا كان $\lvert w_{n-1,m-1} - z \rvert > NORM$ فضع $NORM = \lvert w_{n-1,m-1} - z \rvert$ ضع $w_{i,m-1} = z$
10	لكل $j = m-2,\ldots,\ 2$ نفّذ الخطوات 11، 12 و 13.
11	ضع $z = (-h^2 f(x_1, y_j) + g(a, y_j) + \lambda w_{1,j+1} + \lambda w_{1,j-1} + w_{2,j})/\mu$ إذا كان $\lvert w_{1,j} - z \rvert > NORM$ فضع $NORM = \lvert w_{1,j} - z \rvert$ ضع $w_{1,j} = z$
12	لكل $i = 2,\ldots,n-2$ ضع $z = (-h^2 f(x_i, y_j) + w_{i-1,j} + \lambda w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + \lambda w_{i,j-1})/\mu$ إذا كان $\lvert w_{i,j} - z \rvert > NORM$ فضع $NORM = \lvert w_{i,j} - z \rvert$ ضع $w_{i,j} = z$
13	ضع $z = \big(-h^2 f(x_{n-1}, y_j) + g(b, y_j) + w_{n-2,j} + \lambda w_{n-1,j+1} + \lambda w_{n-1,j-1}\big)/\mu$ إذا كان $\lvert w_{n-1,j} - z \rvert > NORM$ فضع $NORM = \lvert w_{n-1,j} - z \rvert$ ضع $w_{n-1,j} = z$
14	ضع $z = \big(-h^2 f(x_1, y_1) + g(a, y_1) + \lambda g(x_1, c) + \lambda w_{1,2} + w_{2,1}\big)/\mu$ إذا كان $\lvert w_{1,1} - z \rvert > NORM$ فضع $NORM = \lvert w_{1,1} - z \rvert$ ضع $w_{1,1} = z$



15	لكل $i = 2, \ldots, n-2$ ضع $z = \left(-h^2 f(x_i, y_1) + \lambda g(x_i, c) + w_{i-1,1} + \lambda w_{i,2} + w_{i+1,1}\right)/\mu$ إذا كان $\lvert w_{i,1} - z\rvert > NORM$ فضع $NORM = \lvert w_{i,1} - z\rvert$ ضع $w_{i,1} = z$
16	ضع $z = \left(-h^2 f(x_{n-1}, y_1) + g(b, y_1) + \lambda g(x_{n-1}, c)\right.$ $\left.+w_{n-2,1} + \lambda w_{n-1,2}\right)/\mu$ إذا كان $\lvert w_{n-1,1} - z\rvert > NORM$ فضع $NORM = \lvert w_{n-1,1} - z\rvert$ ضع $w_{n-1,1} = z$
17	إذا كان $NORM \leq TOL$ فعندئذ نفّذ الخطوتين 18 و 19.
18	لكل $i = 1, \ldots, n-1$ لكل $j = 1, \ldots, m-1$ المخرجات $(x_i, y_j, w_{i,j})$
19	(العملية كانت ناجحة). توقف.
20	ضع $l = l + 1$
21	المخرجات (تم تجاوز أكبر عدد من التكرارات) (لم تنجح العملية) توقف.



على الرغم من أن عملية التكرار لجاوس – سيدل متضمنة في الخوارزمية (1.12) للتبسيط، فإن من المهم استخدام طريقة مباشرة مثل طريقة جاوس للحذف عندما يكون النظام صغيرًا أي من الرتبة 100 أو أقل؛ لأن موجبية التحديد تضمن الاستقرار بالنسبة إلى أخطاء التدوير. وعلى نحو خاص، فإن تعميم خوارزمية كراوت للتحليل (7.6) (انظر [Var1,p.221]) كافية لحل هذا النظام؛ لأن المصفوفة تكون بصيغة قطاعات متماثلة ثلاثية القطر

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_1 & A_2 & C_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & C_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{m-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_{m-1} & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

حيث كل قطاع بحجم $(n-1) \times (n-1)$.

أما في الأنظمة الكبيرة فيجب استخدام طريقة التكرار وبالتحديد طريقة SOR المعروضة في الخوارزمية (3.7). إن اختيار ω الأعظمية في هذه الحالة يأتي من تحلّل A إلى مصفوفتها القطرية D والمصفوفتين المثلثية العلوية U والمثلثية السفلية L.

$$A = D - L - U$$

وهي مصفوفة طريقة جاكوبي

$$B = D^{-1}(L + U)$$

وعندئذ يكون نصف القطر spectral للمصفوفة B (انظر [Var1]) هو

$$\rho(B) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

ومن ثم فإن قيمة ω التي ستستخدم هي

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(B)]^2}} = \frac{4}{2+\sqrt{4-\left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]^2}}$$

من الممكن أن ندخل طريقة القطاع في الخوارزمية لنحصل على تقارب أسرع في عملية SOR. لعرض هذه الطريقة؛ انظر ([Var1, pp.221]).

مثال 2 افترض معادلة بواسون

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

مع الحالات الحدودية

$$u(0,y) = 0, \quad u(2,y) = 2e^y, \quad 0 \le y \le 1$$

$$u(x,0) = x, \quad u(x,1) = ex, \quad 0 \le x \le 2$$

سنستخدم الخوارزمية (1.12) لنجد تقريب الحل الصحيح $u(x,y) = xe^y, n = 6\ , m = 5$

إن معيار التوقف في طريقة جاوس – سيدل في الخطوة 17 تتطلب

$$\left|w_{ij}^{(l)} - w_{ij}^{(l-1)}\right| \le 10^{-10}$$

لكل $i = 1,\ldots,\ 5$ ولكل $j = 1,\ldots,\ 4$.

ولذلك فقد حصلنا على حلٍّ معادلة الفرق بدقة، وتوقفت العملية عند $l = 61$. وقد عُرضت النتائج والقيم الصحيحة في جدول (2.12). ■

جدول 2.12

i	j	x_i	y_j	$w_{i,j}^{(61)}$	$u(x_i, y_j)$	$\left\lvert u(x_i, y_j) - w_{i,j}^{(61)}\right\rvert$
1	1	0.3333	0.2000	0.40726	0.40713	1.30×10^{-4}
1	2	0.3333	0.4000	0.49748	0.49727	2.08×10^{-4}
1	3	0.3333	0.6000	0.60760	0.60737	2.23×10^{-4}
1	4	0.3333	0.8000	0.74201	0.74185	1.60×10^{-4}
2	1	0.6667	0.2000	0.81452	0.81427	2.55×10^{-4}
2	2	0.6667	0.4000	0.99496	0.99455	4.08×10^{-4}
2	3	0.6667	0.6000	1.2152	1.2147	4.37×10^{-4}
2	4	0.6667	0.8000	1.4840	1.4837	3.15×10^{-4}
3	1	1.0000	0.2000	1.2218	1.2214	3.64×10^{-4}
3	2	1.0000	0.4000	1.4924	1.4918	5.80×10^{-4}
3	3	1.0000	0.6000	1.8227	1.8221	6.24×10^{-4}
3	4	1.0000	0.8000	2.2260	2.2255	4.51×10^{-4}
3	4	1.0000	0.8000	2.2260	2.2255	4.51×10
4	1	1.3333	0.2000	1.6290	1.6285	4.27×10^{-4}
4	2	1.3333	0.4000	1.9898	1.9891	6.79×10^{-4}
4	3	1.3333	0.6000	2.4302	2.4295	7.35×10^{-4}
4	4	1.3333	0.8000	2.9679	2.9674	5.40×10^{-4}
5	1	1.6667	0.2000	2.0360	2.0357	3.71×10^{-4}
5	2	1.6667	0.4000	2.4870	2.4864	5.84×10^{-4}
5	3	1.6667	0.6000	3.0375	3.0369	6.41×10^{-4}
5	4	1.6667	0.8000	3.7097	3.7092	4.89×10^{-4}

EXERCISE SET مجموعة التمارين 1.12

1. استخدم طريقة الفرق المحدود لتقريب حلّ المسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 2) = (x - 2)^2, \quad 0 \le x \le 1$$
$$u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = (y - 1)^2, \quad 0 \le y \le 2$$

استخدم $h = k = \frac{1}{2}$، وقارن النتائج بالحل الفعلي $u(x, y) = (x - y)^2$.

2. استخدم طريقة الفرق المحدود لتقريب حل المسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 2 \ln x, \qquad u(x, 1) = \ln(x^2 + 1), \quad 1 \le x \le 2$$
$$u(1, y) = \ln(y^2 + 1), \quad u(2, y) = \ln(y^2 + 4), \quad 0 \le y \le 1$$

استخدم $h = k = \frac{1}{3}$، وقارن النتائج بالحل الفعلي $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

3. أوجد تقريب حلول المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية الآتية باستخدام الخوارزمية 1.12:

أ.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x, \qquad 0 \le x \le 1$$
$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, \qquad 0 \le y \le 1$$

استخدم $h = k = 0.2$، وقارن النتائج بالحل الفعلي $u(x, y) = xy$.

ب.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\cos(x + y) + \cos(x - y)), \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

$$u(0, y) = \cos y, \quad u(\pi, y) = -\cos y, \qquad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$$
$$u(x, 0) = \cos x, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi$$

استخدم $h = \pi/5$ و $k = \pi/10$، وقارن النتائج بالحل الفعلي $u(x, y) = \cos x \cos y$.

ج.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)e^{xy}, \qquad 0 < x < 2, \; 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = 1, \quad u(2, y) = e^{2y}, \qquad 0 \le y \le 1$$
$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, 1) = e^{x}, \qquad 0 \le x \le 2$$

استخدم $h = 0.2$ و $k = 0.1$، وقارن النتائج بالحل الفعلي $u(x, y) = e^{xy}$.

د.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad 1 < x < 2, \quad 1 < y < 2$$

$$u(x, 1) = x \ln x, \quad u(x, 2) = x \ln(4x^2), \qquad 1 \le x \le 2$$
$$u(1, y) = y \ln y, \quad u(2, y) = 2y \ln(2y), \qquad 1 \le y \le 2$$

استخدم $h = k = 0.1$، وقارن النتائج بالحل الفعلي $u(x, y) = xy \ln xy$.

4. كرّر التمرين 3(a) باستخدام الاستكمال الخارجي بأخذ $h_0 = 0.2$، $h_1 = h_0/2$ و $h_2 = h_0/4$.

5. أنشئ خوارزمية شبيهة بالخوارزمية (1.12) إلا أن المطلوب هو استخدام طريقة SOR مع ω الأعظمية بدلًا من طريقة جاوس − سيدل لحل النظام الخطي.

6. كرّر التمرين (3) باستخدام الخوارزمية التي أنشئت في التمرين (5).

7. كابل ثنائي المحور مصنوع من موصل داخلي مساحة مقطعه العرضي 0.1، أُنشئ مربع وموصل خارجي بمساحة 0.5 إنش مربع. إن الطاقة الكامنة على نقطة في المقطع العرضي للكابل توصف بمعادلة لابلاس.

افترض أن الموصل الداخلي بقي على 0 فولت، والموصل الخارجي بقي على 110 فولت. أوجد الطاقة الكامنة بين الموصلين باستخدام تقسيم طول المسافة الأفقية للخلية $h = 0.1$ إنشًا، وطول المسافة العمودية $k = 0.1$ in على المنطقة

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x, y \le 0.5\}$$

أوجد تقريب حلِّ معادلة لابلاس على كل نقطة في التقسيم، واستخدم مجموعتي الحالات الحدودية لاشتقاق نظام خطي ليتم حله بطريقة جاوس − سيدل.

8. صفيحة مستطيلة من الفضة بطول 6 cm وعرض 5 cm.

نتجت حرارة متجانسة على كل نقطة بمعدل $q = 1.5\ \text{cal}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})$. افترض أن x تمثل المسافة على حافة طول الصفيحة الذي هو 6 cm و y تمثِّل المسافة على حافة عرض الصفيحة الذي هو 5 cm.

افترض أن الحرارة u على الأطراف قد بقيت على درجات الحرارة الآتية:

$$u(x, 0) = x(6 - x), \quad u(x, 5) = 0, \quad 0 \le x \le 6$$

$$u(0, y) = y(5 - y), \quad u(6, y) = 0, \quad 0 \le y \le 5$$

حيث يقع المركز على نقطة الصفيحة بالإحداثيات (0,0) وتقع حافتا المستطيل على الإحداثي x والإحداثي y. إن الحرارة في حالة الاستقرار $u = u(x, y)$ تحقق معادلة بواسون

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{q}{K}, \quad 0 < x < 6,\ 0 < y < 5$$

حيث K ثابت توصيل الحرارة، ويساوي $1.04\ \text{cal}/(\text{cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s})$.

أوجد تقريب الحرارة $u(x, y)$ باستخدام الخوارزمية (1.12) بأخذ $h = 0.4$ و $k = \frac{1}{3}$.

2.12 المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة Parabolic Partial Differential

إن المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة التي ندرسها هي معادلة الحرارة أو الانتشار على الصيغة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{6.12}$$

تحت الشروط

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \le x \le l \text{ و } u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0$$

وإن الطريقة التي نستخدمها لإيجاد تقريب لحلِّ هذه المسألة تحتوي الفروق المحدودة، وهي مماثلة للطريقة المستخدمة في الفصل (1.12).

أولاً: نختار عددًا صحيحًا $m > 0$ ونعرّف $h = l/m$، وبعدئذ نختار حجم الخطوة الزمنية k.

إن نقاط تقسيم هذه الحالة هي (x_i, t_j) حيث $x_i = ih$ لكل $i = 0, 1, \ldots, m$ و $t_j = jk$ لكل $j = 0, 1, \ldots$.

نحصل على طريقة الفرق باستخدام سلسلة تايلور في t لتكوين مقسوم الفرق.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \tag{7.12}$$

لقيم ما $\mu_j \in (t_j, t_{j+1})$، وسلسلة تايلور في x لتكون مقسوم الفرق

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \tag{8.12}$$

حيث $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

تتضمن المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة (6.12) أن نقاط التقسيم الداخلية (x_i, t_j) لكل $i = 1, 2, \ldots, m-1$ و $j = 1, 2, \ldots$ تعطينا

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

ولذلك تصبح طريقة الفرق باستخدام مقسومي الفرق (7.12) و (8.12) على الصيغة

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2\frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \tag{9.12}$$

حيث w_{ij} تقرّب $u(x_i, t_j)$.

إن خطأ القطع المحلي لمعادلة الفرق هو

$$\tau_{ij} = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \tag{10.12}$$

حُلَّ المعادلة (9.10) لإيجاد $w_{i,j+1}$ يعطي

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right)w_{ij} + \alpha^2\frac{k}{h^2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) \tag{11.12}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, m-1$ و $j = 1, 2, \ldots$.

بما أن الحالة الابتدائية $u(x, 0) = f(x)$ لكل $0 \le x \le l$ تتضمن أن $w_{i\,0} = f(x_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, m$ فإنه يمكن استخدام هذه القيم في المعادلة (11.12) لإيجاد قيمة $w_{i\,1}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, m-1$. أما الحالات الإضافية $u(0, t) = 0$ و $u(l, t) = 0$ فتتضمن أن $w_{0\,1} = w_{m\,1} = 0$ لذلك يكون من الممكن إيجاد المدخلات جميعها التي على الصيغة $w_{i\,1}$. إذا أعدنا تطبيق الطريقة حال معرفة التقريبات $w_{i\,1}$ جميعها فإنه يمكن إيجاد قيم $w_{i,2}, w_{i,3}, \ldots,$ بطريقة مماثلة. إن الطبيعة الصريحة لطريقة الفرق تتضمن إمكانية كتابة المصفوفة $(m-1) \times (m-1)$ المقترنة بهذا النظام على الصيغة ثلاثية الأقطار

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

حيث $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$.

إذا افترضنا

$$\mathbf{w}^{(0)} = (f(x_1),\ f(x_2), \ldots,\ f(x_{m-1}))^t$$

و $\mathbf{w}^{(j)} = (w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{m-1,j})^t$ لكل $j = 1, 2, \ldots,$

فإن الحل التقريبي يُعطى بالصيغة

و $\mathbf{w}^{(j)} = A\mathbf{w}^{(j-1)}$ لكل $j = 1, 2, \ldots$

ولذلك يمكن الحصول على $\mathbf{w}^{(j)}$ من $\mathbf{w}^{(j-1)}$ بعملية ضرب مصفوفة بسيطة.

إن هذا يعرف بطريقة الفرق الأمامي Forward - Difference method. إذا كان حلُّ المعادلة التفاضلية الجزئية يملك أربع مشتقات جزئية متصلة في x، ومشتقتين في t فإن المعادلة (10.12) تتضمن الطريقة من الرتبة $O(k + h^2)$.

مثال 1 افترض معادلة الحرارة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \le t$$

في الحالات الحدودية

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

والحالات الابتدائية

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \le x \le 1$$

إن حلّ هذه المسألة هو

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$$

سيُقرّب الحل عند $t = 0.5$ باستخدام طريقة الفرق الأمامي، أولاً بأخذ $h = 0.1$، $k = 0.0005$ و $\lambda = 0.05$ ثم بأخذ $h = 0.1$، $k = 0.01$ و $\lambda = 1$.

لقد عُرضت النتائج في جدول (3.12). ■

جدول 3.12

x_i	$u(x_i, 0.5)$	$w_{i,1000}$ $k = 0.0005$	$\lvert u(x_i, 0.5) - w_{i,1000}\rvert$	$w_{i,50}$ $k = 0.01$	$\lvert u(x_i, 0.5) - w_{i,50}\rvert$
0.0	0	0		0	
0.1	0.00222241	0.00228652	6.411×10^{-5}	8.19876×10^{7}	8.199×10^{7}
0.2	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}	-1.55719×10^{8}	1.557×10^{8}
0.3	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}	2.13833×10^{8}	2.138×10^{8}
0.4	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}	-2.50642×10^{8}	2.506×10^{8}
0.5	0.00719188	0.00739934	2.075×10^{-4}	2.62685×10^{8}	2.627×10^{8}
0.6	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}	-2.49015×10^{8}	2.490×10^{8}
0.7	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}	2.11200×10^{8}	2.112×10^{8}
0.8	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}	-1.53086×10^{8}	1.531×10^{8}
0.9	0.00222241	0.00228652	6.511×10^{-5}	8.03604×10^{7}	8.036×10^{7}
1.0	0	0		0	

يتوقع أن يكون خطأ القطع في المثال (1) من الرتبة $O(k + h^2)$. على الرغم من الحصول على هذا بأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.0005$، فإنه بالتأكيد غير ذلك بأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.01$. ولكي نبين هذه الصعوبة، يجب دراسة الاستقرار في طريقة الفرق الأمامي.

إذا حصل خطأ $\mathbf{e}^{(0)} = \left(e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \ldots, e_{m-1}^{(0)}\right)^t$ في تمثيل البيانات الابتدائية

$$\mathbf{w}^{(0)} = \left(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{m-1})\right)^t$$

(أو في أي خطوة، علمًا بأن اختيار الخطوة الابتدائية هو للملاءمة)، فإن خطأ $A\mathbf{e}^{(0)}$ يتنامى في $\mathbf{w}^{(1)}$؛ لأن

$$\mathbf{w}^{(1)} = A\left(\mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{e}^{(0)}\right) = A\mathbf{w}^{(0)} + A\mathbf{e}^{(0)}$$

تتواصل هذه العملية في الخطوة n، ويكون الخطأ في $\mathbf{w}^{(n)}$؛ لأن $\mathbf{e}^{(0)}$ مساوٍ لِـ $A^n\mathbf{e}^{(0)}$. ومن ثم تكون الطريقة مستقرة بالضبط عندما لا تكبر هذه الأخطاء في حال ازدياد n. ولكن يكون هذا صحيحًا إذا وفقط إذا كان لأي خطأ ابتدائي $\mathbf{e}^{(0)}$ نحصل على $\|A^n\mathbf{e}^{(0)}\| \leq \|\mathbf{e}^{(0)}\|$ n جميعها. إذن يجب أن نحصل على $\|A^n\| \leq 1$، وهو شرط يتطلب أن $\rho(A^n) = (\rho(A))^n \leq 1$ بحسب النظرية (15.7). ومن ثم تكون طريقة الفرق الأمامي مستقرة فقط إذا كان $\rho(A) \leq 1$. ومن الممكن برهنة أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\mu_i = 1 - 4\lambda\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2 \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

(انظر تمرين 13). ومن ثم يختزل شرط الاستقرار إلى تحديد ما إذا كان

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq m-1}\left|1 - 4\lambda\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2\right| \leq 1$$

التي تبسّط إلى

$$0 \leq \lambda\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

بما أن الاستقرار يتطلب تحقق هذه المتراجحة عندما $h \to 0$، أو على نحو مكافئ عندما as $m \to \infty$، فإن كون

$$\lim_{m\to\infty}\left[\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)\right]^2 = 1$$

يعني أن الاستقرار سيحدث فقط إذا كان $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$.

بما أن $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$ فإن هذه المتراجحة تتطلب اختيار h و k بحيث

$$\alpha^2\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

في المثال (1) كان لدينا $\alpha = 1$، ولذلك فإن هذا الشرط يتحقق عندما $h = 0.1$ و $k = 0.0005$،

ولكن عندما زيدت k لتصبح 0.01 دون أي زيادة في h، أصبحت النسبة

$$\frac{0.01}{(0.1)^2} = 1 > \frac{1}{2}$$

وظهرت مشكلات الاستقرار.

بالتوافق مع مصطلحات الباب الخامس، نقول إن طريقة الفرق الأمامي مستقرة بشروط، ونلاحظ

أن الطريقة تتقارب إلى حلِّ المعادلة (6.12) بمعدل تقارب $O(k + h^2)$ على شرط أن

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

وتتحقق شروط الاتصال اللازمة على الحل.

(يمكن الرجوع إلى [IK,pp502-505] للحصول على برهان مفصل)؛ للحصول على طريقة تكون مستقرة دون شروط (Unconditionally stable)؛ نعد طرائق الفرق الضمني التي تنتج من مقسوم الفرق الخلفي للمشتقة $(\partial u/\partial t)(x_i, t_j)$ على الصيغة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

حيث μ_j في (t_{j-1}, t_j).

إن تعويض هذه المعادلة مع معادلة (8.12) لِـ $\partial^2 u/\partial x^2$ في المعادلة التفاضلية الجزئية يعطي

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2}$$
$$= -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

لبعض $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

إن طريقة الفرق – الخلفي (Backward - Difference method) التي تنتج هي

$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \qquad (12.12)$$

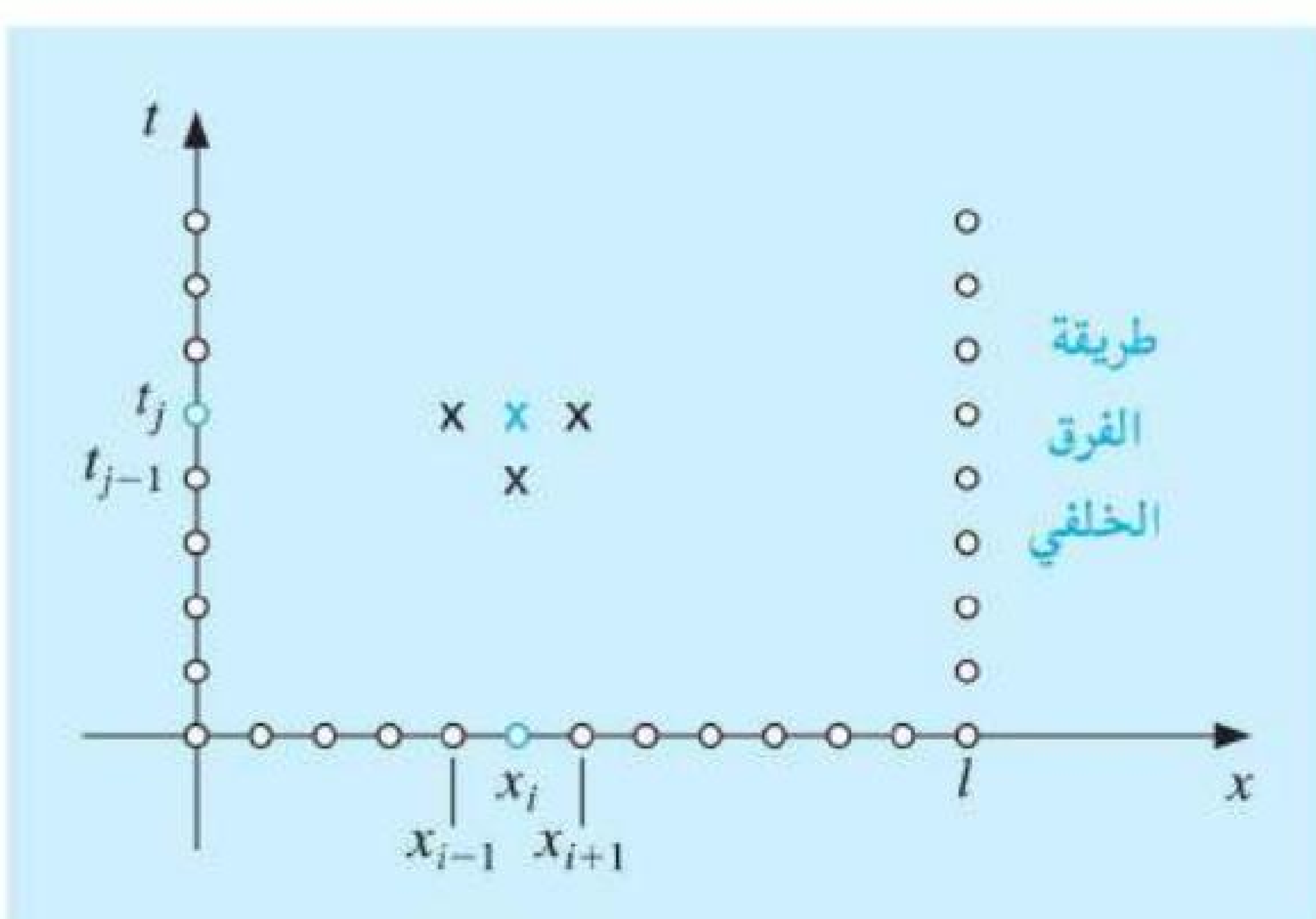
لكل $i = 1, 2, \ldots, m-1$ و $j = 1, 2, \ldots$.

تحتوي طريقة الفرق – الخلفي في كل خطوة نمطية على النقاط الشبكية

(x_i, t_j)، (x_i, t_{j-1})، (x_{i-1}, t_j) و (x_{i+1}, t_j)

وتتعامل مع تقريبات على النقاط المشار إليها بعلامة x في شكل (8.12).

شكل 8.12



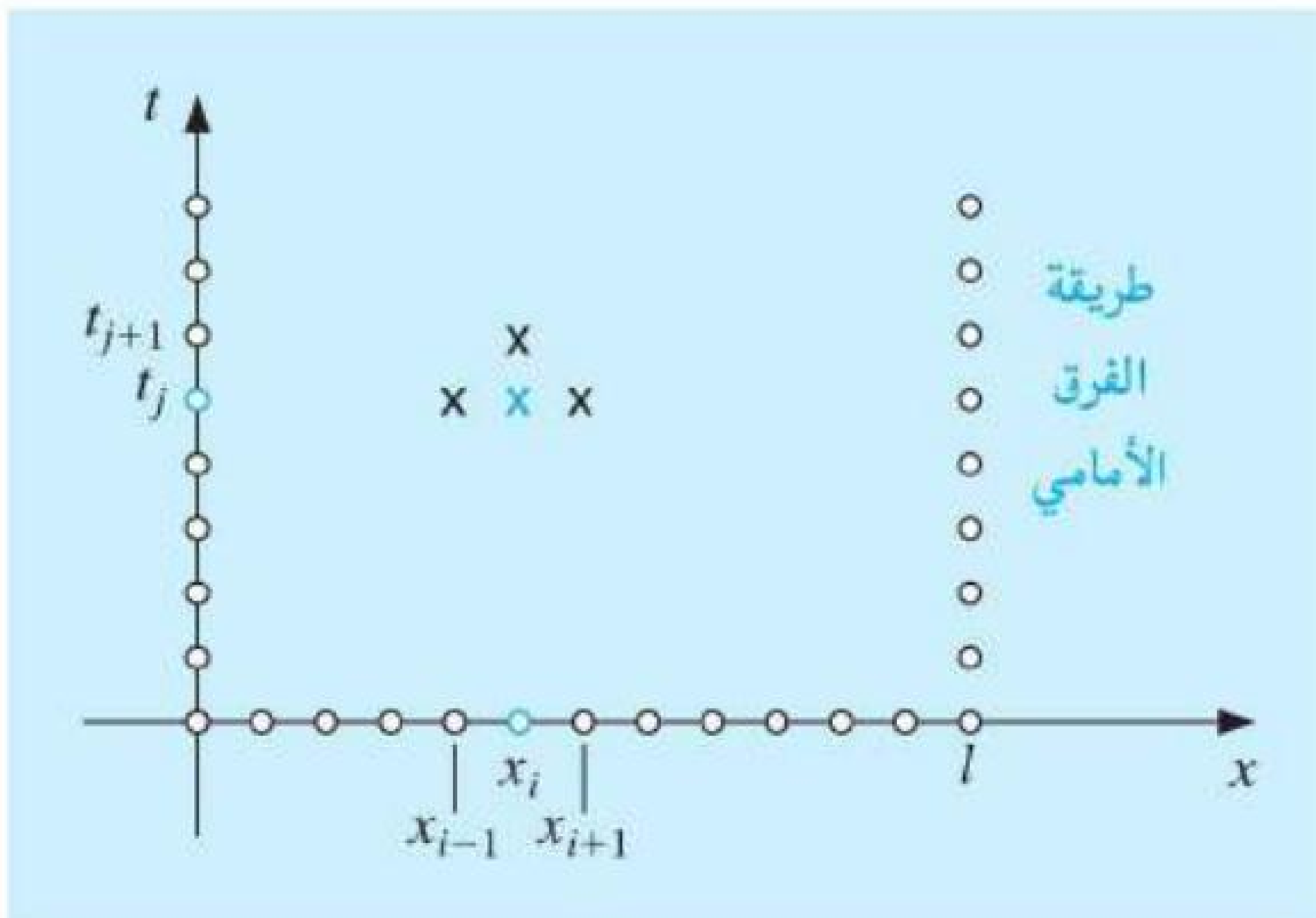
وبما أن الحالات الحدودية والابتدائية المرتبطة بهذه المسألة تعطي معلومات على النقاط الشبكية المشار إليها بدائرة، فإن الشكل يظهر عدم إمكانية استخدام أي عملية صريحة لحل المعادلة (12.12).

تذكر أنه في طريقة الفرق – الأمامي قد استخدمت تقريبات على النقاط

$$(x_{i+1}, t_j) \text{ و } (x_{i-1}, t_j), \quad (x_i, t_j), \quad (x_i, t_{j+1})$$

ومـن ثم كانت هنـاك طريقة صريحة متاحة لإيجـاد التقريبات بناءً علـى الحالات الحدودية والابتدائية. (انظر شكل 9.12)

شكل 9.12



وإذا افترضنا مرّة أخرى أن λ تعبر عن $\alpha^2(k/h^2)$ فإن طريقة الفرق الخلفي تصبح

$$(1+2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, m-1$ و $j = 1, 2, \ldots$

وبمعرفتنا بأن $w_{i,0} = f(x_i)$ لكل $i = 1, 2, \ldots, m-1$ و $w_{m\,j} = w_{0\,j} = 0$ لكل $j = 1, 2, \ldots,$ فإن طريقة الفرق هذه تملك التمثيل بالمصفوفات

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \qquad (13.12)$$

أو $A\mathbf{w}^{(j)} = \mathbf{w}^{(j-1)}$ لكل . $i = 1, 2, \ldots$. ومن ثم يجب علينا الآن حل نظام خطي للحصول على $\mathbf{w}^{(j)}$ من $\mathbf{w}^{(j-1)}$. بما أن $\lambda > 0$ فإن المصفوفة حتمًا ثلاثية الأقطار. ويمكننا استخدام أي من خوارزمية كراوت للتحليل (7.6) أو خوارزمية SOR (3.7) لحلِّ هذا النظام. وتحل الخوارزمية (2.12) المعادلة (13.12) باستخدام تحليل كراوت الذي هو مقبول، إلا إذا كانت m كبيرة في هذه الخوارزمية، ونفترض لأغراض التوقف وجود حد على t.

ALGORITHM
الخوارزمية
2.12

معادلة الفرق الإرجاعي Heat Equation Backward - Difference

لإيجاد تقريب لحل المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

تحت الحالات الحدودية

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 < t < T$$

والحالات الابتدائية

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l$$

المدخلات: نقطة النهاية l، أكبر وقت T، ثابت α، أعداد صحيحة $m \ge 3, N \ge 1$.

المخرجات: تقريبات $w_{i,j}$ إلى $u(x_i, t_j)$ لكل $i = 1,\dots, m-1$ و $j = 1,\dots, N$

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = l/m$ $k = T/N$ $\lambda = \alpha^2 k/h^2$
2	لكل $i = 1,\dots, m-1$ ضع $w_i = f(ih)$. (القيم الابتدائية) (تنفذ الخطوات 3-11 نظامًا خطيًا ثلاثي الأقطار باستخدام الخوارزمية 7.6).
3	ضع $l_1 = 1 + 2\lambda$ $u_1 = -\lambda/l_1$
4	لكل $i = 2,\dots, m-2$ ضع $l_i = 1 + 2\lambda + \lambda u_{i-1}$ t $u_i = -\lambda/l_i$
5	ضع $l_{m-1} = 1 + 2\lambda + \lambda u_{m-2}$
6	لكل $j = 1,\dots, N$ نفذ الخطوات 7 − 11.
7	ضع $t = jk$. (t_j الحالية) $z_1 = w_1/l_1$
8	لكل $i = 2,\dots, m-1$ ضع $z_i = (w_i + \lambda z_{i-1})/l_i$
9	ضع $w_{m-1} = z_{m-1}$
10	لكل $i = m-2,\dots, 1$ ضع $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$
11	المخرجات (t) (لاحظ $t = t_j$) لكل $i = 1,\dots, m-1$ ضع $x = ih$ المخرجات (x, w_i) (لاحظ $w_i = w_{i,j}$)
12	(العملية مكتملة). توقف.

■

مثال 2 طريقة الفرق الإرجاعي الخوارزمية (2.12) بأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.01$ ستستخدم لتقريب حل معادلة الحرارة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

تحت المحددات

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad 0<t,\quad u(x,0)=\sin\pi x,\quad 0\le x\le 1$$

التي افترضت في المثال (1). لكي نعرض الاستقرار غير المشروط لطريقة الفرق الإرجاعي؛ نقارن ثانية $w_{i\ 50}$ بـ $u(x_i,0.5)$ حيث $i=0,1,\ldots,10$. إن النتائج المعروضة في جدول (4.12) لها القيمتان h و k المساويتان لتلك في العمودين الخامس والسادس في جدول (3.12)، التي تشرح استقرار هذه الطريقة.

جدول 4.12

$\lvert w_{i\ 50}-u(x_i,0.5)\rvert$	$u(x_i,0.5)$	$w_{i,50}$	x_i
	0	0	0.0
6.756×10^{-4}	0.00222241	0.00289802	0.1
1.285×10^{-3}	0.00422728	0.00551236	0.2
1.769×10^{-3}	0.00581836	0.00758711	0.3
2.079×10^{-3}	0.00683989	0.00891918	0.4
2.186×10^{-3}	0.00719188	0.00937818	0.5
2.079×10^{-3}	0.00683989	0.00891918	0.6
1.769×10^{-3}	0.00581836	0.00758711	0.7
1.285×10^{-3}	0.00422728	0.00551236	0.8
6.756×10^{-4}	0.00222241	0.00289802	0.9
	0	0	1.0

إن السبب وراء عدم خضوع طريقة الفرق الإرجاعي لمشكلات الاستقرار التي تواجهها طريقة الفرق الأمامي يمكن أن يتضح عن طريق تحليل القيم الذاتية للمصفوفة A. إن القيم الذاتية لطريقة الفرق الإرجاعي (انظر التمرين 14) هي

$$i=1,2,\ldots,\ m-1 \text{ لكل } \mu_i=1+4\lambda\left[\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right]^2$$

وبما أن $\lambda>0$ فإن $\mu_i>1$ لكل $i=1,2,\ldots,\ m-1$. إن هذا يتضمن أن A^{-1} موجودة؛ لأن الصفر ليس قيمة ذاتية للمصفوفة A. وينتج الخطأ $e^{(0)}$ في البيانات الابتدائيّة خطأ مقداره $(A^{-1})^n e^{(0)}$ عند الخطوة A^{-1}. بما أن كل قيمة ذاتية للمصفوفة A هي مقلوب القيمة الذاتية المقابلة لها في A، فإن نصف القطر الطيفي للمصفوفة A^{-1} محدود الأعلى بالعدد 1، والطريقة مستقرة مع الاستقلال عن اختيار $\lambda=\alpha^2(k/h^2)$. وبلغة الباب الخامس نسمي طريقة الفرق الإرجاعي باسم الطريقة المستقرة بلا شروط (Unconditionally stable method). إن خطأ القطع المحلي لهذه الطريقة هو من الرتبة $O(k+h^2)$ على أن حل المعادلة التفاضلية يحقق شروط الاشتقاق العادية. وفي هذه الحالة تتقارب الطريقة إلى حل المعادلة التفاضلية الجزئية بمعدل التقارب نفسه. (انظر [IK,p.508]).

إن ضعف طريقة الفرق الإرجاعي ينتج عن حقيقة أن خطأ القطع المحلي فيه جزء من رتبة $O(k)$، متطلبًا أن تكون الفترات الزمنية أصغر كثيرًا من الفترات المكانية. ومن الواضح أن يكون من المهم وجود طريقة فيها خطأ القطع المحلي من الرتبة $O(k^2+h^2)$.

إن الخطوة الأولى في هذا الاتجاه هي أن نستخدم معادلة فروق ذات خطأ $O(k^2)$ في $u\ (x,t)$ بدلًا من تلك التي استخدمناها سابقًا والتي كان خطؤها $O(k)$. ويمكن عمل هذا باستخدام سلسلة تايلور في t للدالة$u(x,t)$ عند النقطة (x_i,t_j) t ومن ثم إيجاد القيم عند (x_i,t_{j+1}) و (x_i,t_{j-1})

لإيجاد معادلة الفرق المركزي

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1})}{2k} + \frac{k^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \mu_j)$$

حيث $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$.

إن طريقة الفرق التي تنتج من تعويض هذا وفرق المقسوم العادي للمشتقة $(\partial^2 u/\partial x^2)$، أي معادلة (8.12) في المعادلة التفاضلية تسمى طريقة ريتشاردسون، وتعطي الصيغة

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \qquad (14.12)$$

إن خطأ القطع المحلي لهذه الطريقة يكون من رتبة $O(k^2 + h^2)$، ولكن من المؤسف له أن الطريقة تخضع لمشكلات استقرار خطيرة. (انظر التمرينين 11و 12).

وهناك طريقة أكثر فائدة ألا وهي التي اشتُقت عن طريق إيجاد الوسط الحسابي لطريقة الفرق الأمامي في t عند الخطوة j، أي

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

التي لها خطأ قطع محلي هي

$$\tau_F = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) + O(h^2)$$

وطريقة الفرق الإرجاعي في t عند الخطوة $(j+1)$، أي

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

التي فيها خطأ القطع المحلي هو

$$\tau_B = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{u}_j) + O(h^2)$$

إذا افترضنا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{\mu}_j) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

فإن طريقة الفرق المعدّل

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2}\right] = 0$$

لها خطأ قطع محلي من الرتبة $O(k^2 + h^2)$، على شرط تحقق شروط قابلية الاشتقاق العادية.

يعرف هذا بطريقة كرانك – نيكلسون (Crank - Nicolson method)، وتمثّل بصيغة المصفوفات

$$Aw^{(j+1)} = Bw^{(j)} \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (15.12)$$

حيث

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}, \quad \mathbf{w}^{(j)} = (w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m-1,j})^t$$

ريتشاردسون (L.F. Richardson) – الذي مرّ معنا أن اسمه مقترن بالاستكمال الخارجي– قد ساهم في عمل مهم في تقريب المعادلات التفاضلية الجزئية.

بعد عمله بوصفه عالمًا في الفيزياء الرياضية في الحرب العالمية الثانية أنجز كرانك (John Crank 1916) أبحاثًا في الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية، وخصوصًا في مسائل توصيل الحرارة.

إن طريقة كرانك – نيكلسون مبنية على مشترك مع نيكولسون Phyllis Nicolson (1968-1917) وهو عالم فيزياء في جامعة ليدز.

والمصفوفتان A و B معطاتان كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1+\lambda) \end{bmatrix}$$

و

$$B = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1-\lambda) \end{bmatrix}$$

بما أن A مصفوفة موجبة التحديد، سائدة قطريًّا حتمًا وثلاثية الأقطار فإنها غير منفردة.

ويمكن استخدام إما خوارزمية كراوت للتحليل (7.6) وإما الخوارزمية (3.7) SOR للحصول على $\mathbf{w}^{(j+1)}$ من $\mathbf{w}^{(j)}$ لكل $j = 0, 1, 2, \ldots$.

إن الخوارزمية (3.12) تدمج تحليل كراوت في طريقة كرانك – نيكلسون. وكما في الخوارزمية (2.12)، يجب تعيين طول محدود لفترة الزمن لكي تحدد طريقة التوقف.

للتحقق من أن طريقة كرانك – نيكلسون مستقرة بلا شروط وتملك تقاربًا من الرتبة $O(k^2 + h^2)$ يمكن الرجوع إلى [IK,pp.508 - 512].

ALGORITHM
الخوارزمية 3.12

كرانك – نيكلسون Crank - Nicolson

لتقريب حلّ المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

الخاضعة للأحوال الحدودية

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 < t < T$$

والشروط الابتدائية

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l$$

المدخلات: نقطة النهاية l، أكبر وقت T، ثابت α، أعداد صحيحة $m \ge 3, N \ge 1$.

المخرجات: تقريبات $w_{i,j}$ لـ $u(x_i, t_j)$ لكل $i = 1, \ldots, m-1$ و $j = 1, \ldots, N$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = l/m$ $k = T/N$ $\lambda = \alpha^2 k/h^2$ $w_m = 0$

لكل $i = 1,\ldots,\ m-1$ ضع $w_i = f(ih)$. (القيم الابتدائية) (تنفذ الخطوات 3 - 11 نظامًا خطيًا ثلاثي الأقطار باستخدام الخوارزمية (7.6).)	2
ضع $l_1 = 1 + \lambda$ $u_1 = -\lambda/(2l_1)$	3
لكل $i = 2,\ldots,\ m-2$ ضع $l_i = 1 + \lambda + \lambda u_{i-1}/2$ $u_i = -\lambda/(2l_i)$	4
ضع $l_{m-1} = 1 + \lambda + \lambda u_{m-2}/2$	5
لكل $j = 1,\ldots,\ N$ نفّذ الخطوات 7 - 11.	6
ضع $t = jk$. (j الحالية) $z_1 = \left[(1-\lambda)w_1 + \frac{\lambda}{2}w_2\right]\Big/ l_1$	7
لكل $i = 2,\ldots,\ m-1$ ضع $z_i = \left[(1-\lambda)w_i + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1})\right]\Big/ l_i$	8
ضع $w_{m-1} = z_{m-1}$	9
لكل $i = m-2,\ldots,\ 1$ ضع $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$	10
المخرجات (t) (لاحظ $t = t_j$) لكل $i = 1,\ldots,\ m-1$ ضع $x = ih$ المخرجات (x, w_i) (لاحظ $w_i = w_{i,j}$)	11
توقف. (الطريقة مكتملة).	12



■

ستستخدم طريقة كرانك – نيكلسون لإيجاد تقريب لحل المسألة في المثالين (1) و (2) المتمثلة بالمعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t$$

الخاضعة للشروط

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t$$

و

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \le x \le 1$$

لقد استخدمت الاختيارات $m = 10, h = 0.1, N = 50, k = 0.01, \lambda = 1$ في الخوارزمية (3.12) كما كان في المثالين السابقين.

تشير النتائج في جدول (5.12) إلى تفوق طريقة كرانك – نيكلسون من حيث الدقة على طريقة الفرق الإرجاعي، التي كانت الأفضل من بين الطريقتين السابقتين. ■

جدول 5.12

x_i	$w_{i,50}$	$u(x_i, 0.5)$	$\|w_{i,50} - u(x_i, 0.5)\|$
0.0	0	0	
0.1	0.00230512	0.00222241	8.271×10^{-5}
0.2	0.00438461	0.00422728	1.573×10^{-4}
0.3	0.00603489	0.00581836	2.165×10^{-4}
0.4	0.00709444	0.00683989	2.546×10^{-4}
0.5	0.00745954	0.00719188	2.677×10^{-4}
0.6	0.00709444	0.00683989	2.546×10^{-4}
0.7	0.00603489	0.00581836	2.165×10^{-4}
0.8	0.00438461	0.00422728	1.573×10^{-4}
0.9	0.00230512	0.00222241	8.271×10^{-5}
1.0	0	0	

مجموعة التمارين 2.12 EXERCISE SET

1. أوجد تقريب حل المعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة الفرق الإرجاعي

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2,\ 0 < t$$
$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x,0) = \sin \frac{\pi}{2} x, \quad 0 \le x \le 2$$

استخدم $N = 2,\ m = 4,\ T = 0.1$ ثم قارن نتائجك بالحل الفعلي $u(x,t) = e^{-(\pi^2/4)t} \sin(\pi/2)x$.

2. أوجد تقريب حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية باستخدام طريقة الفرق الإرجاعي

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x,0) = 2\sin 2\pi x, \quad 0 \le x \le 1$$

استخدم $m = 3,\ T = 0.1,\ N = 2$ ثم قارن نتائجك بالحل الفعلي $u(x,t) = e^{-(\pi^2/4)t} \sin(\pi/2)x$.

3. كرِّر التمرين (1) باستخدام خوارزمية كرانك − نيكلسون.

4. كرِّر التمرين (2) باستخدام خوارزمية كرانك − نيكلسون.

5. استخدم طريقة الفرق الأمامي لإيجاد تقريب حل المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة الآتية:

أ. $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2,\ 0 < t$$
$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x,0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \le x \le 2$$

استخدم $k = 0.1,\ h = 0.4$، ثم قارن نتائجك عند $t = 0.5$ بالحل الفعلي $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$.

ب. $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$$

استخدم $h = \pi/10$، $k = 0.05$، ثم قارن نتائجك عند $t = 0.5$ بالحل الفعلي $u(x, t) = e^{-t}\sin x$.

6. استخدم طريقة الفرق الأمامي لإيجاد تقريب لحل المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة الآتية:

أ.
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 4,\ 0 < t$$
$$u(0,t) = u(4,t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x,0) = \sin(\pi x/4)(1 + 2\cos(\pi x/4)), \quad 0 \le x \le 4$$

استخدم $k = 0\,04$ ، $h = 0.2$، ثم قارن نتائجك عند $t = 0.4$ بالحل الفعلي
$u(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x/2) + e^{-t/4}\sin(\pi x/4)$

ب.
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x,0) = \cos\pi\left(x - \tfrac{1}{2}\right), \quad 0 \le x \le 1$$

استخدم $k = 0.04$ ، $h = 0.1$ ثم قارن نتائجك عند $t = 0.4$ بالحل الفعلي
$u(x,t) = e^{-t}\cos\pi(x - \frac{1}{2})$.

7. كرّر التمرين (5) باستخدام خوارزمية الفرق الإرجاعي.

8. كرّر التمرين (6) باستخدام خوارزمية الفرق الإرجاعي.

9. كرّر التمرين (5) باستخدام خوارزمية كرانك – نيكلسون.

10. كرّر التمرين (6) باستخدام خوارزمية كرانك – نيكلسون.

11. كرّر التمرين (5) باستخدام طريقة ريتشاردسون.

12. كرّر التمرين (6) باستخدام طريقة ريتشاردسون.

13. برهن أن القيم المميّزة للمصفوفة A الناتجة عن الطريقة الثلاثية الأقطار ذات الرتبة $(m-1)$ في $(m-1)$ المعطاة بالصيغة

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i-1 \text{ أو } j = i+1 \\ 1 - 2\lambda, & j = i \\ 0, & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

هي القيم المميّزة $\mu_i = 1 + 4\lambda\left(\sin\frac{i\pi}{2m}\right)^2$ لكل $i = 1, 2, \ldots, m-1$ ، وأن المتجهات الذاتية المقابلة لها $v^{(i)}$ حيث $v_j^{(i)} = \sin(ij\pi/m)$

14. برهن أن مصفوفة A الطريقة ثلاثية الأقطار ذات الرتبة $(m-1)$ في $(m-1)$ المعطاة بالصيغة

$$a_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & j = i-1 \text{ أو } j = i+1 \\ 1 + 2\lambda, & j = i \\ 0, & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

حيث $\lambda > 0$، تكون موجبة التحديد وسائدة قطريًّا وذات قيم مميّزة

$\mu_i = 1 + 4\lambda\left(\sin\frac{i\pi}{2m}\right)^2$ لكل $i = 1, 2, \ldots, m-1$، وأن المتجهات القطرية المقابلة هي $v^{(i)}$ حيث $v_j^{(i)} = \sin(ij\pi/m)$.

15. عدّل الخوارزميتين (2.12) و (3.12) لتحتوي المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x), \quad 0 < x < l,\ 0 < t$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \le x \le l$$

16. استخدم نتائج التمرين (15) لتقرّب حل المعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x + x(1 - x)$$

بأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.01$. قارن إجابتك عند $t = 0.25$ بالحل الفعلي

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x(1 - x)$$

17. غيّر الخوارزميتين (2.12) و (3.12) لكي تستوعبا المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l,\ 0 < t$$

$$u(0, t) = \phi(t),\ u(l, t) = \Psi(t), \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \le x \le l$$

حيث $f(0) = \phi(0)$ و $f(l) = \Psi(0)$

18. إن الحرارة $u(x, t)$ في قضيب طويل دقيق ذي مقطع عرضي ثابت ومصنوع من مادة ذات توصيل حراري منتظم تتبع معادلة الحرارة أحادية البعد.

إذا ما تولدت الحرارة في المادة، على سبيل المثال عن طريق مقاومة تيار كهربائي أو تفاعل ذري تصبح معادلة الحرارة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Kr}{\rho C} = K \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t$$

حيث l الطول، ρ الكثافة، C الحرارة النوعية، وK ثابت الانتشار الحراري للقضيب. يمثّل الدّالة $r = r(x, t, u)$ الحرارة الناتجة لكل وحدة حجم. افترض أن

$$l = 1.5 \text{ cm}, \quad K = 1.04 \text{ cal/cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s}, \quad \rho = 10.6 \text{ g/cm}^3, \quad C = 0.056 \text{ cal/g} \cdot \text{deg}$$

و

$$r(x, t, u) = 5.0 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}$$

إذا أبقي طرفا القضيب عند $0°C$ فإن

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0$$

افترض توزيع الحرارة الابتدائي على الصيغة

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \le x \le l$$

استخدم نتائج التمرين (15) لتعطي تقريب توزيع الحرارة بأخذ $h = 0.15$ و $k = 0.0225$.

19. يحلّل ساقار وبين Sagar and Payne [SP] العلاقات بين الشدة والمقاومة وخصائص المادة

لأسطوانة معرّضة للحرارة والتبريد بالتناوب، وافرض المعادلة

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{4K}\frac{\partial T}{\partial t},\quad \frac{1}{2}<r<1,\ 0<T$$

حيث $T=T(r,t)$ هي درجة الحرارة، r المسافة نصف القطرية من مركز الأسطوانة، t الزمن و K معامل الانتشار.

أ. أوجد تقريبات القيمة $T(r,10)$ لأسطوانة نصف قطرها الخارجي 1، إذا أعطيت الشروط الابتدائية والحدودية:

$$T(1,t)=100+40t,\quad T\left(\tfrac{1}{2},t\right)=t,\quad 0\le t\le 10$$

$$T(r,0)=200(r-0.5),\quad 0.5\le r\le 1$$

استخدم تعديلاً لطريقة الفرق الإرجاعي بأخذ $K=0.1$، $k=0.5$، $h=\Delta r=0.1$.

ب. استخدم توزيع الحرارة في الفقرة (أ) لحساب الشدّ I عن طريق تقريب التكامل

$$I=\int_{0.5}^{1}\alpha T(r,t)r\,dr$$

حيث $\alpha=10.7$ و $t=10$.

استخدم طريقة شبه المنحرف بأخذ $n=5$.

3.12 المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية
Hyperbolic Partial Differ-ential Equations

نفترض في هذا الفصل الحل العددي لمعادلة الموجة (wave equation) التي هي مثال على المعادلة التفاضلية الجزئية الناقصية. تعطى معادلة الموجة بالمعادلة التفاضلية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0,\quad 0<x<l,\quad t>0 \tag{16.12}$$

تحت الشروط

$u(0,t)=u(l,t)=0$ لكل $t>0$,

$u(x,0)=f(x)$, و $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$ لكل $0\le x\le l$

حيث α ثابت.

اختر عددًا صحيحًا $m>0$ وقفزة زمنية حجمها $k>0$. بأخذ $h=l/m$، تعرف نقاط الشبكة (x_i,t_j) بما يلي:

$x_i=ih$ و $t_j=jk$

لكل $i=0,1,\ldots,m$ و $j=0,1,\ldots$.

إن معادلة الموجة عند أي نقطة داخل الشبكة (x_i,t_j) تصبح

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j)-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)=0. \tag{17.12}$$

يمكن الحصول على طريقة الفرق باستخدام مقسوم الفرق المركزي للمشتقات الجزئية الثانية المعطاة بالصيغة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

حيث $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$ و

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

حيث $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

تعويض هذه القيم في المعادلة (17.12) يعطي

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2}$$

$$= \frac{1}{12}\left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)\right]$$

إن إهمال حد الخطأ

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{12}\left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)\right]$$

يؤدي إلى معادلة الفرق

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

إذا كان $\lambda = \alpha k/h$ أمكننا كتابة معادلة الفرق بالصيغة

$$w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} - \lambda^2 w_{i+1,j} + 2\lambda^2 w_{i,j} - \lambda^2 w_{i-1,j} = 0$$

وبحل $w_{i,j+1}$ التقريب من الخطوة الزمنية الأكثر تقدمًا، نحصل على

$$w_{i\ j+1} = 2(1-\lambda^2) w_{i\ j} + \lambda^2 (w_{i+1\ j} + w_{i-1\ j}) - w_{i\ j-1} \qquad (18.12)$$

تتحقق هذه المعادلة لكل $i = 1, 2, \ldots, m-1$ و $j = 1, 2, \ldots$.

إن الشروط الحدودية تعطي

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0 \quad \text{لكل} \quad j = 1, 2, 3, \ldots \qquad (19.12)$$

ويتضمن الشرط الابتدائي

$$w_{i,0} = f(x_i) \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, m-1 \qquad (20.12)$$

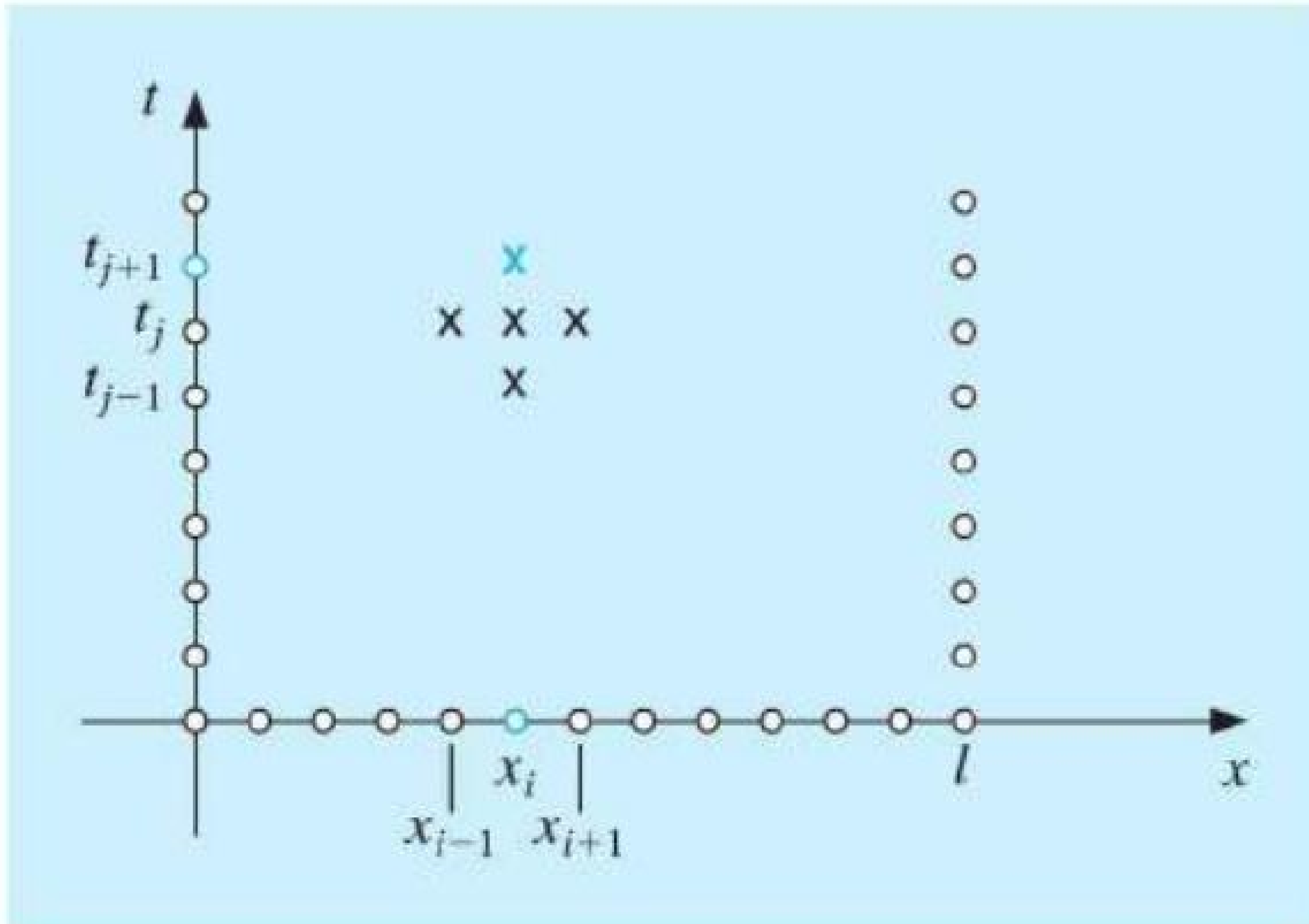
وبكتابة مجموعة المعادلات بصيغة المصفوفات نحصل على

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

(21.12)

إن المعادلتين (18.12) و (19.12) تتضمنان أن الخطوة الزمنية عدد $(j+1)$ تتطلب قيمًا من الخطوتين الزمنيتين عدد j وعدد $(j-1)$. (انظر شكل 10.12)

شكل 10.12



إن هذا ينتج مشكلة ابتداء بسيطة؛ لأن القيم من أجل $j = 0$ معطاة في المعادلة (20.12)، أما القيم من أجل $j = 1$ التي نحتاج إليها في المعادلة (18.12) لنحسب $w_{i,2}$ يجب الحصول عليها من شرط السرعة الابتدائي.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \le x \le l$$

إن إحدى الطرائق تكون بالتعويض عن $\partial u/\partial t$ بالتقريب من الفرق الأمامي

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \tag{22.12}$$

لبعض $\tilde{\mu}_i$ في $(0, t_1)$

حُلَّ المقدار $u(x_i, t_1)$ يعطي

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i)$$

$$= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i)$$

ونتيجة لذلك

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i) \quad \text{لكل} \quad i = 1, \ldots, m-1 \tag{23.12}$$

على كل حال، إن هذا يعطي تقريبًا ذا خطأ من الرتبة $O(k)$ فقط.

ومن الممكن إيجاد تقريب أفضل لـِ $u(x_i, 0)$.

افترض المعادلة

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \frac{k^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i)$$

لبعض $\tilde{\mu}_i$، في $u(x_i, t_1)$ التي تأتي من مد $u(x_i, t_1)$ $(0, t_1)$ بكثيرة حدود ماكلورين الثاني في t إذا كان f'' موجودًا فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) = \alpha^2\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) = \alpha^2 f''(x_i)$$

و
$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i)$$

منتجة التقريب ذا الخطأ $O(k^3)$

$$w_{i1} = w_{i0} + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i)$$

إذا كان $f \in C^4[0, 1]$ ولم يكن $f''(x_i)$ متاحًا، فيمكننا استخدام معادلة الفرق في المعادلة (9.4) لكتابة

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_i)$$

لبعض $\tilde{\xi}_i$ في (x_{i-1}, x_{i+1}).

إن هذا يتضمن

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2\alpha^2}{2h^2}[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})] + O(k^3 + h^2k^2)$$

بافتراض $\lambda = (k\alpha/h)$ يكون لدينا

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})] + O(k^3 + h^2k^2)$$
$$= (1 - \lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) + O(k^3 + h^2k^2)$$

وهكذا يمكن استخدام معادلة الفرق

$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) \qquad (24.12)$$

لإيجاد $w_{i,1}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, m - 1$.

تستخدم الخوارزمية (4.12) المعادلة (24.12) لتقريب $w_{i,1}$ على الرغم من أنه يمكن استخدام المعادلة (23.12) أيضًا. ومن المفترض وجود حد أعلى لقيمة t التي يجب استخدامها في طريقة التوقف، وأن $k = T/N$، حيث N معطاة أيضًا.

ALGORITHM

الخوارزمية 4.12

الفرق المنتهي في معادلة الموجة Wave Equation Finite - Difference

لإيجاد تقريب لحل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

تحت الشروط الحدودية

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T$$

والشروط الابتدائية

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad 0 \le x \le l$$

المدخلات: نقطة النهاية i، أقصى زمن T، ثابت α ، أعداد صحيحة $m \ge 2, N \ge 2$.

المخرجات: تقريبات $w_{i\,1}$ لـ $u(x_i, t_j)$ لكل $i = 0, \ldots, m$ و $j = 0, \ldots, N$.



الخطوة	المضمون
1	ضع $h = l/m$ $k = T/N$ $\lambda = k\alpha/h$
2	لكل $j = 1,\ldots, N$ ضع $w_{0,j} = 0$ $w_{m,j} = 0$
3	ضع $w_{0,0} = f(0)$ $w_{m,0} = f(l)$
4	لكل $i = 1,\ldots, m-1$ (الابتداء لِـ $t = 0$ و $t = k$) ضع $w_{i,0} = f(ih)$ $w_{i,1} = (1-\lambda^2)f(ih) + \frac{\lambda^2}{2}[f((i+1)h) + f((i-1)h)] + kg(ih)$
5	لكل $j = 1,\ldots, N-1$ (نفِّذ ضرب المصفوفات). لكل $i = 1,\ldots,m-1$ ضع $w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$
6	لكل $j = 0,\ldots, N$ ضع $t = jk$ لكل $i = 0,\ldots,m$ ضع $x = ih$ المخرجات $(x, t, w_{i,j})$
7	توقف. (لقد اكتملت العملية).

■

مثال 1 افترض المسألة الناقصية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t$$

تحت الشروط الحدودية

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \text{ لكل } 0 < t,$$

والشروط الابتدائية

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \le x \le 1 \text{ و } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

من السهل التحقق من أن حل هذه المسألة هو

$$u(x,t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$$

لقد استُخدمت خوارزمية الفرق المحدود (4.12) بأخذ $m = 10, T = 1$ و $N = 20$ الذي يتضمن أن $h = 0.1, k = 0.05$ و $\lambda = 1$. ويعطي جدول (6.12) نتائج التقريب $w_{i,N}$ لكل $i = 0, 1,\ldots, 10$ إن القيم الظاهرة في الجدول صحيحة بالنسبة إلى عدد الخانات المعطاة. ■

جدول 6.12

x_i	$w_{i,20}$
0.0	0.0000000000
0.1	0.3090169944
0.2	0.5877852523
0.3	0.8090169944
0.4	0.9510565163
0.5	1.0000000000
0.6	0.9510565163
0.7	0.8090169944
0.8	0.5877852523
0.9	0.3090169944
1.0	0.0000000000

إن نتائج المثال كانت صحيحة جدًّا، بل أكثر من ذلك فقد كانت صحيحة أكثر مما يوحي به خطأ القطع من الرتبة $O(k^2 + h^2)$. إن سبب هذا هو كون الحل الفعلي للمعادلة قابلاً للاشتقاق إلى ما لانهاية. عندما تكون الحال كذلك فإن استخدام سلسلة تايلور يعطي

$$\frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + 2\left[\frac{h^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_j) + \cdots\right]$$

و

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + 2\left[\frac{k^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i, t_j) + \cdots\right]$$

وبما أن $u(x, t)$ يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية فإن

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2}$$
$$= 2\left[\frac{1}{4!}\left(k^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j)\right) + \frac{1}{6!}\left(k^4\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_j)\right) + \cdots\right] \quad (25.12)$$

على كل حال، فاشتقاق معادلة الموجة يعطي

$$k^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) = k^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)\right] = \alpha^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j)\right]$$
$$= \alpha^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)\right] = \alpha^4 k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j)$$

ونرى أنه بسبب $\lambda^2 = (\alpha^2 k^2 / h^2) = 1,$ نحصل على

$$\frac{1}{4!}\left[k^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j)\right] = \frac{\alpha^2}{4!}[\alpha^2 k^2 - h^2]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) = 0$$

وباستمرار هذه الطريقة، فإن الحدود جميعها في الطرف الأيمن من المعادلة (25.12) هي أصفار ويتضمن ذلك أن خطأ القطع المحلي يساوي صفرًا.

إن الأخطاء الوحيدة في المثال (1) هي تلك الحاصلة في التقريب $w_{i\,1}$ والتدوير.

وكما الحال في طريقة الفرق الأمامي لمعادلة الحرارة، فإن لطريقة الفرق المحدود الصريح لمعادلة الموجة مشكلات في الاستقرار. وفي الحقيقة من الضروري أن تكون $\lambda = \alpha k/h \le 1$ لكي تكون هذه الطريقة مستقرة.

(انظر [IK,p.489]) إن الطريقة الصريحة المعطاة في الخوارزمية (4.12)، بأخذ $\lambda \le 1$ متقاربة بمعدل $O(h^2 + k^2)$ إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق على نحو كافٍ. وللتحقق من هذا؛ انظر [IK,p.491]. وعلى الرغم من أننا لا نبحث في هذه الطرائق، فهناك طرائق ضمنية مستقرة دون شروط. إن البحث في هذه الطرائق يمكن الحصول عليه في [mi] ، [Am,p199]، أو [Sm,B].

EXERCISE SET مجموعة التمارين 3.12

1. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x,0) = \sin \pi x, \quad 0 \le x \le 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

باستخدام خوارزمية الفرق المحدود (4.12) بأخذ $m = 4$، $N = 4$ و $T = 1.0$. قارن نتائجك عند $t = 1.0$ بالحل الفعلي $u(x,t) = \cos \pi t \sin \pi x$.

2. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{16\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 0.5, 0 < t$$
$$u(0,t) = u(0.5,t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 0.5$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin 4\pi x, \quad 0 \le x \le 0.5$$

باستخدام خوارزمية الفرق المحدود بأخذ $m = 4, N = 4$ و $T = 0.5$. قارن نتائجك عند $t = 0.5$ بالحل الفعلي $u(x,t) = \sin t \sin 4\pi x$.

3. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, 0 < t$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi$$

باستخدام خوارزمية الفرق المحدود بأخذ ($h = \pi/10$ و $k = 0.05$)، ($h = \pi/20$ و $k = 0.1$) وأخيرًا بأخذ ($h = \pi/20$ و $k = 0.05$). قارن نتائجك عند $t = 0.5$ بالحل الفعلي

$$u(x,t) = \cos t \sin x$$

4. كرّر التمرين (4) باستخدام التقريب

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i) \quad \text{لكل} \quad i = 1, \ldots, m-1$$

في الخطوة 4 من الخوارزمية (4.12).

5. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < t$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x,0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \le x \le 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\pi \sin 2\pi x, \quad 0 \le x \le 1$$

باستخدام الخوارزمية (4.12) بأخذ $h = 0.1$ ، $k = 0.1$ قارن نتائجك عند $t = 0.3$ بالحل الفعلي $u(x, t) = \sin 2\pi x(\cos 2\pi t + \sin 2\pi t)$.

6. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \; 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

باستخدام الخوارزمية (4.12)، وأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.1$.

7. يتحكم ضغط الهواء $p(x, t)$ في أنبوب آلة بمعادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \; 0 < t$$

حيث l طول الأنبوب و c ثابت فيزيائي. فإذا كان الأنبوب مفتوحًا فإن الشروط الحدودية تعطى بـِ

$$p(0, t) = p_0 \text{ و } p(l, t) = p_0$$

وإذا كان الأنبوب مغلقًا عند النهاية حيث $x = l$ تكون الشروط الحدودية

$$p(0, t) = p_0 \text{ و } \frac{\partial p}{\partial x}(l, t) = 0$$

افترض أن $c = 1, l = 1$ والشروط الابتدائية هي

$$p(x, 0) = p_0 \cos 2\pi x \text{ و } \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

أ. قرّب ضغط أنبوب مفتوح مع القيم $p_0 = 0.9$ عند $x = \frac{1}{2}$ و $t = 1$ باستخدام الخوارزمية (4.12) و $h = k = 0.1$.

ب. عدّل الخوارزمية (4.12) لمسألة الأنبوب المغلق، حيث $p_0 = 0.9$، وقرّب $p(0.5, 0.5)$ و $p(0.5, 1)$ مستخدمًا $h = k = 0.1$.

8. في خط انتقال الكهرباء ذي الطول l الذي يحمل تيارًا متناوبًا ذا تكرار عالٍ (يسمى خطًّا غير خاسر "lossless")، يوصف الجهد V والتيار بـ i

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \; 0 < t$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \; 0 < t$$

حيث L التوصيل لكل وحدة طول، C السعة لكل وحدة طول.

افترض أن الخط 200 ft والثابتين C و L معطيان بـ

$$C = 0.1 \text{ farads/ft و } L = 0.3 \text{ henries/ft}$$

وافترض أيضًا أن الجهد والتيار يحققان

$$V(0,t) = V(200,t) = 0, \quad 0 < t$$

$$V(x,0) = 110 \sin \frac{\pi x}{200}, \quad 0 \le x \le 200$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 200$$

$$i(0,t) = i(200,t) = 0, \quad 0 < t$$

$$i(x,0) = 5.5 \cos \frac{\pi x}{200}, \quad 0 \le x \le 200$$

و

$$\frac{\partial i}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 200$$

قرّب الجهد والتيار عند $t = 0.2$ و $t = 0.5$ باستخدام الخوارزمية (4.12) وأخذ $h = 10$ و $k = 0.1$.

4.12 مقدمة لطريقة العنصر المنتهي
An Introduction to the Finite - Element Method

إن طريقة العنصر المنتهي تشبه طريقة رايليه – ريتز (Rayleigh - Ritz) لتقريب حل القيمة الحدودية ذات النقطتين، التي تقدمت في الفصل (5.11).

لقد طُوّرت في الأصل لاستخدامها في الهندسة المدنية، ولكنها تستخدم الآن لتقريب حل المعادلات التفاضلية الجزئية التي تظهر في حقول الرياضيات جميعها.

إن إحدى مزايا طريقة العنصر المنتهي على طرائق الفرق المنتهي هي سهولة التعامل مع الشروط الحدودية للمسألة. والكثير من المسائل الفيزيائية تخضع لشروط حدودية فيها مشتقات وحدود أشكالها غير منتظمة.

بـدأت العناصر المنتهية في الخمسينيات من القرن العشرين بصناعة الطيران. وإن استخدام هذه التقنيات جاء وفقًا لبحث (TCMT) نشر في عام 1956 ولقد تطلب التطبيق الواسع لهذه الطرائق مصادر حاسوبية كبيرة لم تكن متاحة حتى أوائل السبعينيات من القرن العشرين.

يصعب التعامل مع الشروط الحدودية من هذا النوع باستخدام طرائق الفرق المحدود، لأن كل شرط حدودي متعامل مع المشتقة يتطلب إيجاد تقريب له بطريقة مقسوم الفرق على نقاط التقسيم والشكل غير المنتظم للحدود يجعل وضع نقاط التقسيم (في الشبكة) صعبًا.

إن طريقة العنصر المحدود تحتوي الشروط الحدودية بوصفها تكاملات في دوالّ يلزم إيجاد قيمها الصغرى، ومن ثم فإن عملية الإنشاء مستقلة عن الشروط الحدودية للمسألة.

نفترض في نقاشنا المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + r(x,y)u(x,y) = f(x,y) \qquad (26.12)$$

حيث $(x,y) \in \mathcal{D}$ حيث $\mathcal{D}$ هي المنطقة المستوية ذات الحدود $\mathcal{S}$.

نفترض شروط حدودية ذات الصيغة

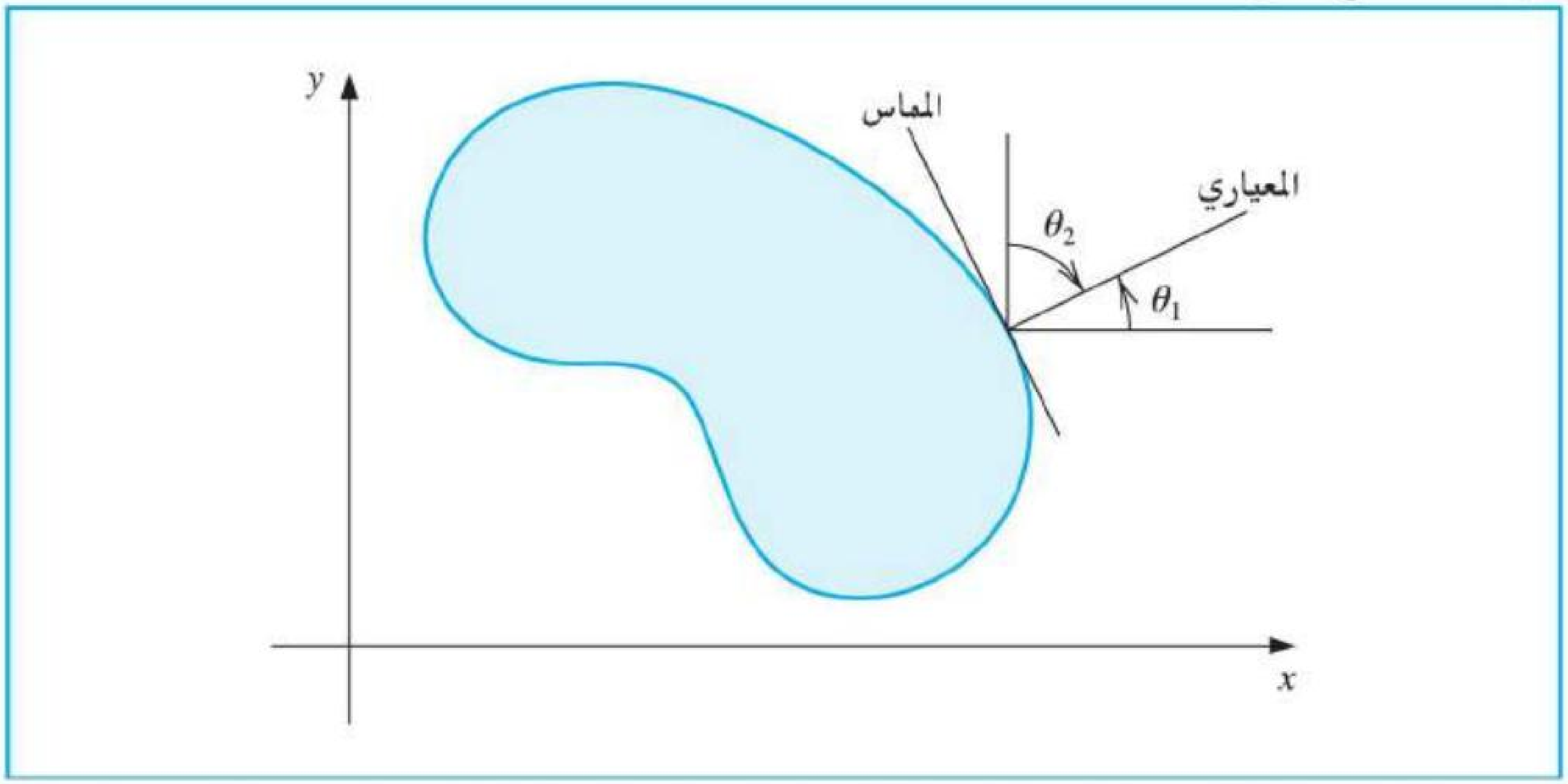
$$u(x,y) = g(x,y) \qquad (27.12)$$

على جزء $\mathcal{S}_1$ من الحدود، وعلى الجزء الباقي من الحدود $\mathcal{S}_2$ يكون من اللازم للحل $u(x,y)$ أن يحقق

$$p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cos\theta_1 + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cos\theta_2 + g_1(x,y)u(x,y) = g_2(x,y) \qquad (28.12)$$

حيث θ_1 و θ_2 زاويتان في اتجاه العمود الخارجي (Outward normal) على الحدود عند النقطة (x, y). (انظر شكل 11.12)

شكل 11.12



إن مسائل فيزيائية في حقول ميكانيكا الأجسام الصلبة والمرونة قد ارتبطت بمعادلات تفاضلية مماثلة للمعادلة (26.12). ويجعل الحل النمطي لمسألة من هذا النوع الصيغة الدّالية محتوية على تكاملات أصغر ما يمكن وعلى عائلة من الدّوال المحدّدة بهذه المسألة.

افترض أن p, q, r, f جميعها متصلة على $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$, p, q لها مشتقات جزئية ابتدائية متصلة، g متصلة على $\mathcal{S}_2$، وأن g_1 و g_2 متصلتان على $\mathcal{S}_2$. وبالإضافة إلى ذلك افترض أن

$$g_1(x, y) > 0 \text{ و } p(x, y) > 0, q(x, y) > 0, r(x, y) \le 0$$

إن حلَّ المعادلة (26.12) عندئذ يجعل العامل الدّالي الآتي أصغر ما يمكن.

$$I[w] = \iint_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2} \left[p(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + q(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - r(x, y) w^2 \right] + f(x, y) w \right\} dx\, dy$$

$$+ \int_{\mathcal{S}_2} \left\{ -g_2(x, y) w + \frac{1}{2} g_1(x, y) w^2 \right\} dS \qquad (29.12)$$

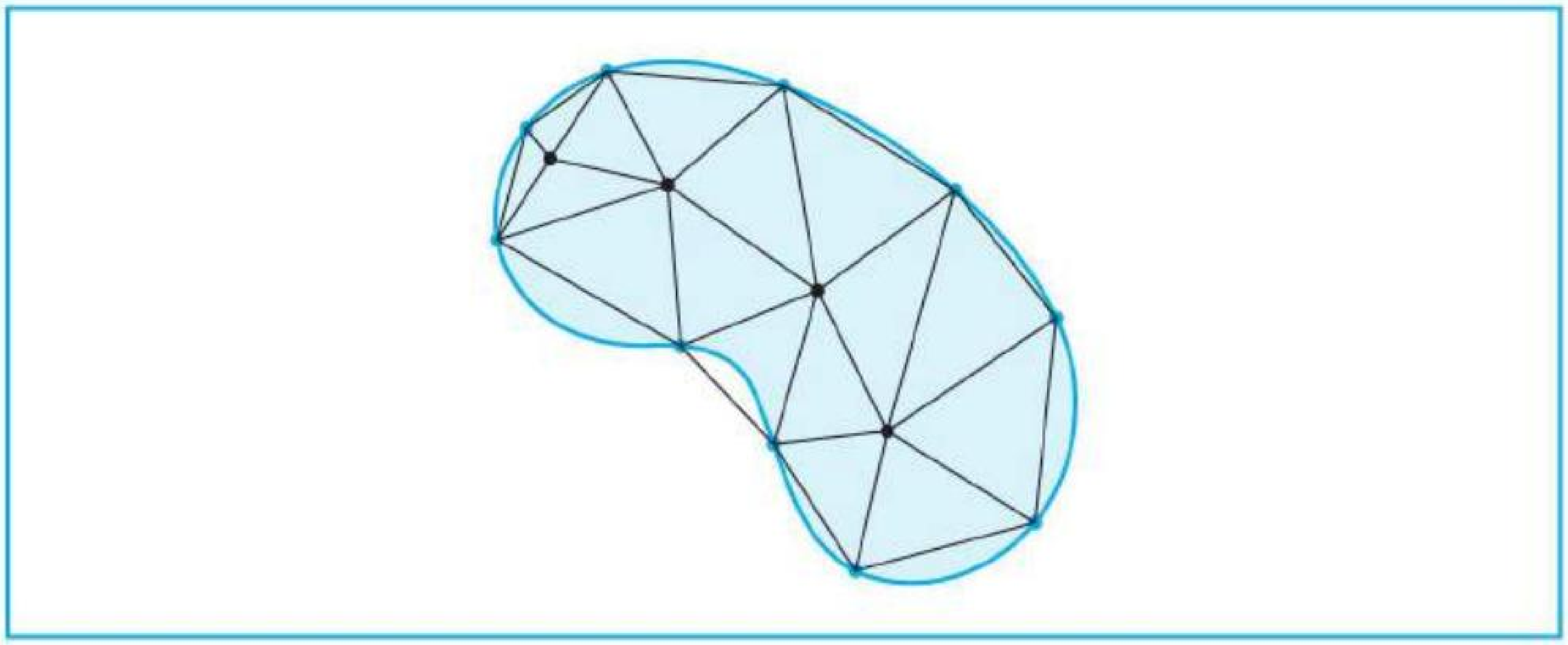
على الدّوال جميعها w القابلة للاشتقاق الثاني المتصل التي تحقق (27.12) على $\mathcal{S}_1$.

إن طريقة العنصر المحدود تقرّب الحل عن طريق إيجاد القيمة الصغرى للعامل الدّالي I على عائلة دوالّ أصغر، كما فعلت طريقة رايليه–ريتز Rayleigh–Ritz بالضبط لمسألة القيمة الحدودية التي افترضت في الفصل (5.11).

إن الخطوة الأولى هي تقسيم المنطقة إلى عدد محدود من الأجزاء أو العناصر ذات شكل منتظم إما إلى مستطيلات وإما إلى مثلثات. (انظر شكل 12.12)

وعمومًا تكون مجموعة الدّوال المستخدمة عبارة عن مجموعة كثيرات حدود في x و y منقطعة وذات درجة ثابتة، ويتطلب التقريب أن تُربط كثيرات الحدود معًا ربطًا يجعل الدّالة الناتجة متصلة ذات مشتقة أولى أو ثانية قابلة للتكامل أو متصلة على المنطقة كلها.

شكل 12.12



الدّوال من النوع الخطي في x و y

$$\phi(x, y) = a + bx + cy$$

شائعة الاستخدام بعناصر مثلثية، أما كثيرات الحدود من النوع الخطي الثنائي في x و y

$$\phi(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

فتُستخدم مع عناصر مستطيلة.

ولغرض المناقشة؛ افترض أن المنطقة $\mathcal{D}$ قسمت إلى عناصر مثلثية. نعبّر عن مجموعة المثلثات بالرمز $\mathcal{D}$، وتُسمى رؤوس المثلثات رؤوسًا (nodes).

تبحث الطريقة في إيجاد تقريب على الصيغة

$$\phi(x, y) = \sum_{i \ 1}^{m} \gamma_i \phi_i(x, y)$$

حيث $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ كثيرات حدود مستقلة خطيًّا وخطية على القطع، وتستخدم لتضمن $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_m$ أن الشرط الحدودي $\phi(x, y) = g(x, y)$ متحقق على $\mathcal{S}_1$، وتستخدم الثوابت الباقية $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ لكي تجعل العامل الدّالي $I[\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \phi_i]$ أصغر ما يمكن.

من المعادلة (29.12) يكون العامل الدّالي على الصيغة

$$\begin{aligned}
I[\phi] &= I\left[\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \phi_i\right] \\
&= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \left\{ p(x, y) \left[\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \right]^2 + q(x, y) \left[\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \right]^2 \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - r(x, y) \left[\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} + f(x, y) \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \phi_i(x, y) \right) dy\, dx \\
&\quad + \int_{\mathcal{S}_2} \left\{ -g_2(x, y) \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \phi_i(x, y) + \frac{1}{2} g_1(x, y) \left[\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} dS. \qquad (30.12)
\end{aligned}$$

ولكي يظهر الأصغر، مفترضين I بمنزلة دالّة لـ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ يكون من الضروري حصول

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_j} = 0 \quad \text{لكل} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

ويعطي اشتقاق المعادلة (30.12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial \gamma_j} = \iint_{\mathcal{D}} \Bigg\{ & p(x, y) \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) \\ & + q(x, y) \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \\ & - r(x, y) \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) + f(x, y) \phi_j(x, y) \Bigg\} dx\, dy \\ & + \int_{\mathcal{S}_2} \left\{ -g_2(x, y) \phi_j(x, y) + g_1(x, y) \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dS\end{aligned}$$

وبذلك فإن

$$\begin{aligned}0 = \sum_{i=1}^{m} \Bigg[\iint_{\mathcal{D}} \Bigg\{ & p(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \\ & - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \Bigg\} dx\, dy + \int_{\mathcal{S}_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y)\, dS \Bigg] \gamma_i \\ & + \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \phi_j(x, y)\, dx\, dy - \int_{\mathcal{S}_2} g_2(x, y) \phi_j(x, y)\, dS\end{aligned}$$

لكل $j = 1, 2, \ldots, n$. ويمكن كتابة مجموعة المعادلات هذه على شكل نظام خطي $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ حيث $\mathbf{c} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^t$، وحيث $A = (\alpha_{ij})$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^t$ تعرّف بـ

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} = \iint_{\mathcal{D}} \Bigg[& p(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \\ & - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \Bigg] dx\, dy + \int_{\mathcal{S}_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y)\, dS\end{aligned} \tag{31.12}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$، و

$$\beta_i = -\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \phi_i(x, y)\, dx\, dy + \int_{\mathcal{S}_2} g_2(x, y) \phi_i(x, y)\, dS - \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_{ik} \gamma_k \tag{32.12}$$

لكل $i = 1, \ldots, n$.

إن الاختيار الخاص لقاعدة الدّوال مهم؛ لأن الاختيار المناسب غالبًا ما يجعل المصفوفة A موجبة التحديد وطوقية.

بالنسبة إلى المسألة ذات الرتبة الثانية (26.12)؛ نفترض أن $\mathcal{D}$ مضلع بحيث $\mathcal{D} = D$، وأن $\mathcal{S}$ مجموعة من الخطوط المستقيمة المتجاورة.

لنبدأ العملية؛ نقسم المنطقة D إلى مجموعة من المثلثات $T_1, T_2, \ldots, T_M$، بحيث تكون رؤوس

المثلث الثلاثة قد عبّر عنها بالرموز

$V_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$ لكل $j = 1, 2, 3$.

ولكي نبسّط الرموز، نكتب $V_j^{(i)}$ بالصيغة $V_j = (x_j, y_j)$ عندما يكون عملنا مع المثلث الثابت T_i.

نربط مع كل رأس V_j كثيرة حدود خطية

$N_j^{(i)}(x, y) \equiv N_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y$ حيث $N_j^{(i)}(x_k, y_k) = \begin{cases} 1، & \text{إذا كان } j = k \\ 0، & \text{إذا كان } j \neq k \end{cases}$

إن هذا ينتج أنظمة خطية على الصيغة

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث يكون العنصر 1 في الصف ذي العدد j في المتجه على اليمين (هنا $j = 2$).

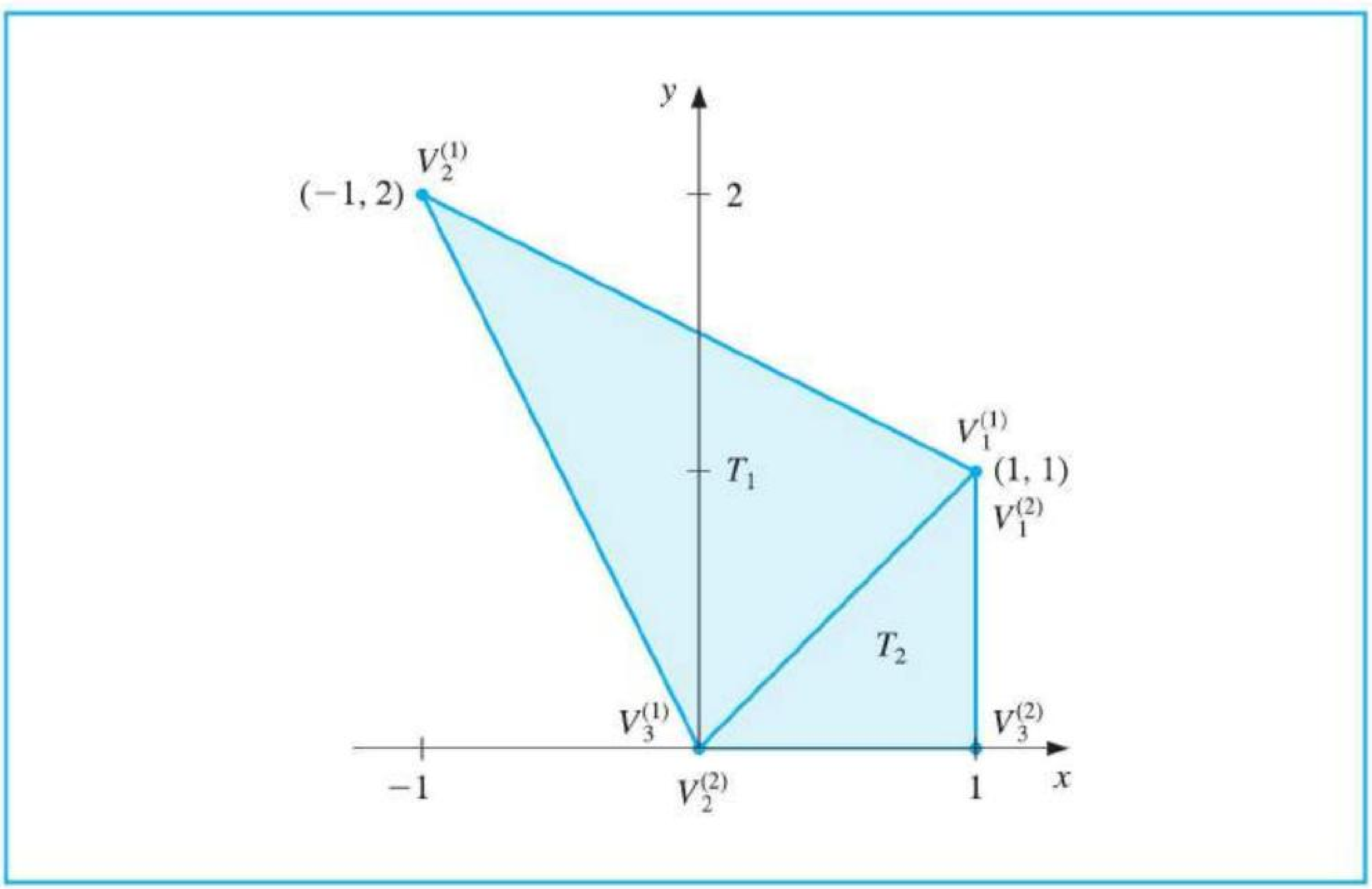
ليكن $E_1, \ldots, E_n$ عناوين للرؤوس في $D \cup S$.

من أجل كل رأس E_k، نربط دالةً ϕ_k بحيث يكون خطيًّا على كل مثلث، ويملك القيمة 1 عند E_k وصفرًا على كل من الرأسين الآخرين.

إن هذا الاختيار يجعل ϕ_k متطابقًا مع $N_j^{(i)}$ على المثلث T_i عندما يكون الرأس E_k الرأس المعبّر عنه بالرمز $V_j^{(i)}$.

مثال 1 افترض أن مسألة العنصر المحدود تحتوي على مثلثين T_1 و T_2 كما في شكل (13.12).

شكل 13.12



إن الدّالة الخطية $N_1^{(1)}(x, y)$ التي تأخذ القيمة 1 على النقطة (1,1) والقيمة صفرًا على النقطة (0,0) والنقطة (-1,2) تحقق

$$a_1^{(1)} + b_1^{(1)}(1) + c_1^{(1)}(1) = 1$$

$$a_1^{(1)} + b_1^{(1)}(-1) + c_1^{(1)}(2) = 0$$

و

$$a_1^{(1)} + b_1^{(1)}(0) + c_1^{(1)}(0) = 0$$

ولذلك يكون $a_1^{(1)} = 0, b_1^{(1)} = \frac{2}{3}, c_1^{(1)} = \frac{1}{3}$ و $N_1^{(1)}(x, y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$

وبطريقة مماثلة، فإن الدّالة الخطية $N_1^{(2)}(x, y)$ التي تأخذ القيمة 1 عند (1,1) والقيمة صفرًا عند كل من (0,0) و (1,0) تحقق

$$a_1^{(2)} + b_1^{(2)}(1) + c_1^{(2)}(1) = 1$$

$$a_1^{(2)} + b_1^{(2)}(0) + c_1^{(2)}(0) = 0$$

$$a_1^{(2)} + b_1^{(2)}(1) + c_1^{(2)}(0) = 0$$

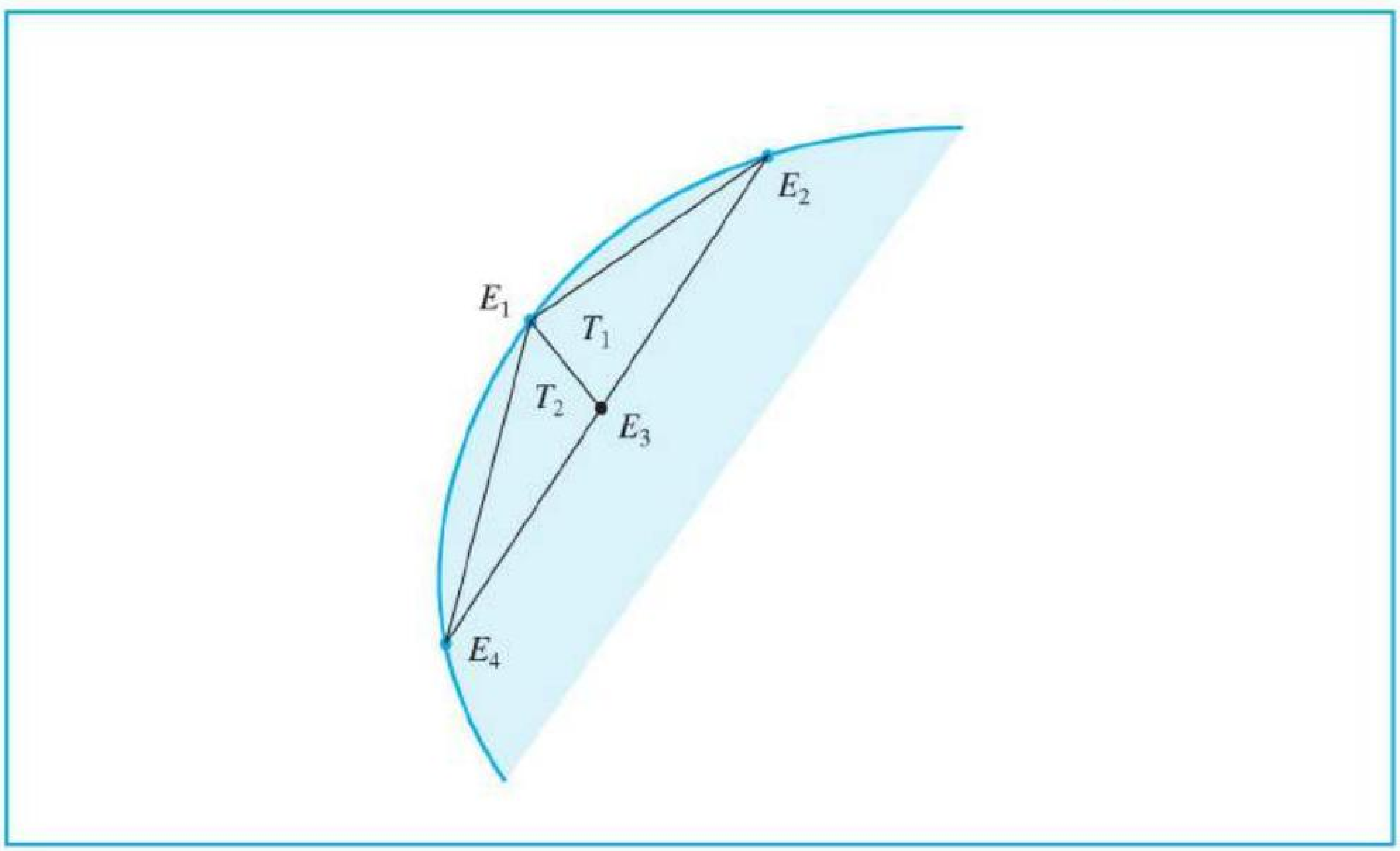
لذلك يكون $a_1^{(2)} = 0, b_1^{(2)} = 0, c_1^{(2)} = 1$

ونتيجة لذلك يكون $N_1^{(2)}(x, y) = y$.

لاحظ أنه عند الحد المشترك بين T_1 و T_2 يكون $N_1^{(1)}(x, y) = N_1^{(2)}(x, y)$ لأن $y = x$. ■

افترض أن الشكل (14.12) يمثّل الجزء الأعلى الأيسر للمنطقة المعطاة في شكل (12.12). سنولّد المدخلات في المصفوفة A التي تقابل النقاط المبيّنة في الشكل. وللتبسيط؛ نفترض أن E_1 ليست من أحد النقاط على S_2.

شكل 14.12



إن العلاقة بين النقاط ورؤوس المثلثات لهذه المنطقة هي

$$E_1 = V_3^{(1)} = V_1^{(2)},\ E_4 = V_2^{(2)},\ E_3 = V_2^{(1)} = V_3^{(2)},\ E_2 = V_1^{(1)}$$

بما أن ϕ_1 و ϕ_3 ليسا صفرين على T_1، T_2 فإن المدخلات $\alpha_{1,3} = \alpha_{3,1}$ ستحسب من

$$\begin{aligned}\alpha_{1,3} &= \iint_D \left[p\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x} + q\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_3}{\partial y} - r\phi_1\phi_3\right] dx\,dy \\ &= \iint_{T_1} \left[p\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x} + q\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_3}{\partial y} - r\phi_1\phi_3\right] dx\,dy \\ &\quad + \iint_{T_2} \left[p\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x} + q\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_3}{\partial y} - r\phi_1\phi_3\right] dx\,dy\end{aligned}$$

على المثلث T_1 يكون

$$\phi_1(x, y) = N_3^{(1)}(x, y) = a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y$$

$$\phi_3(x, y) = N_2^{(1)}(x, y) = a_2^{(1)} + b_2^{(1)}x + c_2^{(1)}y$$

ولذلك يكون لِـ (x, y) جميعها

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial y} = c_2^{(1)} \text{ و } \frac{\partial\phi_1}{\partial x} = b_3^{(1)},\quad \frac{\partial\phi_1}{\partial y} = c_3^{(1)},\quad \frac{\partial\phi_3}{\partial x} = b_2^{(1)}$$

وبالمثل يكون على T_2

$$\phi_1(x, y) = N_1^{(2)}(x, y) = a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y$$

$$\phi_3(x, y) = N_3^{(2)}(x, y) = a_3^{(2)} + b_3^{(2)}x + c_3^{(2)}y$$

لذلك يكون لِـ (x, y) جميعها

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial y} = c_3^{(2)} \text{ و } \frac{\partial\phi_1}{\partial x} = b_1^{(2)},\quad \frac{\partial\phi_1}{\partial y} = c_1^{(2)},\quad \frac{\partial\phi_3}{\partial x} = b_3^{(2)}$$

وهكذا فإن

$$\begin{aligned}\alpha_{1,3} &= b_3^{(1)}b_2^{(1)}\iint_{T_1} p\,dx\,dy + c_3^{(1)}c_2^{(1)}\iint_{T_1} q\,dx\,dy \\ &\quad - \iint_{T_1} r\left(a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y\right)\left(a_2^{(1)} + b_2^{(1)}x + c_2^{(1)}y\right) dx\,dy \\ &\quad + b_1^{(2)}b_3^{(2)}\iint_{T_2} p\,dx\,dy + c_1^{(2)}c_3^{(2)}\iint_{T_2} q\,dx\,dy \\ &\quad - \iint_{T_2} r\left(a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y\right)\left(a_3^{(2)} + b_3^{(2)}x + c_3^{(2)}y\right) dx\,dy\end{aligned}$$

إن التكاملات الثنائية جميعها على D تختزل إلى تكاملات ثنائية على مثلثات.

إن الطريقة العادية تتألف من حساب التكاملات الممكنة جميعها على المثلثات، ومن ثم تجميعهم تراكميًا α_{ij} في المدخلة A.

وبالمثل تُحسَب التكاملات الثنائية ذات الصيغة

$$\iint_D f(x, y)\phi_i(x, y)\,dx\,dy$$

على مثلثات، ثم يؤخذ تراكمها في المدخلة الصحيحة β_i التابعة للمتجه b.

على سبيل المثال، لتحديد قيمة β_i؛ نحتاج إلى

$$-\iint_D f(x, y)\phi_1(x, y)\,dx\,dy = -\iint_{T_1} f(x, y)\left[a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y\right]dx\,dy$$

$$-\iint_{T_2} f(x, y)\left[a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y\right]dx\,dy$$

بما أن E_1 رأس لكل من T_1، T_2 فإن β_1 هي الجزء الذي يساهم به ϕ_1 محدّدًا على T_1، والباقي ما يساهم به ϕ_1 محددًا على T_2. بالإضافة إلى ذلك فإن النقاط الواقعة على $\mathcal{S}_2$ تملك تكاملات خطية مضافة إلى مدخلاتها في A و b.

تنفذ الخوارزمية (5.12) طريقة العنصر المحدود على المعادلة التفاضلية الناقصية من الرتبة الثانية.

تضع الخوارزمية قيم المصفوفة A جميعها والمتجه b أصفارًا عند الابتداء، وبعد إجراء التكاملات جميعها على المثلثات جميعها، وتجمع الخوارزمية هذه القيم للمدخلات المناسبة في A و b.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.12

العنصر المنتهي fINITE - eLEMENT

لإيجاد تقريب لحلِّ المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + r(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

تحت الشروط الحدودية

$u(x, y) = g(x, y)$ لكل $(x, y) \in \mathcal{S}_1$ و $(x, y) \in \mathcal{S}_2$

$$p(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\cos\theta_1 + q(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\cos\theta_2 + g_1(x, y)u(x, y) = g_2(x, y)$$

حيث $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ هو حد D، θ_1 و θ_2 من الزوايا المتجهة للعمود على الحد.

الخطوة 0: قسّم المنطقة D إلى مثلثات $T_1, \ldots, T_M$.

بحيث $T_1, \ldots, T_K$ مثلثات ليس لها أضلاع على S_1 أو S_2.

(لاحظ $K = 0$ تعني أنه لا يوجد أي مثلثات داخل D.)

$T_{K+1}, \ldots, T_N$ مثلثات لها ضلع واحد على الأقل على $\mathcal{S}_2$.

$T_{N+1}, \ldots, T_M$ هي المثلثات المتبقية.

(لاحظ أن $M = N$ تعني أن المثلثات جميعها لها أضلاع على $\mathcal{S}_2$).

عبّر عن النقاط الثلاثة للمثلث T_i بالرموز

$$\left(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}\right), \left(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}\right) \text{ و } \left(x_3^{(i)}, y_3^{(i)}\right)$$

ضع عناوين للرؤوس $E_1, \ldots, E_m$ حيث $E_1, \ldots, E_n$ تقع في $D \cup \mathcal{S}_2$ و $E_{n+1}, \ldots, E_m$ تقع على $\mathcal{S}_1$.

(لاحظ أن $n = m$ تعني أن S_1 لا يوجد فيها رؤوس).

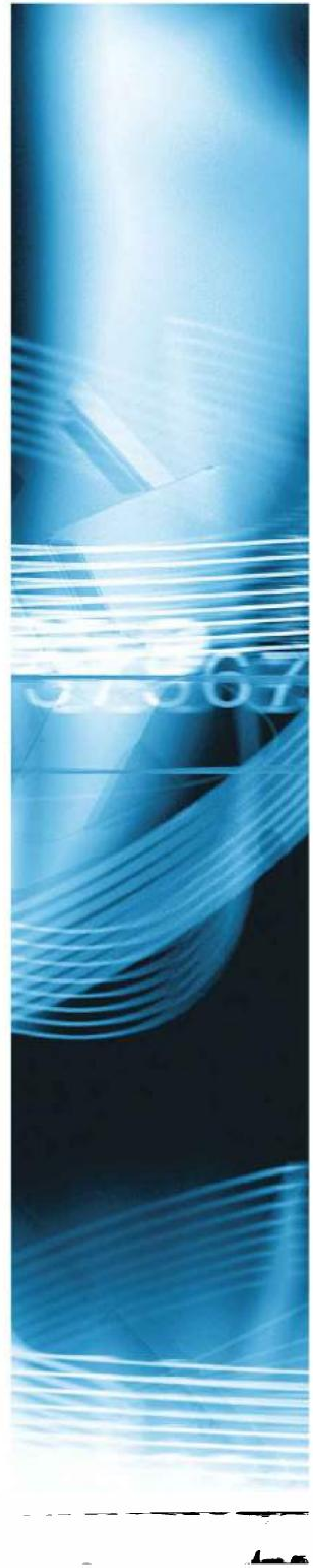
المدخلات: الأعداد الصحيحة K, N, M, n, m، النقاط $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}), (x_2^{(i)}, y_2^{(i)}), (x_3^{(i)}, y_3^{(i)})$ لكل $i = 1, \ldots, M$، النقاط E_j لكل $j = 1, \ldots, m$.

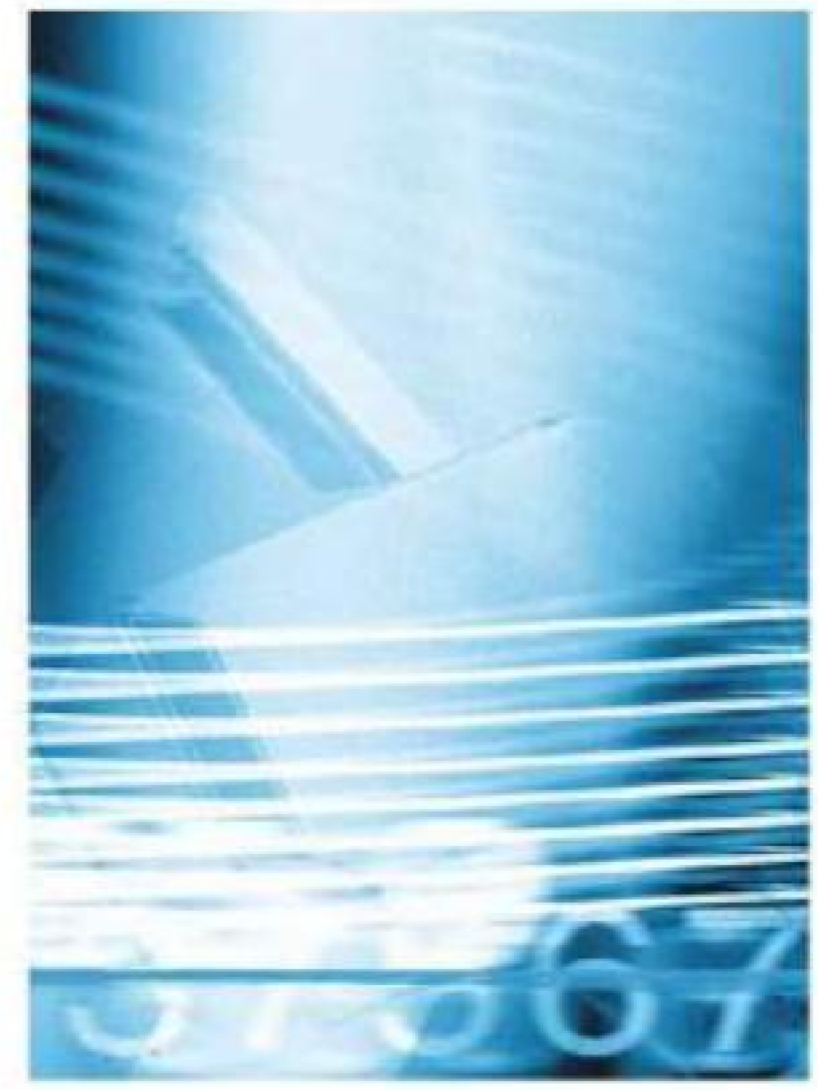
(لاحظ أن كل ما هو مطلوب هو إيجاد طريقة ربط رأس $(x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$ برأس $E_j = (x_j, y_j)$.)

المخرجات: ثوابت $\gamma_1, \ldots, \gamma_m; a_j^{(i)}, b_j^{(i)}, c_j^{(i)}$ لكل $j = 1, 2, 3$ و $i = 1, \ldots, M$

الخطوة	المضمون
1	لكل $l = n + 1, \ldots, m$ ضع $\gamma_l = g(x_l, y_l)$ (لاحظ أن $E_l = (x_l, y_l)$)
2	لكل $i = 1, \ldots, n$ ضع $\beta_i = 0$ لكل $j = 1, \ldots, n$ ضع $\alpha_{i,j} = 0$
3	لكل $i = 1, \ldots, M$ ضع $\Delta_i = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(i)} & y_1^{(i)} \\ 1 & x_2^{(i)} & y_2^{(i)} \\ 1 & x_3^{(i)} & y_3^{(i)} \end{vmatrix}$ $a_1^{(i)} = \frac{x_2^{(i)} y_3^{(i)} - y_2^{(i)} x_3^{(i)}}{\Delta_i};\quad b_1^{(i)} = \frac{y_2^{(i)} - y_3^{(i)}}{\Delta_i};\quad c_1^{(i)} = \frac{x_3^{(i)} - x_2^{(i)}}{\Delta_i}$ $a_2^{(i)} = \frac{x_3^{(i)} y_1^{(i)} - y_3^{(i)} x_1^{(i)}}{\Delta_i};\quad b_2^{(i)} = \frac{y_3^{(i)} - y_1^{(i)}}{\Delta_i};\quad c_2^{(i)} = \frac{x_1^{(i)} - x_3^{(i)}}{\Delta_i}$ $a_3^{(i)} = \frac{x_1^{(i)} y_2^{(i)} - y_1^{(i)} x_2^{(i)}}{\Delta_i};\quad b_3^{(i)} = \frac{y_1^{(i)} - y_2^{(i)}}{\Delta_i};\quad c_3^{(i)} = \frac{x_2^{(i)} - x_1^{(i)}}{\Delta_i}$ لكل $j = 1, 2, 3$، عرّف $N_j^{(i)}(x, y) = a_j^{(i)} + b_j^{(i)} x + c_j^{(i)} y$
4	لكل $i = 1, \ldots, M$ (يمكن إيجاد قيم التكاملات في الخطوتين 4 و 5 باستخدام التكامل العددي). لكل $j = 1, 2, 3$ لكل $k = 1, \ldots, j$ (احسب التكاملات الثنائية جميعها على المثلثات). ضع $z_{j,k}^{(i)} = b_j^{(i)} b_k^{(i)} \iint_{T_i} p(x, y)\, dx\, dy + c_j^{(i)} c_k^{(i)} \iint_{T_i} q(x, y)\, dx\, dy$ $- \iint_{T_i} r(x, y) N_j^{(i)}(x, y) N_k^{(i)}(x, y)\, dx\, dy$ ضع $H_j^{(i)} = - \iint_{T_i} f(x, y) N_j^{(i)}(x, y)\, dx\, dy$
5	لكل $i = K + 1, \ldots, N$ (احسب تكاملات الخط جميعها). لكل $j = 1, 2, 3$ لكل $k = 1, \ldots, j$ ضع $J_{j,k}^{(i)} = \int_{S_2} g_1(x, y) N_j^{(i)}(x, y) N_k^{(i)}(x, y)\, dS$ ضع $I_j^{(i)} = \int_{S_2} g_2(x, y) N_j^{(i)}(x, y)\, dS$

6	لكل $i = 1,\ldots, M$ نفذ الخطوات 7 - 12. (تجميع التكاملات على كل مثلث في النظام الخطي).
7	لكل $k = 1, 2, 3$ نفذ الخطوات 8 - 12.
8	أوجد l بحيث $E_l = \left(x_k^{(i)}, y_k^{(i)}\right)$
9	إذا كان $k > 1$، فعندئذ لكل $j = 1,\ldots, k-1$ نفَذ الخطوتين 10 و 11.
10	أوجد t بحيث $E_t = \left(x_j^{(i)}, y_j^{(i)}\right)$
11	إذا كان $l \le n$ ، فعندئذ $t \le n$ لذا ضع $\alpha_{lt} = \alpha_{lt} + z_{k,j}^{(i)}$ $\alpha_{tl} = \alpha_{tl} + z_{k,j}^{(i)}$ وإلا فضع $\beta_l = \beta_l - \gamma_t z_{k,j}^{(i)}$ وإلا إذا كان $t \le n$ فعندئذ ضع $\beta_t = \beta_t - \gamma_l z_{k,j}^{(i)}$
12	إذا كان $l \le n$ فضع $a_{ll} = \alpha_{ll} + z_{k,k}^{(i)}$ $\beta_l = \beta_l + H_k^{(i)}$
13	لكل $i = K + 1,\ldots, N$ نفَذ الخطوات 14 - 19. (تجميع التكاملات الخطية في النظام الخطي)
14	لكل $k = 1, 2, 3$ نفَذ الخطوات 15 - 19.
15	أوجد l بحيث $E_l = \left(x_k^{(i)}, y_k^{(i)}\right)$
16	إذا كان $k > 1$ فعندئذ ولكل $j = 1,\ldots, k-1$ نفَذ الخطوتين 17 و 18.
17	أوجد t بحيث $E_t = \left(x_j^{(i)}, y_j^{(i)}\right)$
18	إذا كان $l \le n$ فعندئذ، $t \le n$ لذا ضع $\alpha_{lt} = \alpha_{lt} + J_{k,j}^{(i)}$ $\alpha_{tl} = \alpha_{tl} + J_{k\,j}^{(i)}$ وما عدا ذلك فضع $\beta_l = \beta_l - \gamma_t J_{k,j}^{(i)}$ وما عدا ذلك إذا كان $t \le n$ فعندئذ ضع $\beta_t = \beta_t - \gamma_l J_{k,j}^{(i)}$
19	إذا كان $l \le n$ فعندئذ ضع $\alpha_{ll} = \alpha_{ll} + J_{k,k}^{(i)}$ $\beta_l = \beta_l + I_k^{(i)}$





20	حل النظام الخطي $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ حيث $A = (\alpha_{l,t})$, $\mathbf{b} = (\beta_l)$ و $\mathbf{c} = (\gamma_t)$ لـ $1 \le l \le n$ و $1 \le t \le n$ جميعًا.
21	المخرجات $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ (لكل $k = 1, \ldots, m$ ضع $\phi_k = N_j^{(i)}$ على T_i إذا كان $E_k = \left(x_j^{(i)}, y_j^{(i)}\right)$.) عندئذ $\phi(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \phi_k(x, y)$ يعطي تقريب الدّالة $u(x, y)$ على $D \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$
22	لكل $i = 1, \ldots, M$ ولكل $j = 1, 2, 3$، المخرجات $\left(a_j^{(i)}, b_j^{(i)}, c_j^{(i)}\right)$.
23	توقف. (تمت العملية).

مثال 2 درجة الحرارة، $u(x, y)$، في منطقة ثنائية الأبعاد D تحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{على } D$$

افترض المنطقة الظاهرة في شكل 15.12 بالشروط الحدودية المعطاة بـ

$$u(x, y) = 4 \quad \text{لكل } (x, y) \in L_6 \text{ و } (x, y) \in L_7$$

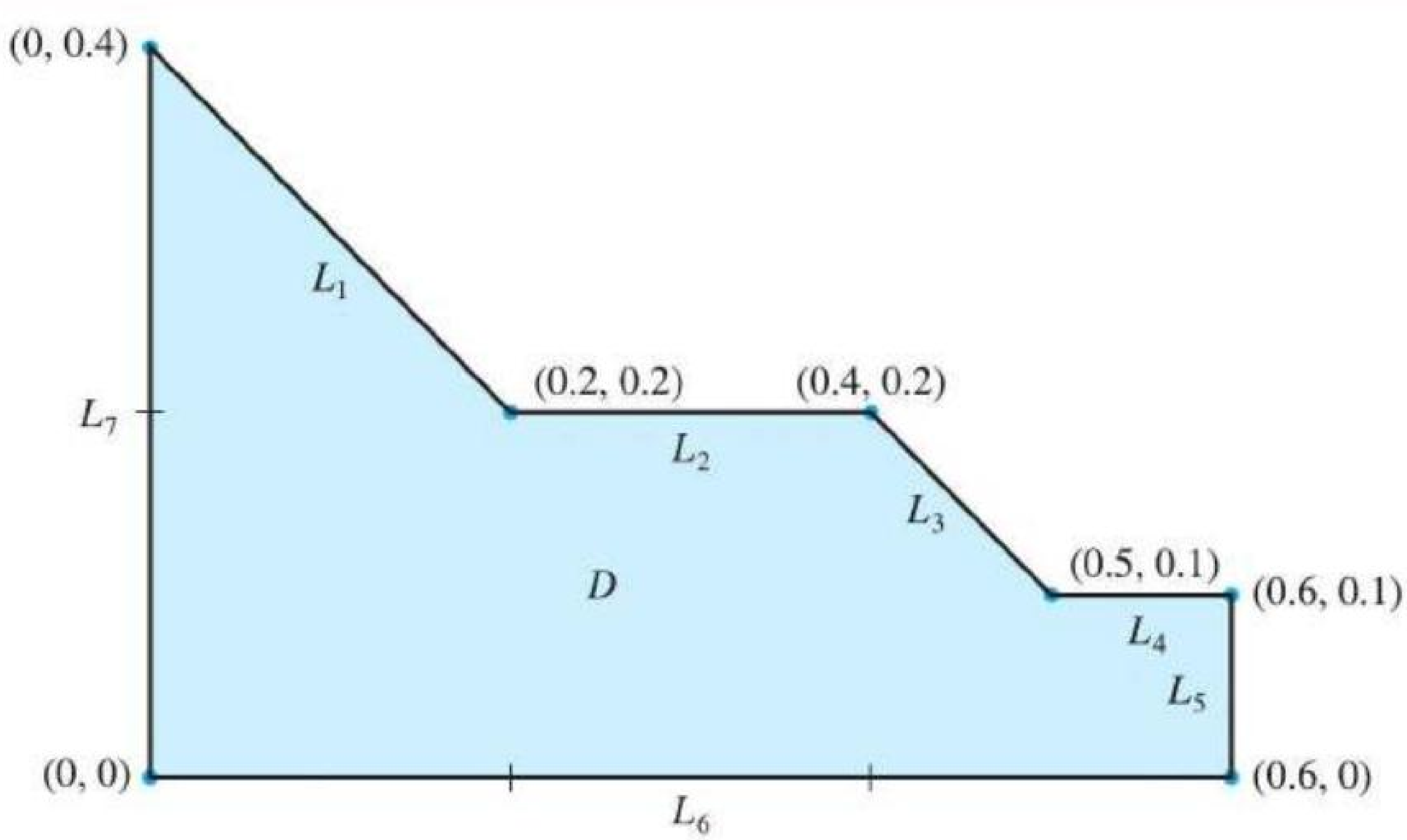
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = x \quad \text{لكل } (x, y) \in L_2 \text{ و } (x, y) \in L_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = y \quad \text{لكل } (x, y) \in L_5$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{2}} \quad \text{لكل } (x, y) \in L_1 \text{ و } (x, y) \in L_3$$

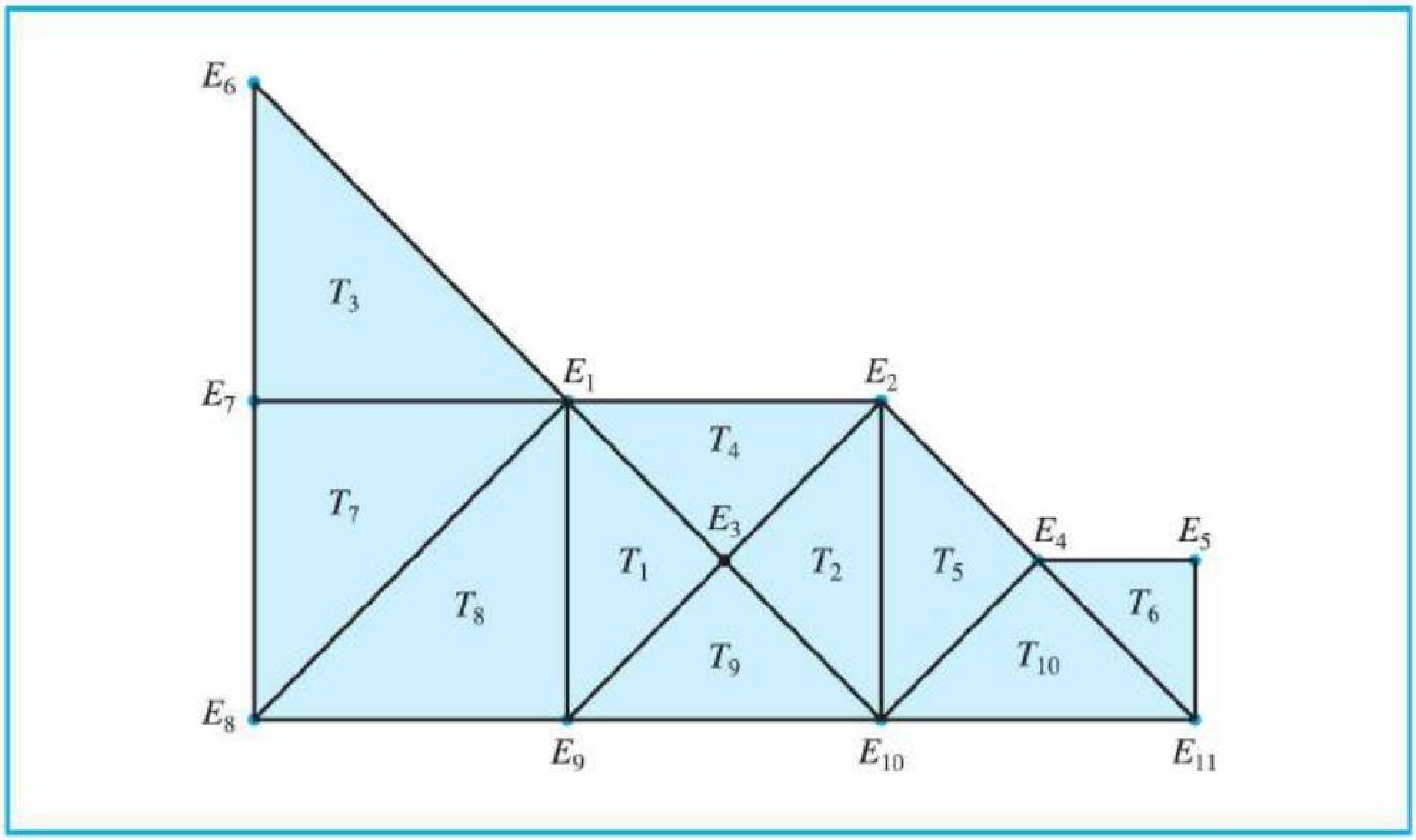
حيث تعبر $\partial u/\partial n$ عن المشتقة المتجهة في اتجاه العمود على المنطقة D في النقطة (x, y).

شكل 15.12



نبدأ أولاً بتقسيم D إلى مثلثات معنونة بالطريقة المقترحة في الخطوة 0 في الخوارزمية.
في هذا المثال $S_1 = L_6 \cup L_7$ و $S_2 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5$. وتظهر تسمية المثلثات في شكل (16.12).

شكل 16.12



الشرط الحدودي $u(x, y) = 4$ على L_6 و L_7 يتضمَّن أن $\gamma_t = 4$ عندما $t = 6, 7, \ldots, 11$.
لتحديد قيم γ_l من أجل $l = 1, 2, \ldots, 5$؛ طبِّق خطوات الخوارزمية المتبقية وولّد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

والمتجه

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 6.066\bar{6} \\ 0.063\bar{3} \\ 8.0000 \\ 6.056\bar{6} \\ 2.031\bar{6} \end{bmatrix}$$

ويكون حَلُّ المعادلة $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ هو

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0383 \\ 4.0782 \\ 4.0291 \\ 4.0496 \\ 4.0565 \end{bmatrix}$$

الذي يعطي التقريب الآتي لحل معادلة لابلاس والشروط الحدودية على المثلثات ذات العلاقة:

$$T_1: \quad \phi(x, y) = 4.0383(1 - 5x + 5y) + 4.0291(-2 + 10x) + 4(2 - 5x - 5y)$$

$$T_2: \quad \phi(x, y) = 4.0782(-2 + 5x + 5y) + 4.0291(4 - 10x) + 4(-1 + 5x - 5y)$$

$$T_3: \quad \phi(x, y) = 4(-1 + 5y) + 4(2 - 5x - 5y) + 4.0383(5x)$$

$$T_4: \quad \phi(x, y) = 4.0383(1 - 5x + 5y) + 4.0782(-2 + 5x + 5y) + 4.0291(2 - 10y)$$

$$T_5: \quad \phi(x, y) = 4.0782(2 - 5x + 5y) + 4.0496(-4 + 10x) + 4(3 - 5x - 5y)$$

$$T_6: \quad \phi(x, y) = 4.0496(6 - 10x) + 4.0565(-6 + 10x + 10y) + 4(1 - 10y)$$

$$T_7: \quad \phi(x, y) = 4(-5x + 5y) + 4.0383(5x) + 4(1 - 5y)$$

$$T_8: \quad \phi(x, y) = 4.0383(5y) + 4(1 - 5x) + 4(5x - 5y)$$

$$T_9: \quad \phi(x, y) = 4.0291(10y) + 4(2 - 5x - 5y) + 4(-1 + 5x - 5y)$$

$$T_{10}: \quad \phi(x, y) = 4.0496(10y) + 4(3 - 5x - 5y) + 4(-2 + 5x - 5y)$$

إن الحل الفعلي لمسألة القيمة الحدودية هو $u(x, y) = xy + 4$.

يبين جدول (7.12) مقارنة بين قيمة u وقيمة ϕ على E_i لكل $i = 1, \ldots, 5$. ■

جدول 7.12

x	y	$\phi(x, y)$	$u(x, y)$	$\lvert\phi(x, y) - u(x, y)\rvert$
0.2	0.2	4.0383	4.04	0.0017
0.4	0.2	4.0782	4.08	0.0018
0.3	0.1	4.0291	4.03	0.0009
0.5	0.1	4.0496	4.05	0.0004
0.6	0.1	4.0565	4.06	0.0035

ونمطيًّا يكون خطأ المسائل الناقصية من الرتبة الثانية من النوع (26.12) ذات دوالّ المعاملات الممهدة من الرتبة $O(h^2)$، بحيث h هو أكبر قطر للعناصر المثلثية. ومن المتوقع أيضًا أن دوالّ القاعدة التي تكون ثنائية خطية ومقتطعة على العناصر المستطيلة ستعطي نتائج $O(h^2)$، حيث h أطول طول قطر في العناصر المستطيلة. ويمكن استخدام عائلات أخرى من الدّوال بوصفها قواعد تعطي نتائج $O(h^4)$، ولكن الإنشاء أكثر تعقيدًا.

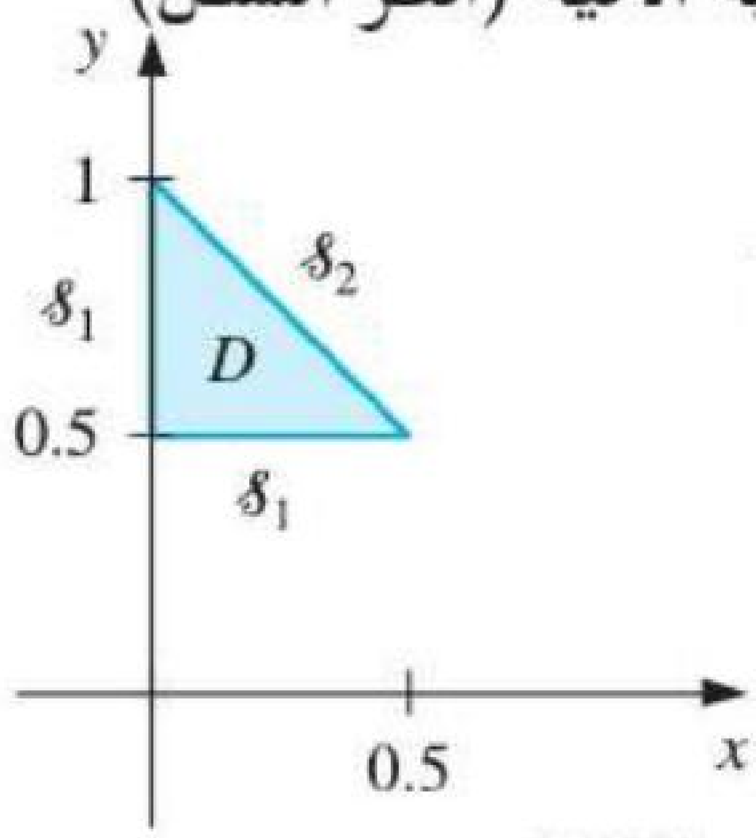
إن نظريات طرائق العنصر المحدود التي يمكن أن تعطي أخطاءً ذات كفاءة صعبةُ الصياغة والتطبيق؛ لأن دقة التقريب تعتمد على خواص اتصال الحل وانتظام الحدود.

ويمكن أيضًا تطبيق طريقة العنصر المحدود على المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة والناقصية، ولكن عملية إيجاد القيم الصغرى أكثر صعوبة.

إن أحد مصادر المسح الجيد حول مزايا طريقة العنصر المحدود وتقنياتها، المطبّقة على مسائل فيزيائية متعددة هو البحث [Fi]. وللحصول على مناقشة أشمل؛ يمكنك الرجوع إلى [SF] [ZM] أو [AB].

EXERCISE SET مجموعة التمارين 4.12

1. استخدم الخوارزمية (5.12) لتقريب حلّ المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية (انظر الشكل)



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right)-yu(x, y)=-x, \quad (x, y)\in D$$

$$u(x, 0.5)=2x, \quad 0\le x\le 0.5, \quad u(0, y)=0, \quad 0.5\le y\le 1$$

$$y^2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\cos\theta_1+y^2\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\cos\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \text{ لكل } (x, y)\in\mathcal{S}_2 ,$$

افترض $M = 2$، T_1 له النقاط $(0, 0.5), (0.25, 0.75), (0, 1)$، و T_2 له النقاط $(0, 0.5), (0.5, 0.5)$ $(0.25, 0.75)$.

2. كرّر التمرين (1)، باستخدام المثلثات الآتية بوصفها بديلاً:

T_1 : (0, 0.75), (0, 1), (0.25, 0.75)

T_2 : (0.25, 0.5), (0.25, 0.75), (0.5, 0.5)

T_3 : (0, 0.5), (0, 0.75), (0.25, 0.75)

T_4 : (0, 0.5), (0.25, 0.5), (0.25, 0.75)

3. أوجد تقريب حلّ المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)-12.5\pi^2u(x, y)=-25\pi^2\sin\frac{5\pi}{2}x\sin\frac{5\pi}{2}y, \quad 0<x, \; y<0.4$$

الخاضعة لشرط دريشليه الحدودي $u(x, y) = 0$

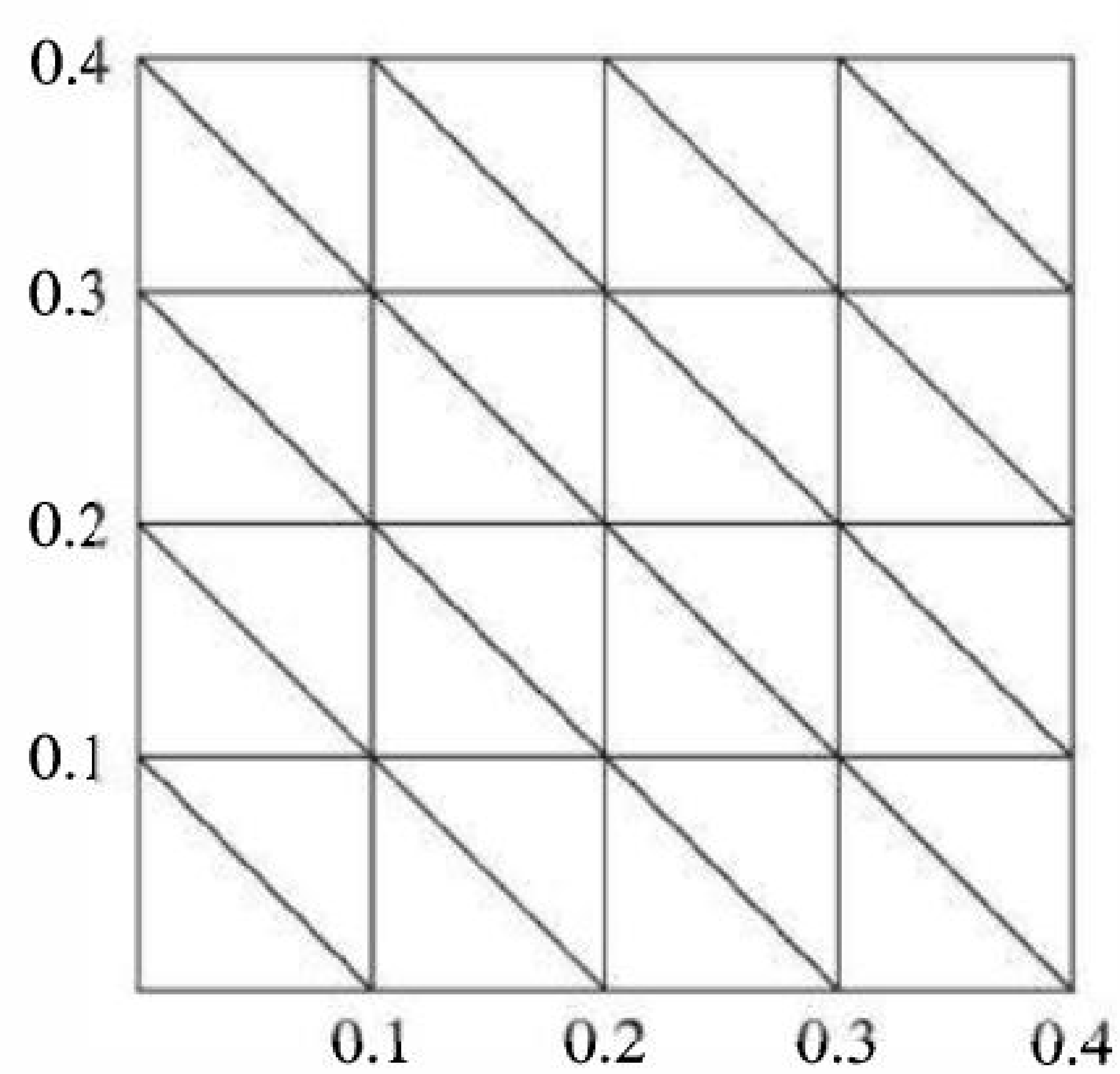
باستخدام خوارزمية العنصر المحدود (5.12)، والعناصر المعطاة في الشكل المرافق.

قارن الحل التقريبي بالحل الفعلي

$$u(x, y)=\sin\frac{5\pi}{2}x\sin\frac{5\pi}{2}y$$

على النقاط الداخلية وعلى النقاط

(0.125, 0.125), (0.125, 0.25), (0.25, 0.125), (0.25, 0.25)



4. كرّر التمرين (3) للدالّة

$$f(x, y) = -25\pi^2 \cos \frac{5\pi}{2} x \cos \frac{5\pi}{2} y$$

باستخدام شرط نيومان الحدودي

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0$$

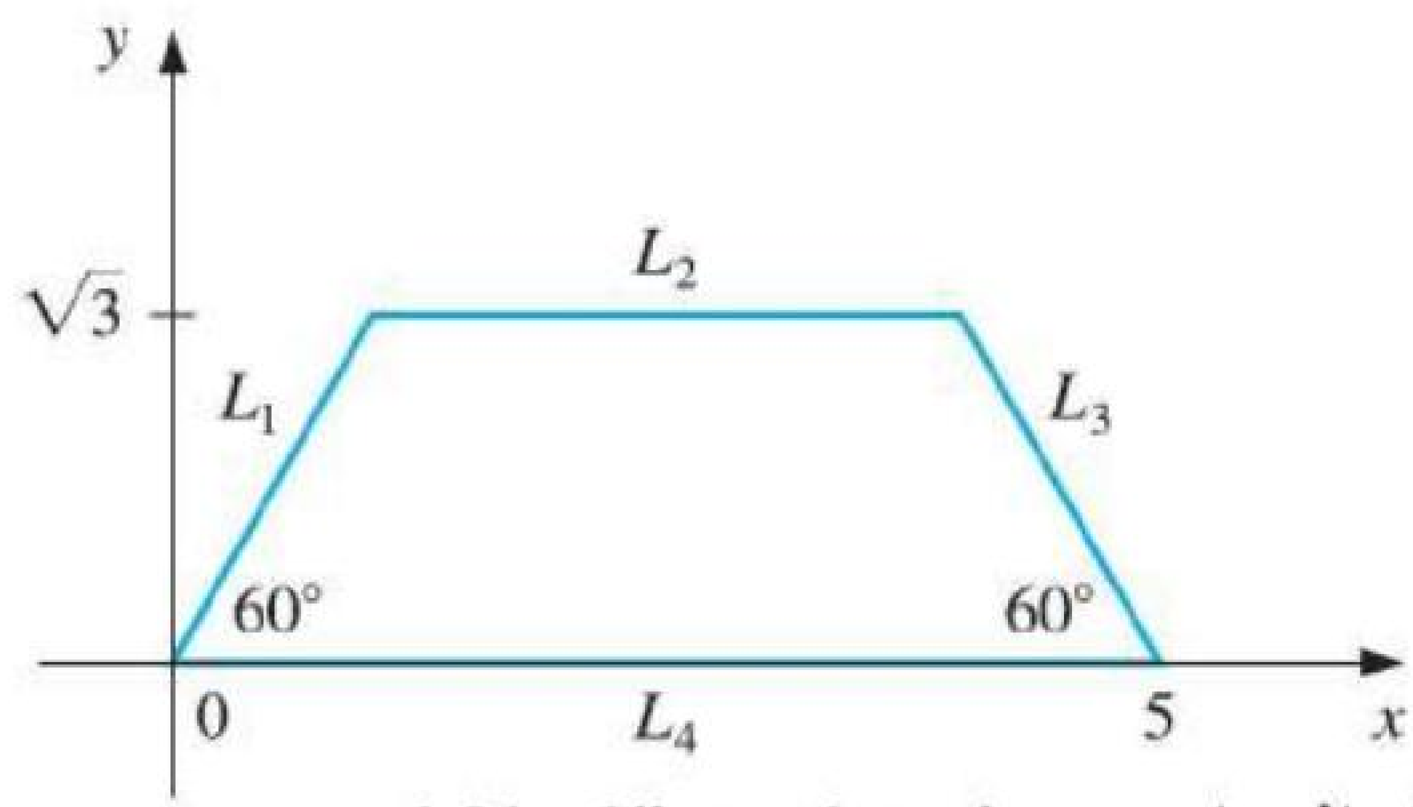
إن الحل الفعلي لهذه المسألة هو

$$u(x, y) = \cos \frac{5\pi}{2} x \cos \frac{5\pi}{2} y$$

5. صفيحة فضة على شكل شبه منحرف (انظر الشكل المرفق)، وقد تولّدت حرارة بانتظام على كل نقطة فيها بمعدل $q = 1.5 \text{ cal/(cm}^3 \cdot \text{s)}$.

إن الحرارة ذات الحالة المستقرة $u(x, y)$ على هذه الصفيحة تحقق معادلة بواسون

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-q}{k}$$



حيث k معامل التوصيل الحراري هو $1.04 \text{ cal/(cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s)}$

افترض أن الحرارة ثبتت عند 15°C على L_2، وأن خسارة الحرارة على الأضلاع المائلة L_1 و L_3 بحسب الشرط الحدودي $\partial u/\partial n = 4$، وأنه لا يوجد خسارة في الحرارة على L_4؛ أي أن $\partial u/\partial n = 0$.

أوجد التقريب لدرجة حرارة الصفيحة على النقاط $(1, 0), (4, 0)$ و $(\frac{5}{2}, \sqrt{3}/2)$ باستخدام الخوارزمية (5.12).

5.12 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Of Methods and Software

افترضنا في هذا الباب طرائق لتقريب حلول معادلات تفاضلية جزئية. لقد ركّزنا اهتمامنا على معادلة بواسون بوصفها مثالًا لمعادلة تفاضلية جزئية ناقصية، ومعادلة الحرارة أو الانتشار بوصفها مثالاً لمعادلة تفاضلية جزئية مكافئة، ومعادلة الموجة بوصفها مثالًا لمعادلة تفاضلية جزئية ناقصية. لقد نُوقِش تقريب هذه المسائل باستخدام الفرق المنتهي.

إن معادلة بواسون على مستطيل تطلبت حلّ نظام خطي كبير، وينصح لحله باستخدام تقنيات إعادة (تكرار) مثل طريقة SOR.

لقد عرضت أربع طرائق من نوع الفرق المحدود لحل معادلة الحرارة. إن طرائق الفرق الأمامي وطرائق ريتشاردسون فيها مشكلات الثبات، ولذلك قُدِّمت طريقة الفرق الإرجاعي وطرائق كرانك – نيكلسون. وعلى الرغم من وجوب حل نظام خطي ثلاثي الأقطار عند كل خطوة زمنية

في هذه الطرائق الضمنية، إلا أنها أكثر استقرارًا من الطرائق المباشرة مثل طريقة الفرق الأمامي وطريقة ريتشاردسون. إن طريقة الفرق المحدود لمعادلة الموجة مباشرة، وتعرض مشكلات في الاستقرار لاختيار بعض القيم المنفصلة للزمن والفضاء.

عرضنا في آخر فصل في الباب تقديمًا لطريقة العنصر المحدود لمعادلة تفاضلية جزئية ناقصية من نوع self -adjoint على مجال مضلع. وعلى الرغم من أن طرائقنا تكفي للمسائل والأمثلة في هذا الكتاب، إلا أن هناك حاجة إلى تعميمات وتطويرات أقوى من هذه التقنيات تلزم للأغراض التجارية. نفترض برمجيتين من مكتبة IMSL. تستخدم البرمجية MOLCH لحلّ المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

تحت الشروط الحدودية

$$\alpha(x,t)u(x,t) + \beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \gamma(x,t)$$

وإن الطريقة مبنية على تحديد مشترك لنقاط جاوس على إحداثي x لكل قيمة للزمن t، وتستخدم شرائح هرمايت التكعيبية بوصفها قاعدة دوال.

تستخدم البرمجية FPS2H لحل معادلة بواسون على مستطيل. وتُبنى طريقة الحل على اختيار فروق محدودة من الدرجة الثانية أو الرابعة على شبكة متجانسة.

يوجد في مكتبة NAG عدد من البرمجيات للمعادلات التفاضلية الجزئية. تستخدم البرمجية D03EAF لحل معادلة لابلاس على أي منطقة في المستوى xy.

تستخدم البرمجية D03EAF لحل معادلة تفاضلية ناقصية واحدة بطريقة الخطوط.

توجد حقائب متخصصة مثل NASTRAN مركبة من تعليمات لطريقة العنصر المحدود.

وهذه الحقائب مرغوبة وشائعة في التطبيقات الهندسية. وإن حقيبة FISHPACK في مكتبة نتلب تستخدم لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية القابلة للفصل.

يصعب كتابة التعليمات العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية؛ بسبب مسألة تحديد المجالات غير تلك الشائعة في الأشكال الهندسية. وإن البحث العلمي في حقل حلول المعادلات التفاضلية نشط جدًّا حاليًا.

ولقــد قدمنــا عينــة صغيرة مــن الطرائق المســتخدمة لتقريب حلــول المســائل التي تحتوي معــادلات تفاضليــة جزئية. وتحتوي المراجع على معلومات إضافيــة متعلقة بالموضوع العام هي Lapidus and Pinder [LP], Twizell [Tw] والكتاب الحديث لمؤلفيه Morton and Mayers [MM]
ويمكن الحصول على معلومات البرامج من Boisvert [RB] وBank [Ban].

ومن الكتب التي تركز على طرائق الفرق المحدود Strikwerda [Strik], Thomas [Th]، و Shashkov and Steinber [ShS]. إن Fix [SF] و Zienkiewicz and Mor- gan [ZM] مصادر جيدة للمعلومات حول طريقة العنصر المحدود. ولقد عُولجت المعادلات التي تعتمد على الزمن في Schiesser [Schi] و Gustafsson, Kreiss, and Oliger [GKO].

أما Birkhoff and Lynch [BL] و Roache [Ro] فقد عالجت حل المسائل الناقصية.

وإن طرائق التقسيم المتعدد تستخدم تقريبات التقسيم الخشن وطرائق الإعادة للحصول على تقسيمات أسهل. تحوي قائمة المراجع الخاصة بهذه الطرائق كتب Briggs [Brigg] و McCormick [Mc] و Bramble [Bram].

قائمة المراجع

Bibliography

إن عدد الصفحة المأخوذة من المرجع يظهر في نسخة الكتاب الأصلية عند آخر كل مرجع، أما عدد الصفحة في النسخة المترجمة فيظهر بعدها مباشرة بين قوسين ( ).

Text pages referring to the items are given in italics at the end of each reference.

[AHU] Aho, A. V., J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman, *The design and analysis of computer algorithms*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1974, 470 pp. QA76.6.A36 *542*

[Ai] Aitken, A. C. *On interpolation by iteration of proportional parts, without the use of differences.* Proc. Edinburgh Math. Soc. 3(2): 56–76 (1932) QA1.E23 *84*

[AG] Allgower, E. and K. Georg, *Numerical continuation methods: an introduction*, Springer-Verlag, New York, 1990, 388 pp. QA377.A56 *640*

[Am] Ames, W. F., *Numerical methods for partial differential equations* (Third edition), Academic Press, New York, 1992, 451 pp. QA374.A46 *718*

[An] Anderson, E. et al., *LAPACK user's guide* (Third edition), SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1999, 407 pp. QA76.73.F25 L36 *43*

[AS] Argyros, I. K. and F. Szidarovszky, *The theory and applications ofi teration methods*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993, 355 pp. QA297.8.A74 *640*

[AMR] Ascher, U. M., R. M. M. Mattheij, and R. B. Russell, *Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988, 595 pp. QA379.A83 *685*

[Ax] Axelsson, O., *Iterative solution methods*, Cambridge University Press, New York, 1994, 654 pp. QA297.8.A94 *480*

[AB] Axelsson, O. and V. A. Barker, *Finite element solution of boundary value problems: theory and computation*, Academic Press, Orlando, FL, 1984, 432 pp. QA379.A9 *733*

[Ba1] Bailey, N. T. J., *The mathematical approach to biology and medicine*, John Wiley & Sons, New York, 1967, 269 pp. QH324.B28 *290*

[Ba2] Bailey, N. T. J., *The mathematical theory of epidemics*, Hafner, New York, 1957, 194 pp. RA625.B3 *290*

[BSW] Bailey, P. B., L. F. Shampine, and P. E. Waltman, *Nonlinear two-point boundary-value problems*, Academic Press, New York, 1968, 171 pp. QA372.B27 *669, 685*

[Ban] Bank, R. E., *PLTMG, A software package for solving elliptic partial differential equations: Users' Guide 7.0*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1994, 128 pp. QA377.B26 *736*

[Barr] Barrett, R. et al., *Templates for the solution ofl inear systems: building blocks for iterative methods*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1994, 112 pp. QA297.8.T45 *480*

[Bart] Bartle, R. G., *The elements of real analysis* (Second edition), John Wiley & Sons, New York, 1976, 480 pp. QA300.B29 *102, 118*

[Bek] Bekker, M. G., *Introduction to terrain vehicle systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1969, 846 pp. TL243.B39 *74, 615*

[Ber] Bernadelli, H., *Population waves*, Journal of the Burma Research Society **31** (1941), 1–18, DS527.B85 *382*

[BD] Birkhoff, G. and C. De Boor, *Error bounds for spline interpolation*, Journal of Mathematics and Mechanics **13** (1964), 827–836, QA1.J975 *153*

[BL] Birkhoff, G. and R. E. Lynch, *Numerical solution of elliptic problems*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1984, 319 pp. QA377.B672 *736*

[BiR] Birkhoff, G. and G. Rota, *Ordinary differential equations* (Fourth edition), John Wiley & Sons, New York, 1989, 399 pp. QA372.B58 *252, 253, 314*

[BP] Botha, J. F. and G. F. Pinder, *Fundamental concepts in the numerical solution of differential equations*, Wiley-Interscience, New York, 1983, 202 pp. QA374.B74 *343*

[Brac] Bracewell, R., *The Fourier transform and its application* (Third edition), McGraw-Hill, New York, 2000, 616 pp. QA403.5.B7 *542*

[Bram] Bramble, J. H., *Multigrid methods*, John Wiley & Sons, New York, 1993, 161 pp. QA377.B73 *736*

[Bre] Brent, R., *Algorithms for minimization without derivatives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973, 195 pp. QA402.5.B74 *98, 99*

[Brigg] Briggs, W. L., *A multigrid tutorial*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1987, 88 pp. QA377.B75 *736*

[BH] Briggs, W. L. and V. E. Henson, *The DFT: an owner's manual for the discrete Fourier transform*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1995, 434 pp. QA403.5.B75 *545*

[Brigh] Brigham, E. O., *The fast Fourier transform*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974, 252 pp. QA403.B74 *534*

[Brow,K] Brown, K. M., *A quadratically convergent Newton-like method based upon Gaussian elimination*, SIAM Journal on Numerical Analysis **6**, No. 4 (1969), 560–569, QA297.A1S2 *622*

[Brow,W] Brown, W. S., *A simple but realistic model of floating point computation*, ACM transactions of Mathematical Software **7** (1981), 445–480, QA76.A8 *40, 42*

[Broy] Broyden, C. G., *A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations*, Mathematics of Computation **19** (1965), 577–593, QA1 M4144 *617*

[BS1] Bulirsch R. and J. Stoer, *Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods*, Numerische Mathematik **8** (1966), 1–13, QA241.N9 *313*

[BS2] Bulirsch, R. and J. Stoer, *Fehlerabschätzungen und extrapolation mit rationalen Funktionen bei Verfahren von Richardson-typus*, Numerische Mathematik **6** (1964), 413–427, QA241.N9 *313*

[BS3] Bulirsch, R. and J. Stoer, *Asymptotic upper and lower bounds for results of extrapolation methods*, Numerische Mathematik **8** (1966), 93–104, QA241.N9 *313*

[BuR] Bunch, J. R. and D. J. Rose (eds.), *Sparse matrix computations* (Proceedings of a conference held at Argonne National Laboratories, September 9–11, 1975), Academic Press, New York, 1976, 453 pp. QA188.S9 *414*

[BFR] Burden, R. L., J. D. Faires, and A. C. Reynolds, *Numerical Analysis* (Second edition), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, MA, 1981, 598 pp. QA297.B84 *92*

[Bur] Burrage, K., 1995, *Parallel and sequential methods for ordinary differential equations*, Oxford University Press, New York, 446 pp. QA372.B883 *343*

[But] Butcher, J. C., *The non-existence of ten-stage eighth-order explicit Runge-Kutta methods*, BIT 25 (1985), 521–542, QA76.N62 *279*

[CF] Chaitin-Chatelin, F. and Fraysse, V., *Lectures on finite precision computations*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1996, 235 pp. QA297.C417 *44*

[CGGG] Char, B. W., K. O. Geddes, W. M. Gentlemen, and G. H. Gonnet, *The design of Maple: A compact, portable, and powerful computer algebra system*, Computer Algebra. Lecture Notes in Computer Science No. 162, (J. A. Van Hulzen, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1983, 101–115 pp. QA155.7 E4 E85 *6, 44*

[CCR] Chiarella, C., W. Charlton, and A. W. Roberts, *Optimum chute profiles in gravity flow of granular materials: a discrete segment solution method*, Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry Series B 97 (1975), 10–13, TJ1.A712 *615*

[Ch] Cheney, E. W., *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill, New York, 1966, 259 pp. QA221.C47 *545*

[CC] Clenshaw, C. W. and C. W. Curtis, *A method for numerical integration on an automatic computer*, Numerische Mathematik 2 (1960), 197–205, QA241.N9 *247*

[CW] Cody, W. J. and W. Waite, *Software manual for the elementary functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980, 269 pp. QA331.C635 *44*

[CV] Coleman, T. F. and C. Van Loan, *Handbook for matrix computations*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1988, 264 pp. QA188.C65 *42, 416*

[CT] Cooley, J. W. and J. W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Mathematics of Computation 19, No. 90 (1965), 297–301, QA1.M4144 *534*

[CLRS] Cormen, T. H., C. E. Leiserson, R. I. Rivest, and C.Stein, *Introduction to Algorithms*, The MIT Press, Cambridge MA, 2001 QA76.6 .C662 2001 *35*

[Co] Cowell, W. (ed.), *Sources and development of mathematical software*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984, 404 pp. QA76.95.S68 *42*

[DaB] Dahlquist, G. and Å. Björck (Translated by N. Anderson), *Numerical methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974, 573 pp. QA297.D3313 *83*

[Da] Davis, P. J., *Interpolation and approximation*, Dover, New York, 1975, 393 pp. QA221.D33 *166, 545*

[DR] Davis, P. J. and P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration* (Second edition), Academic Press, New York, 1984, 612 pp. QA299.3.D28 *248*

[Deb1] De Boor, C., *On calculating with B-splines*, Journal of Approximation Theory, 6, (1972), 50–62, QA221.J63 *677*

[Deb2] De Boor, C., *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, New York, 1978, 392 pp. QA1.A647 vol. 27 *153, 165, 166*

[DebS] De Boor, C. and B. Swartz, *Collocation at Gaussian points*, SIAM Journal on Numerical Analysis 10, No. 4 (1973), 582–606, QA297.A1S2 *682*

[DM] Dennis, J. E., Jr. and J. J. Moré, *Quasi-Newton methods, motivation and theory* No. 1 (1977), 46–89, QA1.S2 *618, 619*

[DenS] Dennis, J. E., Jr. and R. B. Schnabel, *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983, 378 pp. QA402.5.D44 *640*

[Di] Dierckx, P., *Curve and surface fitting with splines*, Oxford University Press, New York, 1993, 285 pp. QA297.6.D54 *166*

[DBMS] Dongarra, J. J., J. R. Bunch, C. B. Moler, and G. W. Stewart, *LINPACK users guide*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1979, 367 pp. QA214.L56 *42*

[DRW] Dongarra, J. J., T. Rowan, and R. Wade, *Software distributions using Xnetlib*, ACM Transactions on Mathematical Software 21, No. 1 (1995), 79–88 QA76.6.A8 *43*

[DW] Dongarra, J. and D. W. Walker, *Software libraries for linear algebra computation on high performance computers*, SIAM Review 37, No. 2 (1995), 151–180 QA1.S2 *44*

[Do] Dormand, J. R., *Numerical methods for differential equations: a computational approach*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, 368 pp. QA372.D67 *343*

[DoB] Dorn, G. L. and A. B. Burdick, *On the recombinational structure of complementation relationships in the m-dy complex of the Drosophila melanogaster*, Genetics 47 (1962), 503–518, QH431.G43 *413*

[E] Engels, H., *Numerical quadrature and cubature*, Academic Press, New York, 1980, 441 pp. QA299.3.E5 *248*

[Fe] Fehlberg, E., *Klassische Runge-Kutta Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme*, Computing 6 (1970), 61–71, QA76.C777 *285*

[Fi] Fix, G., *A survey of numerical methods for selected problems in continuum mechanics*, Proceedings of a Conference on Numerical Methods of Ocean Circulation, National Academy of Sciences (1975), 268–283, Q11.N26 *733*

[FVFH] Foley, J., A. van Dam, S. Feiner, and J. Hughes, *Computer graphics: principles and practice*, (Second Edition), Addison-Wesley, Reading, MA, 1996, 1175 pp. T385 .C5735 *163*

[FM] Forsythe, G. E. and C. B. Moler, *Computer solution ofl inear algebraic systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967, 148 pp. QA297.F57 *416, 456*

[Fr] Francis, J. G. F., *The QR transformation*, Computer Journal 4 (1961–2), Part I, 265–271; Part II, 332–345, QA76.C57 *586*

[Fu] Fulks, W., *Advanced calculus* (Third edition), John Wiley & Sons, New York, 1978, 731 pp. QA303.F954 *9, 273*

[Gar] Garbow, B. S. et al., *Matrix eigensystem routines: EISPACK guide extension*, Springer-Verlag, New York, 1977, 343 pp. QA193.M38 *42*

[Gea1] Gear, C. W., *Numerical initial-value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971, 253 pp. QA372.G4 *322, 326, 336, 343*

[Gea2] Gear, C. W., *Numerical solution of ordinary differential equations: Is there anything left to do?*, SIAM Review 23, No. 1 (1981), 10–24, QA1.S2 *340*

[GL] George, A. and J. W. Liu, *Computer solution ofl arge sparse positive definite systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981, 324 pp. QA188.G46 *416*

[Ger] Geršgorin, S. A. *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*. Dokl. Akad. Nauk.(A), Otd. Fiz-Mat. Nauk. (1931), 749–754, QA1.A3493 *554*

[Goldb] Goldberg, D., *What every scientist should know about floating-point arithmetic*, ACM Computing Surveys 23, No. 1 (1991), 5–48, QA76.5.A1 *44*

[Golds] H.H. Goldstine, H. H. *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Centuries.* Springer-Verlag, 348 pp. QA297.G64 *xiv, 130, 221*

[GO] Golub, G. H. and Ortega, J. M., *Scientific computing: an introduction with parallel computing*, Academic Press, Boston, MA, 1993, 442 pp. QA76.58.G64 *44, 343*

[GV] Golub, G. H. and C. F. Van Loan, *Matrix computations* (Second edition), Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989, 642 pp. QA188.G65 *400, 416*

[Gr] Gragg, W. B., *On extrapolation algorithms for ordinary initial-value problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis 2 (1965), 384–403, QA297.A1S2 *308, 313*

[GKO] Gustafsson, B., H. Kreiss, and J. Oliger, *Time dependent problems and difference methods*, John Wiley & Sons, New York, 1995, 642 pp. QA374.G974 *736*

[Hac] Hackbusch, W., *Iterative solution ofl arge sparse systems of equations*, Springer-Verlag, New York, 1994, 429 pp. QA1.A647 vol. 95 *480*

[HY] Hageman, L. A. and D. M. Young, *Applied iterative methods*, Academic Press, New York, 1981, 386 pp. QA297.8.H34 *480*

[HNW1] Hairer, E., S. P. Nörsett, and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. Vol. 1: Nonstiff equations* (Second revised edition), Springer-Verlag, Berlin, 1993, 519 pp. QA372.H16 *343*

[HNW2] Hairer, E., S. P. Nörsett, and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. Vol. 2: Stiff and differential-algebraic problems* (Second revised edition), Springer, Berlin, 1996, 614 pp. QA372.H16 *343*

[Ham] Hamming, R. W., *Numerical methods for scientists and engineers* (Second edition), McGraw-Hill, New York, 1973, 721 pp. QA297.H28 *542*

[He1] Henrici, P., *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York, 1962, 407 pp. QA372.H48 *343*

[He2] Henrici, P., *Elements of numerical analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1964, 328 pp. QA297.H54 *86, 331*

[HS] Hestenes, M. R. and E. Steifel, *Conjugate gradient methods in optimization*, Journal of Research of the National Bureau of Standards 49, (1952), 409–436, Q1.N34 *464*

[Hild] Hildebrand, F. B., *Introduction to numerical analysis* (Second edition), McGraw-Hill, New York, 1974, 669 pp. QA297.H54 *119, 125, 127*

[Hill] Hill, F. S., Jr., *Computer graphics: using openGL* (Second edition), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001, 922 pp. T385.H549 *163*

[Ho] Householder, A. S., *The numerical treatment of a single nonlinear equation*, McGraw-Hill, New York, 1970, 216 pp. QA218.H68 *98, 99*

[IK] Issacson, E. and H. B. Keller, *Analysis of numerical methods*, John Wiley & Sons, New York, 1966, 541 pp. QA297.I8 *86, 191, 194, 329, 332, 435, 561, 562, 647, 666, 703, 706, 708, 718*

[JT] Jenkins, M. A. and J. F. Traub, *A three-stage algorithm for real polynomials using quadratic iteration*, SIAM Journal on Numerical Analysis 7, No. 4 (1970), 545–566, QA297.A1S2 *98*

[Joh] Johnston, R. L., *Numerical methods: a software approach*, John Wiley & Sons, New York, 1982, 276 pp. QA297.J64 *211*

[Joy] Joyce, D. C., *Survey of extrapolation processes in numerical analysis*, SIAM Review 13, No. 4 (1971), 435–490, QA1.S2 *179*

[Keller,H] Keller, H. B., *Numerical methods for two-point boundary-value problems*, Blaisdell, Waltham, MA, 1968, 184 pp. QA372.K42 *654, 660, 665, 685*

[Keller,J] Keller, J. B., *Probability of a shutout in racquetball*, SIAM Review 26, No. 2 (1984), 267–268, QA1.S2 *77*

[Kelley] Kelley, C. T., *Iterative methods for linear and nonlinear equations*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1995, 165 pp. QA297.8.K45 *476, 480*

[Ko] Köckler, N., *Numerical methods and scientific computing: using software libraries for problem solving*, Oxford University Press, New York, 1994, 328 pp. TA345.K653 *44*

[Lam] Lambert, J. D., *The initial value problem for ordinary differential equations. The state of art in numerical analysis* (D. Jacobs, ed.), Academic Press, New York, 1977, 451–501 pp. QA297.C646 *340*

[LP] Lapidus, L. and G. F. Pinder, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1982, 677 pp. Q172.L36 *736*

[Lar] Larson, H. J., *Introduction to probability theory and statistical inference* (Third edition), John Wiley & Sons, New York, 1982, 637 pp. QA273.L352 *484*

[Lau] Laufer, H. B., *Discrete mathematics and applied modern algebra*, PWS-Kent Publishing, Boston, MA, 1984, 538 pp. QA161.L38 *543*

[LH] Lawson, C. L. and Hanson, R. J., *Solving least squares problems*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1995, 337 pp. QA275.L38 *545*

[LR] Lucas, T. R. and G. W. Reddien, Jr., *Some collocation methods for nonlinear boundary value problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis 9, No. 2 (1972), 341–356, QA297.A1S2 *682*

[Lu] Luenberger, David G., *Linear and nonlinear programming* (Second edition), Addison-Wesley, Reading, MA, 1984, 245 pp. T57.7L8 *470*

[Mc] McCormick, S. F., *Multigrid methods*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1987, 282 pp. QA374.M84 *736*

[Mi] Mitchell, A. R., *Computation methods in partial differential equations*, John Wiley & Sons, New York, 1969, 255 pp. QA374.M68 *718*

[Mo] Moler, C. B., *Demonstration of a matrix laboratory. Lecture notes in Mathematics* (J. P. Hennart, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1982, 84–98 *44*

[MC] Moré J. J. and M. Y. Cosnard, *Numerical solution of nonlinear equations*, ACM Transactions on Mathematical Software 5, No. 1 (1979), 64–85, QA76.6.A8 *622*

[MM] Morton, K. W. and D. F. Mayers, *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*, Cambridge University Press, New York, 1994, 227 pp. QA377.M69 *736*

[Mu] Müller, D. E., *A method for solving algebraic equations using an automatic computer*, Mathematical Tables and Other Aids to Computation 10 (1956), 208–215, QA47.M29 *92*

[N] Neville, E.H. *Iterative Interpolation*, J. Indian Math Soc. 20 (1934), 87–120 *112*

[ND] Noble, B. and J. W. Daniel, *Applied linear algebra* (Third edition), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988, 521 pp. QA184.N6 *371, 384, 548*

[Or1] Ortega, J. M., *Introduction to parallel and vector solution ofl inear systems*, Plenum Press, New York, 1988, 305 pp. QA218.O78 *45*

[Or2] Ortega, J. M., *Numerical analysis; a second course*, Academic Press, New York, 1972, 201 pp. QA297.O78 *424, 433, 444, 448, 460, 555, 598, 601*

[OP] Ortega, J. M. and W. G. Poole, Jr., *An introduction to numerical methods for differential equations*, Pitman Publishing, Marshfield, MA, 1981, 329 pp. QA371.O65 *343*

[OR] Ortega, J. M. and W. C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970, 572 pp. QA297.8.O77 *598, 630, 632, 640*

[Os] Ostrowski, A. M., *Solution of equations and systems of equations* (Second edition), Academic Press, New York, 1966, 338 pp. QA3.P8 vol. 9 *99*

[Par] Parlett, B., *The symmetric eigenvalue problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980, 348 pp. QA188.P37 *595*

[Pat] Patterson, T. N. L., *The optimum addition of points to quadrature formulae*, Mathematics of Computation 22, No. 104 (1968), 847–856, QA1.M4144 *247*

[PF] Phillips, C. and T. L. Freeman, *Parallel numerical algorithms*, Prentice-Hall, New York, 1992, 315 pp. QA76.9.A43 F74 *44*

[Ph] Phillips, J., *The NAG Library: a beginner's guide*, Clarendon Press, Oxford, 1986, 245 pp. QA297.P35 *43*

[PDUK] Piessens, R., E. de Doncker-Kapenga, C. W. Überhuber, and D. K. Kahaner, *QUADPACK: a subroutine package for automatic integration*, Springer-Verlag, New York, 1983, 301 pp. QA299.3.Q36 *247*

[Pi] Pissanetzky, S., *Sparse matrix technology*, Academic Press, New York, 1984, 321 pp. QA188.P57 *416*

[Po] Powell, M. J. D., *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981 339 pp. QA221.P65 *133, 134, 166, 522, 545*

[Pr] Pryce, J. D., *Numerical solution of Sturm-Liouville problems*, Oxford University Press, New York, 1993, 322 pp. QA379.P79 *685*

[RR] Ralston, A. and P. Rabinowitz, *A first course in numerical analysis* (Second edition), McGraw-Hill, New York, 1978, 556 pp. QA297.R3 *208, 517, 522, 630*

[Ra] Rashevsky, N., *Looking at history through mathematics*, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA, 1968, 199 pp. D16.25.R3 *266*

[RB] Rice, J. R. and R. F. Boisvert, *Solving elliptic problems using ELLPACK*, Springer-Verlag, New York, 1985, 497 pp. QA377.R53 *736*

[RG] Richardson, L. F. and J. A. Gaunt, *The deferred approach to the limit*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 226A (1927), 299–361, Q41.L82 *179*

[Ro] Roache, P. J., *Elliptic marching methods and domain decomposition*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, 190 pp. QA377.R63 *736*

[RS] Roberts, S. and J. Shipman, *Two-point boundary value problems: shooting methods*, Elsevier, New York, 1972, 269 pp. QA372.R76 *685*

[RW] Rose, D. J. and R. A. Willoughby (eds.), *Sparse matrices and their applications* (Proceedings of a conference held at IBM Research, New York, September 9–10, 1971, 215 pp.), Plenum Press, New York, 1972, QA263.S94 *414*

[Ru] Russell, R. D., *A comparison of collocation and finite differences for two-point boundary value problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis 14, No. 1 (1977), 19–39, QA297.A1S2 *682*

[Sa1] Saad, Y., *Numerical methods for large eigenvalue problems*, Halsted Press, New York, 1992, 346 pp. QA188.S18 *595*

[Sa2] Saad, Y., *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS-Kent Publishing, Boston, MA, 1996, 447 pp. QA188.S17 *480*

[SaS] Saff, E. B. and A. D. Snider, *Fundamentals of complex analysis for mathematics, science, and engineering* (Second edition), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993, 468 pp. QA300.S18 *88*

[SP] Sagar, V. and D. J. Payne, *Incremental collapse of thick-walled circular cylinders under steady axial tension and torsion loads and cyclic transient heating*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 21, No. 1 (1975), 39–54, TA350.J68 *712*

[SD] Sale, P. F. and R. Dybdahl, *Determinants of community structure for coral-reef fishes in experimental habitat*, Ecology 56 (1975), 1343–1355, QH540.E3

[Sche] Schendel, U., *Introduction to numerical methods for parallel computers*, (Translated by B.W. Conolly), Halsted Press, New York, 1984, 151 pp. QA297.S3813 *44*

[Schi] Schiesser, W. E., *Computational mathematics in engineering and applied science: ODE's, DAE's, and PDE's*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994, 587 pp. TA347.D45 S34 *736*

[Scho] Schoenberg, I. J., *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quarterly of Applied Mathematics 4, (1946), Part A, 45–99; Part B, 112–141, QA1.A26 *166*

[Schr1] Schroeder, L. A., *Energy budget of the larvae of the moth Pachysphinx modesta*, Oikos 24 (1973), 278–281, QH540.O35 *493*

[Schr2] Schroeder, L. A., *Thermal tolerances and acclimation of two species of hydras*, Limnology and Oceanography 26, No. 4 (1981), 690–696, GC1.L5 *616*

[Schul] Schultz, M. H., *Spline analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973, 156 pp. QA211.S33 *152, 166, 669, 676, 682*

[Schum] Schumaker, L. L., *Spline functions: basic theory*, Wiley-Interscience, New York, 1981, 553 pp. QA224.S33 *166*

[Schw] Schwartzman, Steven, *The words of mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994, 261 pp. QA5 .S375

[Se] Searle, S. R., *Matrix algebra for the biological sciences*, John Wiley & Sons, New York, 1966, 296 pp. QH324.S439 *382*

[SH] Secrist, D. A. and R. W. Hornbeck, *An analysis of heat transfer and fade in disk brakes*, Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry Series B 98 No. 2 (1976), 385–390, TJ1.A712 *205*

[Sh] Shampine, L. F., *Numerical solution of ordinary differential equations*, Chapman & Hall, New York, 1994, 484 pp. QA372.S417 *343*

[SGe] Shampine, L. F. and C. W. Gear, *A user's view of solving stiff ordinary differential equations*, SIAM Review 21, No. 1 (1979), 1–17, QA1.S2 *340*

[ShS] Shashkov, M. and S. Steinberg, *Conservative finite-difference methods on general grids*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, 359 pp. QA431.S484 *736*

[Si] Singh, V. P., *Investigations of attentuation and internal friction of rocks by ultrasonics*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences (1976), 69–72, TA706.I45 *493*

[SJ] Sloan, I. H. and S. Joe, *Lattice methods for multiple integration*, Oxford University Press, New York, 1994, 239 pp. QA311.S56 *248*

[Sm,B] Smith, B. T. et al., *Matrix eigensystem routines: EISPACK guide* (Second edition), Springer-Verlag, New York, 1976, 551 pp. QA193.M37 *42*

[Sm,G] Smith, G. D., *Numerical solution of partial differential equations*, Oxford University Press, New York, 1965, 179 pp. QA377.S59 *718*

[So] Sorenson, Danny C., *Parallel numerical algorithms* (David E. Keyes, Ahmed Sameh, and V. Vankatakrishan, eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997, 119 pp. QA76.9.A43 P35 *595*

[Stee] Steele, J. Michael, *The Cauchy-Schwarz Master Class*. Cambridge University Press, 2004, 306 pp. QA295 .S78 2004 *420*

[Stet] Stetter, H. J., *Analysis of discretization methods for ordinary differential equations. From tracts in natural philosophy*, Springer-Verlag, New York, 1973, 388 pp. QA372.S84 *313*

[Stew1] Stewart, G. W., *Afternotes on numerical analysis*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1996, 200 pp. QA297.S785 *402, 416*

[Stew2] Stewart, G. W., *Introduction to matrix computations*, Academic Press, New York, 1973, 441 pp. QA188.S7 *595*

[SF] Strang, W. G. and G. J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973, 306 pp. TA335.S77 *682, 733, 736*

[Stri] Strikwerda, J. C., *Finite difference schemes and partial differential equations*, Brooks/Cole Publishing, Pacific Grove, CA, 1989, 386 pp. QA374.S88 *736*

[Stro] Stroud, A. H., *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971, 431 pp. QA311.S85 *248*

[StS] Stroud, A. H. and D. Secrest, *Gaussian quadrature formulas*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966, 374 pp. QA299.4.G4 S7 *224, 248*

[Sz] Szüsz, P., *Math bite*, Mathematics Magazine **68**, No. 2, 1995, 97, QA1.N28 *428*

[Th] Thomas, J. W., *Numerical partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1995, 445 pp. QA377.T495 *736*

[TCMT] Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, *Stiffness and deflection of complex structures*, Journal of the Aeronautical Sciences, 23, (1956), 805–824, TL501 .I522 *721*

[Tr] Traub, J. F., *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964, 310 pp. QA297.T7 *99*

[Tw] Twizell, E. H., *Computational methods for partial differential equations*, Ellis Horwood Ltd., Chichester, West Sussex, England, 1984, 276 pp. QA377.T95 *736*

[Van] Van Loan, C. F., *Computational frameworks for the fast Fourier transform*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1992, 273 pp. QA403.5.V35 *545*

[Var1] Varga, R. S., *Matrix iterative analysis* (Second edition), Springer, New York, 2000, 358 pp. QA263.V3 *480, 692, 696, 697*

[Var2] Varga, R. S., *Geršgorin and his circles*, Springer, New York, 2004, 226 pp. *554*

[Ve] Verner, J. H., *Explicit Runge–Kutta methods with estimates of the local trucation error*, SIAM Journal on Numerical Analysis 15, No. 4 (1978), 772–790, QA297.A1S2 *289*

[We] Wendroff, B., *Theoretical numerical analysis*, Academic Press, New York, 1966, 239 pp. QA297.W43 *403*

[Wil1] Wilkinson, J. H., *Rounding errors in algebraic processes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963, 161 pp. QA76.5.W53 *461*

[Wil2] Wilkinson, J. H., *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965, 662 pp. QA218.W5 *461, 568, 575, 591, 595*

[WR] Wilkinson, J. H. and C. Reinsch (eds.), *Handbook for automatic computation. Vol. 2: Linear algebra*, Springer-Verlag, New York, 1971, 439 pp. QA251.W67 *42, 586, 591, 595*

[Win] Winograd, S., *On computing the discrete Fourier transform*, Mathematics of Computation 32 (1978), 175–199, QA1.M4144 *543*

[Y] Young, D. M., *Iterative solution ofl arge linear systems*, Academic Press, New York, 1971, 570 pp. QA195.Y68 *444, 480*

[YG] Young, D. M. and R. T. Gregory, *A survey of numerical mathematics. Vol. 1*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972, 533 pp. QA297.Y63 *98*

[ZM] Zienkiewicz, O. C. and K. Morgan, *Finite elements and approximation*, John Wiley & Sons, New York, 1983, 328 pp. QA297.5.Z53 *733, 736*

إجابات تمارين مختارة

Answers For Selected Exercises

مجموعة التمارين 1.1 (صفحة 14)

1. لكل فقرة، $f \in C[a, b]$ على الفترة المعطاة. وبما أن $f(a)$ و $f(b)$ بإشارة مختلفة، فإن نظرية القيمة الوسيطية تؤدي إلى وجود عدد c مع $f(c) = 0$.

3.لكل فقرة $f \in C[a, b]$، f' موجود على (a, b) و $f(a) = f(b) = 0$. إن نظرية رول Rolle تؤدي إلى وجود عدد c في (a, b) مع $f'(c) = 0$. أما الفقرة **(d)**، يمكننا استخدام $[a, b] = [-1, 0]$ أو $[a, b] = [0, 2]$.

5. عند $k < 0$، $x < 0, f(x) < 2x + k < 0$، على أن $x < -\frac{1}{2}k$. وبالمثل، عند $k > 0$ $x > 0, f(x) > 2x + k > 0$ على أن $x > -\frac{1}{2}k$.
ومن خلال النظرية (13.1) يوجد عدد c مع $f(c) = 0$. إذا كان $f(c) = 0$ و $f(c') = 0$ عند $c' \neq c$ فإنه من خلال النظرية (7.1) يوجد العدد p ما بين c و c' مع $f'(p) = 0$. على أي حال، $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ لقيم x جميعها.

7. أ. $P_2(x) = 0$ ب. $R_2(0.5) = 0.125$ الخطأ الحقيقي $= 0.125$

ج. $P_2(x) = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2$ د. $R_2(0.5) = -0.125$ الخطأ الحقيقي $= -0.125$

9. بما أن $R_2(x) = \dfrac{-2e^{\xi}(\sin\xi + \cos\xi)}{6}x^3$ و $P_2(x) = 1 + x$.
لعددٍ ما ξ بين x و 0، يكون لدينا الآتي:

أ. $P_2(0.5) = 1.5$ و $|f(0.5) - P_2(0.5)| \le 0.0932$ ب. $|f(x) - P_2(x)| \le 1.252$

ج. $\int_0^1 f(x)\,dx \approx 1.5$ د. $\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 P_2(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |R_2(x)|\,dx \le 0.313$
والخطأ الحقيقي $= 0.122$.

11. $P_3(x) = (x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3$

أ . $P_3(0.5) = 0.312500, f(0.5) = 0.346574$، حد الخطأ هو $0.291\overline{6}$ والخطأ الحقيقي هو 0.034074

ب. $|f(x) - P_3(x)| \le 0.291\overline{6}$ on $[0.5, 1.5]$.

ج. $\int_{0.5}^{1.5} P_3(x)\,dx = 0.08\overline{3}, \int_{0.5}^{1.5}(x-1)\ln x\,dx = 0.088020$

د. حد الخطأ هو $0.058\overline{3}$ والخطأ الحقيقي هو 4.687×10^{-3}

13. $P_4(x) = x + x^3$

أ. $|f(x) - P_4(x)| \le 0.012405$ ب. $\int_0^{0.4} P_4(x)\,dx = 0.0864, \int_0^{0.4} xe^{x^2}\,dx = 0.086755$ ج. 8.27×10^{-4}

د . $P_4'(0.2) = 1.12, f'(0.2) = 1.124076$ الخطأ الحقيقي هو 4.076×10^{-3}

15. بما أن $42^\circ = 7\pi/30$ **radians**، فاستخدم $x_0 = \pi/4$. وبذلك فإن

$$\left|R_n\left(\frac{7\pi}{30}\right)\right| \le \frac{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{30}\right)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{(0.053)^{n+1}}{(n+1)!}$$

وعند $|R_n(7\pi/30)| < 10^{-6}$، يكون كافيًا أخذ 3 $= n$. وعند 7 مراتب $\cos 42^\circ = 0.7431448$
و $P_3(42^\circ) = P_3(7\pi/30) = 0.7431446$، وبذلك فإن الخطأ الحقيقي هو 2×10^{-7}.

17. أ. $P_3(x) = \ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{10}{81}(x-1)^3$ ب. $\max_{0\le x\le 1}|f(x) - P_3(x)| = |f(0) - P_3(0)| = 0.02663366$

ج. $\tilde{P}_3(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}x^2$ د. $\max_{0\le x\le 1}|f(x) - \tilde{P}_3(x)| = |f(1) - \tilde{P}_3(1)| = 0.09453489$

هـ. $P_3(0)$ يقرب $f(0)$ تقريبًا أفضل من تقريب $\tilde{P}_3(1)$ إلى $f(1)$

19. $P_n(x) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!}x^k,\ n \ge 7$

21. إن حد أعظم خطأ هو 0.0026.

23. بما أن $R_2(1) = \frac{1}{6}e^{\xi}$ عند قيمة معينة ξ في $(0, 1)$، يكون لدينا $|E - R_2(1)| = \frac{1}{6}|1 - e^{\xi}| \le \frac{1}{6}(e - 1)$

25. أ. ليكن x_0 أي عدد في $[a, b]$. ومع $\varepsilon > 0$ معطاة، دع $\delta = \varepsilon/L$. إذا كان $|x - x_0| < \delta$ و $a \le x \le b$ فإن

$$|f(x) - f(x_0)| \le L|x - x_0| < \varepsilon$$

ب. إن استخدام نظرية القيمة الوسيطية يعطينا

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1|$$

لقيمة ما ξ بين x_1 و x_2، ولذلك فإن

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le L|x_2 - x_1|$$

ج. مثال على ذلك هو $f(x) = x^{1/3}$ على $[0,1]$.

27. أ. بما أن f متصل عند p وأن $f(p) \neq 0$، يوجد $\delta > 0$ مع

$$|f(x) - f(p)| < \frac{|f(p)|}{2}$$

عند $|x - p| < \delta$ و $a < x < b$. نقيد δ بحيث تكون $[p - \delta, p + \delta]$ مجموعة جزئية من $[a, b]$.

ولذلك مع $x \in [p - \delta, p + \delta]$، يكون لدينا $x \in [a, b]$. لذلك فإن

$$-\frac{|f(p)|}{2} < f(x) - f(p) < \frac{|f(p)|}{2} \quad \text{و} \quad f(p) - \frac{|f(p)|}{2} < f(x) < f(p) + \frac{|f(p)|}{2}$$

إذا كانت $f(p) > 0$ فإن $f(p) - \frac{|f(p)|}{2} = \frac{f(p)}{2} > 0$ وعليه $f(x) > f(p) - \frac{|f(p)|}{2} > 0$

إذا كانت $f(p) < 0$، فإن $|f(p)| = -f(p)$ و $f(x) < f(p) + \frac{|f(p)|}{2} = f(p) - \frac{f(p)}{2} = \frac{f(p)}{2} < 0$

في أي من الحالات، $f(x) \neq 0$ عند $x \in [p - \delta, p + \delta]$.

ب. بما أن f متصل عند p و $f(p) = 0$، يوجد $\delta > 0$ مع k > $|f(x) - f(p)| < k$

عند $|x - p| < \delta$ و $a < x < b$

نقيد δ بحيث تكون $[p - \delta, p + \delta]$ مجموعة جزئية من $[a, b]$.

ولذلك مع $x \in [p - \delta, p + \delta]$، يكون لدينا

$$|f(x)| = |f(x) - f(p)| < k.$$

مجموعة التمارين 2.1 (صفحة 26)

.1

	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
أ	0.001264	4.025×10^{-4}
ب	7.346×10^{-6}	2.338×10^{-6}
ج	2.818×10^{-4}	1.037×10^{-4}
د	2.136×10^{-4}	1.510×10^{-4}
هـ	2.647×10^{1}	1.202×10^{-3}
و	1.454×10^{1}	1.050×10^{-2}
ز	420	1.042×10^{-2}
ح	3.343×10^{3}	9.213×10^{-3}

.3 أكبر الفترات هي أ.(149.85, 150.15) ب. (899.1, 900.9) ج.(1498.5, 1501.5) د.(89.91, 90.09)

.5

	التقريب	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
أ	134	0.079	5.90×10^{-4}
ب	133	0.499	3.77×10^{-3}
ج	2.00	0.327	0.195
د	1.67	0.003	1.79×10^{-3}
هـ	1.80	0.154	0.0786
و	− 15.1	0.0546	3.60×10^{-3}
ز	0.286	2.86×10^{-4}	10^{-3}
ح	0.00	0.0215	1.00

.7

	التقريب	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
أ	133	0.921	6.88×10^{-3}
ب	132	0.501	3.78×10^{-3}
ج	1.00	0.673	0.402
د	1.67	0.003	1.79×10^{-3}
هـ	3.55	1.60	0.817
و	− 15.2	0.0454	0.00299
ز	0.284	0.00171	0.00600
ح	0	0.02150	1

.9

	التقريب	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
أ.	3.14557613	3.983×10^{-3}	1.268×10^{-3}
ب.	3.14162103	2.838×10^{-5}	9.032×10^{-6}

.11 أ.
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x + x\sin x}{\cos x} = -2$$

ب. -1.941

ج. $$\frac{x(1-\frac{1}{2}x^2)-(x-\frac{1}{6}x^3)}{x-(x-\frac{1}{6}x^3)} = -2$$

د. الخطأ النسبي للفقرة (ب) هو 0.029 وللفقرة (ج) هو 0.00050.

.13

	x_1	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي	x_2	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
أ	92.26	0.01542	1.672×10^{-4}	0.005419	6.273×10^{-7}	1.157×10^{-4}
ب	0.005421	1.264×10^{-6}	2.333×10^{-4}	−92.26	4.580×10^{-3}	4.965×10^{-5}
ج	10.98	6.875×10^{-3}	6.257×10^{-4}	0.001149	7.566×10^{-8}	6.584×10^{-5}
د	−0.001149	7.566×10^{-8}	6.584×10^{-5}	−10.98	6.875×10^{-3}	6.257×10^{-4}

15. الأعداد من الماكنة معادلة إلى

أ. 3224 ب. −3224 ج. 1.32421875 د. 1.3242187500000002220446049250313080847263336181640625

17. المعادلة الأولى تعطي −0.00658، والمعادلة الثانية تعطي −0.0100 والقيمة الصحيحة بثلاث مراتب هي −0.0116.

19. الحلول التقريبية للأنظمة هي أ. $x = 2.451,\ y = -1.635$ ب. $x = 507.7,\ y = 82.00$

21. أ. في الصيغة التشابكية يكون لدينا $f(x) = (((1.01e^x - 4.62)e^x - 3.11)e^x + 12.2)e^x - 1.99$

ب. −6.79

ج. −7.07

23. أ. $n = 77$ ب. $n = 35$

25. أ. $m = 17$ ب.

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k-1)(m-k)!}{k!(m-k)!} = \left(\frac{m}{k}\right)\left(\frac{m-1}{k-1}\right)\cdots\left(\frac{m-k-1}{1}\right)$$

ج. $m = 181707$

د. 7.541×10^{-4} الخطأ النسبي; 1960 الخطأ الحقيقي; 2,597,000

27. أ. 124.03 ب. 124.03 ج. −124.03 د. −124.03 هـ. 0.0065 و. 0.0065 ز. −0.0065 ح. −0.0065

مجموعة التمارين 3.1 (صفحة 36)

1. أ. المجموعان التقريبيان هما 1.53 و 1.54 على التوالي. القيمة الحقيقية هي 1.549. يظهر خطأ تدوير معنوي مبكرًا مع الطريقة الأولى.

3. أ. 2000 عنصر ب. 20,000,000,000 عنصر

5. 3 عناصر

7. معدلات التقارب هي

أ. $O(h^2)$ ب. $O(h)$ ج. $O(h^2)$ د. $O(h)$

13. أ. إذا كانت $|\alpha_n - \alpha|/(1/n^p) \le K$ فإن $|\alpha_n - \alpha| \le K(1/n^p) \le K(1/n^q)$ لأن $0 < q < p$. ولذلك فإن $|\alpha_n - \alpha|/(1/n^p) \le K$ و $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \to \alpha$ مع معدل تقارب $O(1/n^p)$.

ب.

n	$1/n$	$1/n^2$	$1/n^3$	$1/n^4$
5	0.2	0.04	0.008	0.0016
10	0.1	0.01	0.001	0.0001
50	0.02	0.0004	8×10^{-6}	1.6×10^{-7}
100	0.01	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}

$O(1/n^4)$ هي معدل تقارب الأكثر تسارعًا.

15. افترض أنه عندما $|x|$ صغيرة بما يكفي، يكون لدينا ثابتان موجبان k_1 و k_2 مستقلان عن x، بحيث

$|F_1(x) - L_1| \le K_1|x|^{\alpha}$ و $|F_2(x) - L_2| \le K_2|x|^{\beta}$

دع $K = \max(K_1, K_2)$ $c = \max(|c_1|, |c_2|, 1)$ $\delta = m\ x(\alpha, \beta)$

أ. لدينا

$$\begin{aligned}|F(x) - c_1L_1 - c_2L_2| &= |c_1(F_1(x) - L_1) + c_2(F_2(x) - L_2)| \\ &\le |c_1|K_1|x|^{\alpha} + |c_2|K_2|x|^{\beta} \\ &\le cK[|x|^{\alpha} + |x|^{\beta}] \\ &\le cK|x|^{\gamma}[1 + |x|^{\delta-\gamma}] \\ &\le \tilde{K}|x|^{\gamma}\end{aligned}$$

عندما $|x|$ صغيرة بما يكفي وثابت ما $\tilde{K}$. ولذلك فإن $F(x) = c_1L_1 + c_2L_2 + O(x^{\gamma})$

ب. لدينا

$$\begin{aligned}|G(x) - L_1 - L_2| &= |F_1(c_1x) + F_2(c_2x) - L_1 - L_2| \\ &\le K_1|c_1x|^{\alpha} + K_2|c_2x|^{\beta} \\ &\le Kc^{\delta}[|x|^{\alpha} + |x|^{\beta}] \\ &\le Kc^{\delta}|x|^{\gamma}[1 + |x|^{\delta-\gamma}] \\ &\le \tilde{K}|x|^{\gamma}\end{aligned}$$

عندما $|x|$ صغيرة بما يكفي وثابت ما $\tilde{K}$. ولذلك فإن $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^{\gamma})$

17. أ. 354224848179261915075

ب. $0.3542248538 \times 10^{21}$

ج. حُسبت النتيجة في الفقرة (أ) باستخدام خوارزمية العدد الصحيح الدقيق، وحسبت النتيجة في الفقرة (ب) باستخدام خوارزمية التدوير لعشر مراتب.

د. تتطلب النتيجة في الفقرة (أ) عبور حلقة 98 مرة.

هـ. النتيجة نفسها كما هي في الفقرة (أ).

مجموعة التمارين 1.2 (صفحة 51)

1. $p_3 = 0.625$

3. طريقة التنصيف Bisection تعطي

أ. $p_7 = 0.5859$ ب. $p_8 = 3.002$ ج. $p_7 = 3.419$

5. طريقة التنصيف Bisection تعطي

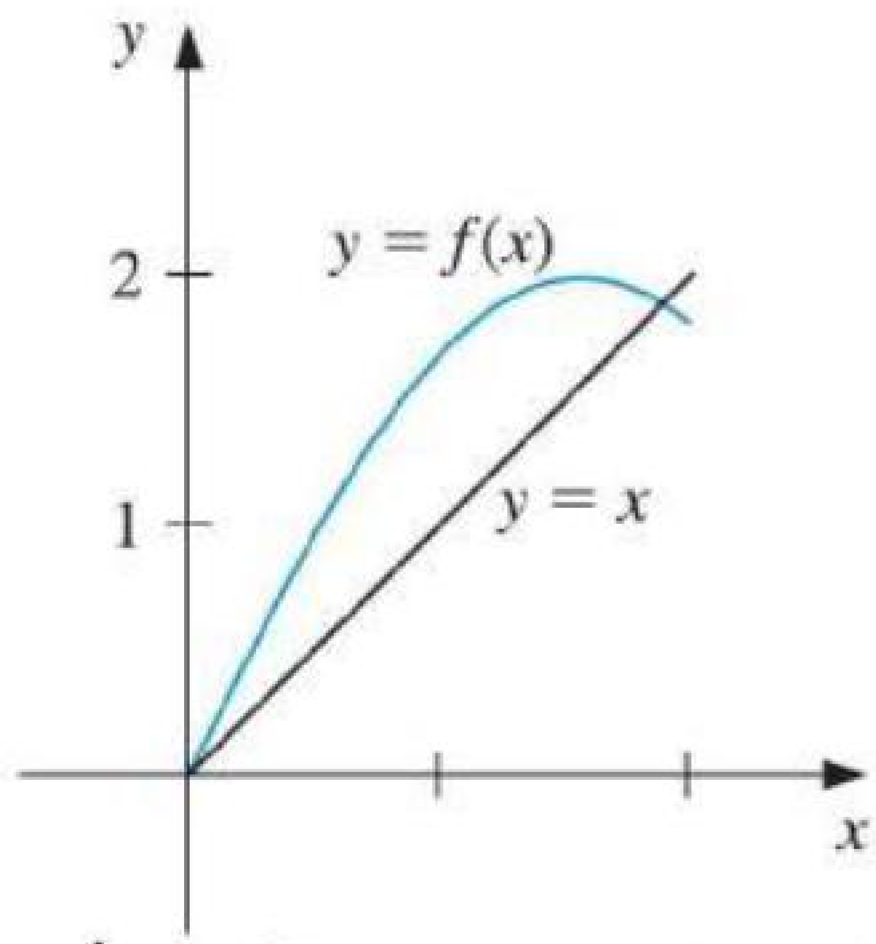
أ. $p_{17} = 0.641182$

ب. $p_{17} = 0.257530$

ج. للفترة $[-3, -2]$، يكون لدينا $p_{17} = -2.191307$، وللفترة $[-1, 0]$، لدينا $p_{17} = -0.798164$

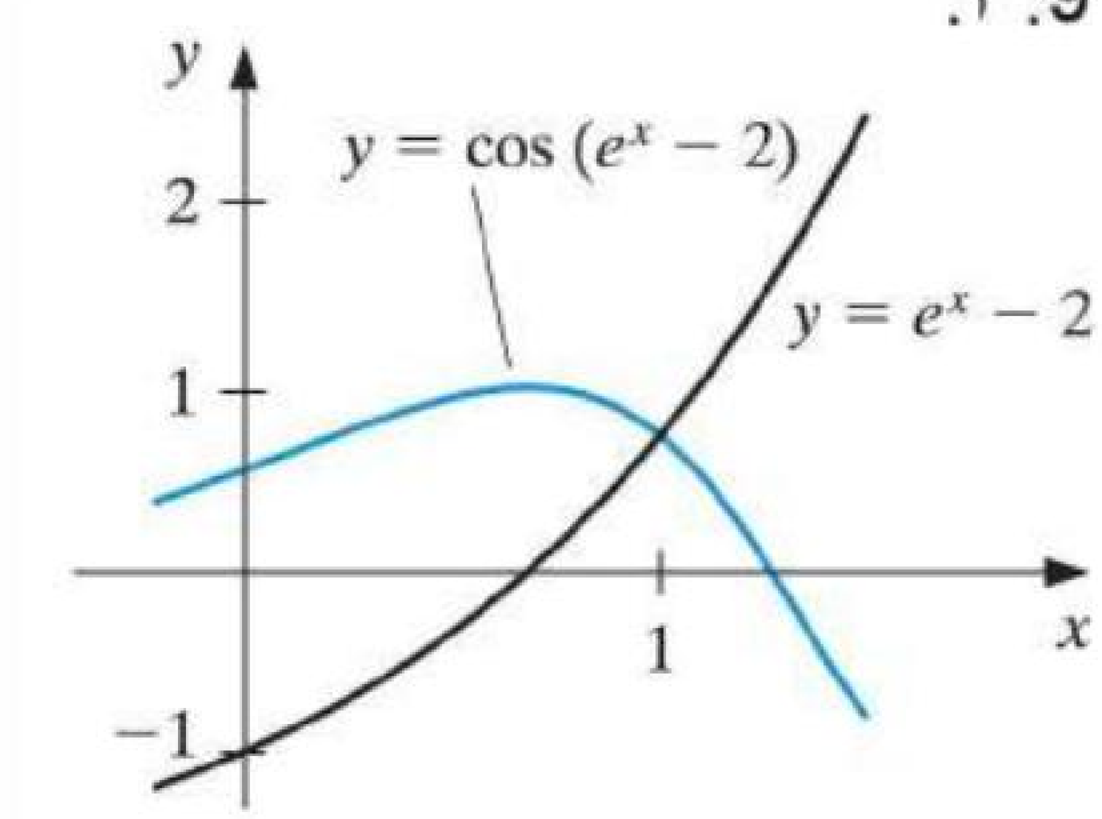
د. للفترة $[0.2, 0.3]$، يكون لدينا $p_{14} = 0.297528$، وللفترة $[1.2, 1.3]$، لدينا $p_{14} = 1.256622$

7. أ.



ب. استخدام [1.5,2] من الفقرة (أ) يعطي $p_{16} = 1.89550018$

9. أ.



ب. $p_{17} = 1.00762177$

11. أ. 2 ب. -2 ج. -1 د. 1

13. الجذر الثالث لـ 25 هو $p_{14} = 2.92401$، تقريبًا، باستخدام [2,3].

15. الحد هو $n \geq 14$ و $p_{14} = 1.32477$.

17. بما أن $\lim_{n\to\infty}(p_n - p_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$، الفرق بين الحدود يؤول إلى الصفر. على أي حال، فإن p_n هو الحد n من السلسلة الهارمونية غير المتقاربة، ولذلك $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$.

19. عمق الماء هو 0.838 ft.

مجموعة التمارين 2.2 (صفحة 61)

1. لقيمة x قيد الافتراض، يكون لدينا

أ. $x = (3 + x - 2x^2)^{1/4} \Leftrightarrow x^4 = 3 + x - 2x^2 \Leftrightarrow f(x) = 0$

ب. $x = \left(\dfrac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2} \Leftrightarrow 2x^2 = x + 3 - x^4 \Leftrightarrow f(x) = 0$

ج. $x = \left(\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2} \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) = x + 3 \Leftrightarrow f(x) = 0$

د. $x = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1} \Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2 - x = 3x^4 + 2x^2 + 3 \Leftrightarrow f(x) = 0$

3. الترتيب بحسب سرعة التقارب تنازليًّا هو (د)، (ب) و (أ). لا تتقارب المتتالية في (ج).

5. مع $g(x) = (3x^2 + 3)^{1/4}$ و $p_0 = 1$، فإن $p_6 = 1.9433$ دقيقة إلى حد 0.01.

7. بما أن $g'(x) = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$ متصلة و g' موجودة على $[0, 2\pi]$. بالإضافة إلى ذلك، فإن $g'(x) = 0$ فقط عندما $x = \pi$، ولذلك فإن $\pi + \frac{1}{2} = g(\pi) \geq g(x) \geq \pi = g(2\pi) = g(0)$ و $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$ عند $0 \leq x \leq 2\pi$.

وتؤدي النظرية (2.2) إلى وجود نقطة ثابتة وحيدة p في $[0, 2\pi]$ مع $k = \frac{1}{4}$ و $p_0 = \pi$، يكون لدينا $p_1 = \pi + \frac{1}{2}$

وتؤدي النتيجة (2.4) إلى أن

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0| = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

وعند الحد الذي هو أقل من 0.1، نحتاج إلى $n \geq 4$. على أي حال فإن $p_3 = 3.626996$ دقيقة لغاية 0.01.

9. عند $p_0 = 1.0$ و $g(x) = 0.5(x + \frac{3}{x})$، يكون لدينا $p_4 = 1.73205 \approx \sqrt{3}$

11. أ. مع $[0, 1]$ و $p_0 = 0$، يكون لدينا $p_9 = 0.257531$ ب. مع $[2.5, 3.0]$ و $p_0 = 2.5$، يكون لدينا $p_{17} = 2.690650$

ج. مع $[0.25, 1]$ و $p_0 = 0.25$، يكون لدينا $p_{14} = 0.909999$ د. مع $[0.3, 0.7]$ و $p_0 = 0.3$، يكون لدينا $p_{39} = 0.469625$

هـ. مع $[0.3, 0.6]$ و $p_0 = 0.3$، يكون لدينا $p_{48} = 0.448059$ و. مع $[0, 1]$ و $p_0 = 0$، يكون لدينا $p_6 = 0.704812$

13. عند $g(x) = (2x^2 - 10\cos x)/(3x)$، يكون لدينا الآتي: $p_0 = 3 \Longrightarrow p_8 = 3.16193;\quad p_0 = -3 \Longrightarrow p_8 = -3.16193$

عند $g(x) = \arccos(-0.1x^2)$، يكون لدينا الآتي: $p_0 = 1 \Longrightarrow p_{11} = 1.96882;\quad p_0 = -1 \Longrightarrow p_{11} = -1.96882$

15. مع $g(x) = \frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{x}{2}\right) + 2$ يكون لدينا $p_5 = 1.683855$

17. أحد الأمثلة هو $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ على $[\frac{1}{2}, 1]$.

21. استبدل العبارة الثانية من البرهان بالآتي: "بما أن g تحقق شرط لابلاس Lipschitz على $[a, b]$ مع ثابت لابلاس $L < 1$ يكون لدينا عند كل n $|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| \leq L|p_{n-1} - p|$ باقي البرهان هو نفسه مع استبدال k بـِ L.

23. مع $g(t) = 501.0625 - 201.0625e^{-0.4t}$ و $p_0 = 5.0$، فإن $p_3 = 6.0028$ تكون ضمن 0.01 s من الوقت الحقيقي.

مجموعة التمارين 2.3 (صفحة 71)

1. $p_2 = 2.60714$

3. أ. 2.45454 ب. 2.44444 ج. الفقرة (ب) أفضل.

5. أ. عند $p_0 = 2$ ، يكون لدينا $p_5 = 2.69065$ ب. عند $p_0 = -3$، يكون لدينا $p_3 = -2.87939$

ج. عند $p_0 = 0$ ، يكون لدينا $p_4 = 0.73909$ د. عند $p_0 = 0$، يكون لدينا $p_3 = 0.96434$

7. باستخدام p_0 و p_1 بوصفهما نقاط النهاية للفترات، يكون لدينا

أ. $p_{11} = 2.69065$ ب. $p_7 = -2.87939$ ج. $p_6 = 0.73909$ د. $p_5 = 0.96433$

9. باستخدام p_0 و p_1 بوصفهما نقاط النهاية للفترات، يكون لدينا

أ. $p_{16} = 2.69060$ ب. $p_6 = -2.87938$ ج. $p_7 = 0.73908$ د. $p_6 = 0.96433$

11. أ. طريقة نيوتن مع $p_0 = 1.5$ تعطي $p_3 = 1.51213455$.

طريقة القاطع مع $p_0 = 1$ و $p_1 = 2$ تعطي $p_{10} = 1.51213455$.

طريقة الموقع الفاشل مع $p_0 = 1$ و $p_1 = 2$ تعطي $p_{17} = 1.51212954$.

ب. طريقة نيوتن مع $p_0 = 0.5$ تعطي $p_5 = 0.976773017$.

طريقة القاطع مع $p_0 = 0$ و $p_1 = 1$ تعطي $p_5 = 0.976773017$.

طريقة الموقع الفاشل مع $p_0 = 0$ و $p_1 = 1$ تعطي $p_5 = 0.976772976$.

13. عند $p_0 = 1$، يكون لدينا $p_5 = 0.589755$. للنقطة الإحداثيات $(0.589755, 0.347811)$.

15. معادلة خط المماس هي $y - f(p_{n-1}) = f'(p_{n-1})(x - p_{n-1})$. لتكملة هذه المسألة، ضع $y = 0$ وحل $x = p_n$.

17. أ. عند $p_0 = -1$ و $p_1 = 0$، يكون لدينا $p_{17} = -0.04065850$، وعند $p_0 = 0$ و $p_1 = 1$، يكون لدينا $p_9 = 0.9623984$.

ب. عند $p_0 = -1$ و $p_1 = 0$، يكون لدينا $p_5 = -0.04065929$، وعند $p_0 = 0$ و $p_1 = 1$، يكون لدينا $p_{12} = -0.04065929$.

ج. عند $p_0 = -0.5$، يكون لدينا $p_5 = -0.04065929$، وعند $p_0 = 0.5$، يكون لدينا $p_{21} = 0.9623989$.

19. تتضمن هذه المعادلة طرح ما يقارب الأعداد نفسها في كل من البسط والمقام إذا ما كان p_{n-1} و p_{n-2} تقريبين متساويين.

21. أ. $p_0 = -10,\ p_{11} = -4.30624527$ ب. $p_0 = -5,\ p_5 = -4.30624527$ ج. $p_0 = -3,\ p_5 = 0.824498585$

د. $p_0 = -1,\ p_4 = -0.824498585$ هـ. $p_0 = 0$ لا يمكن حساب p_1 عندما $f'(0) = 0$ و. $p_0 = 1,\ p_4 = 0.824498585$

ز. $p_0 = 3,\ p_5 = -0.824498585$ ح. $p_0 = 5,\ p_5 = 4.30624527$ ط. $p_0 = 10,\ p_{11} = 4.30624527$

23. عند $f(x) = \ln(x^2+1) - e^{0.4x}\cos\pi x$ يكون لدينا الجذور الآتية:

أ. عند $p_0 = -0.5$، يكون لدينا $p_3 = -0.4341431$.

ب. عند $p_0 = 0.5$، يكون لدينا $p_3 = 0.4506567$. عند $p_0 = 1.5$، يكون لدينا $p_3 = 1.7447381$.

عند $p_0 = 2.5$، يكون لدينا $p_5 = 2.2383198$. عند $p_0 = 3.5$، يكون لدينا $p_4 = 3.7090412$.

ج. التقريب الابتدائي $n - 0.5$ معقول جدًّا.

د. عند $p_0 = 24.5$، يكون لدينا $p_2 = 24.4998870$.

25. العددان هما 6.512849 و 13.487151 تقريبًا.

27. كان بإمكان المقترض دفع 8.10% على الأكثر.

29. أ. حل (3^(3*x+1)-7*5^(2*x),x) وحل (3^(3*x+1)-7*5^(2*x),x) وكلاهما لا يحقق القيمة.

ب. الرسم البياني (3^(3*x+1)-7*5^(2*x),x=a..b) يعطي عمومًا معلومات غير مفيدة. ومع ذلك فإن $a = 10.5$ و $b = 11.5$ في أمر الرسم البياني يثبت أن لـ $f(x)$ جذرًا قريبًا من $x = 11$.

ج. مع $p_0 = 11$، فإن $p_5 = 11.0094386442681716$ دقيق إلى حد 10^{-16}. د. $p = \dfrac{\ln(3/7)}{\ln(25/27)}$

31. لدينا $P_L = 265816,\ c = -0.75658125$ و $k = 0.045017502$. إن حجم السكان لعام **1980** هو $P(30) = 222{,}248{,}320$، ولعام **2010** هو $P(60) = 252{,}967{,}030$.

33. باستخدام $p_0 = 0.5$ و $p_1 = 0.9$، فإن طريقة القاطع تعطي $p_5 = 0.842$.

مجموعة التمارين 2.4 (صفحة 82)

1. أ. عند $p_0 = 0.5$، يكون لدينا $p_{13} = 0.567135$

ب. عند $p_0 = -1.5$، يكون لدينا $p_{23} = -1.414325$

ج. عند $p_0 = 0.5$، يكون لدينا $p_{22} = 0.641166$

د. عند $p_0 = -0.5$، يكون لدينا $p_{23} = -0.183274$

3. أ. عند $p_0 = 0.5$، يكون لدينا $p_3 = 0.567143$

ب. عند $p_0 = -1.5$، يكون لدينا $p_2 = -1.414158$

ج. عند $p_0 = 0.5$، يكون لدينا $p_3 = 0.641274$

د. عند $p_0 = -0.5$، يكون لدينا $p_5 = -0.183319$

5. طريقة نيوتن مع $p_0 = -0.5$ تعطي $p_{13} = -0.169607$، وطريقة نيوتن المعدلة في المعادلة **(11.2)** مع $p_0 = -0.5$ تعطي $p_{11} = -0.169607$.

7. أ. عند $k > 0$، فإن
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|p_{n+1}-0|}{|p_n-0|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = 1$$
وبذلك فإن التقارب خطي.

ب. يجب أن يكون لدينا $N > 10^{m/k}$.

9. أمثلة اعتيادية هي أ. $p_n = 10^{-3^n}$ ب. $p_n = 10^{-\alpha^n}$

11. هذا يأتي من حقيقة كون
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{b-a}{2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{b-a}{2^n}\right|} = \frac{1}{2}$$

13. إذا كان $|p_{n+1} - p|/|p_n - p|^3 = 0.75$ و $|p_0 - p| = 0.5$ فإن $|p_n - p| = (0.75)^{(3^n-1)/2}|p_0 - p|^{3^n}$ ويتطلب الحصول على $|p_n - p| \le 10^{-8}$ كون $n \ge 3$.

مجموعة التمارين 2.5 (صفحة 86)

1. النتائج مبينة في الجدول الآتي:

	a	b	c	d
$\hat{p}_0$	0.258684	0.907859	0.548101	0.731385
$\hat{p}_1$	0.257613	0.909568	0.547915	0.736087
$\hat{p}_2$	0.257536	0.909917	0.547847	0.737653
$\hat{p}_3$	0.257531	0.909989	0.547823	0.738469
$\hat{p}_4$	0.257530	0.910004	0.547814	0.738798
$\hat{p}_5$	0.257530	0.910007	0.547810	0.738958

3. $p_0^{(1)} = 0.826427$

5. $p_1^{(0)} = 1.5$

7. عند $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ و $p_0 = 1$، يكون لدينا $p_3 = 1.32472$.

9. عند $g(x) = 0.5(x + \frac{3}{x})$ و $p_0 = 0.5$، يكون لدينا $p_4 = 1.73205$.

11. أ. عند $g(x) = \left(2 - e^x + x^2\right)/3$ و $p_0 = 0$، يكون لدينا $p_3 = 0.257530$.

ب. عند $g(x) = 0.5(\sin x + \cos x)$ و $p_0 = 0$، يكون لدينا $p_4 = 0.704812$.

ج. مع $p_0 = 0.25$، فإن $p_4 = 0.910007572$.

د. مع $p_0 = 0.3$، فإن $p_4 = 0.469621923$.

13. إن طريقة Aitken's Δ^2 تعطي

أ. $\hat{p}_2 = 0.0363$ ب. $\hat{p}_{10} = 0.0\overline{45}$

15. لدينا

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = \frac{|p_{n+1} - p + p - p_n|}{|p_n - p|} = \left|\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} - 1\right|$$

ولذلك

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} - 1\right| = 1$$

17. أ. ملحوظة: أثبت أولاً أن $p_n - p = -\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1}$، حيث إن ξ ما بين 0 و 1.

ب.

n	p_n	$\hat{p}_n$
0	1	3
1	2	2.75
2	2.5	$2.7\overline{2}$
3	$2.\overline{6}$	2.71875
4	$2.708\overline{3}$	$2.718\overline{3}$
5	$2.71\overline{6}$	2.7182870
6	$2.7180\overline{5}$	2.7182823
7	2.7182539	2.7182818
8	2.7182787	2.7182818
9	2.7182815	
10	2.7182818	

مجموعة التمارين 6.2 (صفحة 96)

1. أ. عند $p_0 = 1$، يكون لدينا $p_{22} = 2.69065$.
ب. عند $p_0 = 1$، يكون لدينا $p_5 = 0.53209$. عند $p_0 = -1$، يكون لدينا $p_3 = -0.65270$. عند $p_0 = -3$ يكون لدينا $p_3 = -2.87939$.
ج. عند $p_0 = 1$، يكون لدينا $p_5 = 1.32472$.
د. عند $p_0 = 1$، يكون لدينا $p_4 = 1.12412$. عند $p_0 = 0$، يكون لدينا $p_8 = -0.87605$.
هـ. عند $p_0 = 0$، يكون لدينا $p_6 = -0.47006$. عند $p_0 = -1$، يكون لدينا $p_4 = -0.88533$. عند $p_0 = -3$ يكون لدينا $p_4 = -2.64561$.
و. عند $p_0 = 0$، يكون لدينا $p_{10} = 1.49819$.

3. يتضمَّن الجدول الآتي التقريب الابتدائي والجذور:

	p_0	p_1	p_2	الجذور التقريبية	الجذور المتقارنة المعقدة
أ	−1	0	1	$p_7 = -0.34532 - 1.31873i$	$-0.34532 + 1.31873i$
	0	1	2	$p_6 = 2.69065$	
ب	0	1	2	$p_6 = 0.53209$	
	1	2	3	$p_9 = -0.65270$	
	−2	−3	−2.5	$p_4 = -2.87939$	
ج	0	1	2	$p_5 = 1.32472$	
	−2	−1	0	$p_7 = -0.66236 - 0.56228i$	$-0.66236 + 0.56228i$
د	0	1	2	$p_5 = 1.12412$	
	2	3	4	$p_{12} = -0.12403 + 1.74096i$	$-0.12403 - 1.74096i$
	−2	0	−1	$p_5 = -0.87605$	
هـ	0	1	2	$p_{10} = -0.88533$	
	1	0	−0.5	$p_5 = -0.47006$	
	−1	−2	−3	$p_5 = -2.64561$	
و	0	1	2	$p_6 = 1.49819$	
	−1	−2	−3	$p_{10} = -0.51363 - 1.09156i$	$-0.51363 + 1.09156i$
	1	0	−1	$p_8 = 0.26454 - 1.32837i$	$0.26454 + 1.32837i$

5. أ. الجذور هي $1.244, 8.847$ و -1.091، والنقاط الحرجة هي 0 و 6.
ب. الجذور هي $0.5798, 1.521, 2.332, -2.432$، والنقاط الحرجة هي $1, 2.001, -1.5$.

7. الطرائق جميعها أوجدت الحل 0.23235.

9. المادة الصغرى هي 573.64895 سم² تقريبًا.

مجموعة التمارين 3.1 (صفحة 115)

.1

أ. (i) $P_1(x) = -0.29110731x + 1;\ P_1(0.45) = 0.86900171;\ |\cos 0.45 - P_1(0.45)| = 0.03144539;$
(ii) $P_2(x) = -0.43108687x^2 - 0.03245519x + 1;\ P_2(0.45) = 0.89810007;\ |\cos 0.45 - P_2(0.45)| = 0.0023470$

ب. (i) $P_1(x) = 0.44151844x + 1;\ P_1(0.45) = 1.1986833;\ |\ \ 1.45 - P_1(0.45)| = 0.00547616;$
(ii) $P_2(x) = -0.070228596x^2 + 0.483655598x + 1;\ P_2(0.45) = 1.20342373;\ |\sqrt{1.45} - P_2(0.45)| = 0.00073573$

ج. (i) $P_1(x) = 0.78333938x;\ P_1(0.45) = 0.35250272;\ |\ln 1.45 - P_1(0.45)| = 0.01906083;$
(ii) $P_2(x) = -0.23389466x^2 + 0.92367618x;\ P_2(0.45) = 0.36829061;\ |\ln 1.45 - P_2(0.45)| = 0.00327294$

د. (i) $P_1(x) = 1.14022801x;\ P_1(0.45) = 0.0.51310260;\ |\tan 0.45 - P_1(0.45)| = 0.03004754;$
(ii) $P_2(x) = 0.86649261x^2 + 0.62033245x;\ P_2(0.45) = 0.45461436;\ |\tan 0.45 - P_2(0.45)| = 0.02844071$

.3

أ. $\left|\frac{f''(\xi)}{2}(0.45-0)(0.45-0.6)\right| \le 0.135;\ \left|\frac{f'''(\xi)}{6}(0.45-0)(0.45-0.6)(0.45-0.9)\right| \le 0.00397$

ب. $\left|\frac{f''(\xi)}{2}(0.45-0)(0.45-0.6)\right| \le 0.03375;\ \left|\frac{f'''(\xi)}{6}(0.45-0)(0.45-0.6)(0.45-0.9)\right| \le 0.001898$

ج. $\left|\frac{f''(\xi)}{2}(0.45-0)(0.45-0.6)\right| \le 0.135;\ \left|\frac{f'''(\xi)}{6}(0.45-0)(0.45-0.6)(0.45-0.9)\right| \le 0.010125$

د. $\left|\frac{f''(\xi)}{2}(0.45-0)(0.45-0.6)\right| \le 0.06779;\ \left|\frac{f'''(\xi)}{6}(0.45-0)(0.45-0.6)(0.45-0.9)\right| \le 0.151$

.5 أ.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(8.4)$
1	8.3, 8.6	17.87833
2	8.3, 8.6, 8.7	17.87716
3	8.3, 8.6, 8.7, 8.1	17.87714

ب.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(-1/3)$
1	−0.5, −0.25	0.21504167
2	−0.5, −0.25, 0.0	0.16988889
3	−0.5, −0.25, 0.0, −0.75	0.17451852

ج.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(0.25)$
1	0.2, 0.3	−0.13869287
2	0.2, 0.3, 0.4	−0.13259734
3	0.2, 0.3, 0.4, 0.1	−0.13277477

د.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(0.9)$
1	0.8, 1.0	0.44086280
2	0.8, 1.0, 0.7	0.43841352
3	0.8, 1.0, 0.7, 0.6	0.44198500

.7 أ.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(8.4)$
1	8.3, 8.6	17.87833
2	8.3, 8.6, 8.7	17.87716
3	8.1, 8.3, 8.6, 8.7	17.87714

ب.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(-1/3)$
1	−0.5, −0.25	0.21504167
2	−0.5, −0.25, 0.0	0.16988889
3	−0.75, −0.5, −0.25, 0.0	0.17451852

ج.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(0.25)$
1	0.2, 0.3	−0.13869287
2	0.2, 0.3, 0.4	−0.13259734
3	0.1, 0.2, 0.3, 0.4	−0.13277477

د.

n	$x_0, x_1, \ldots, x_n$	$P_n(0.9)$
1	0.8, 1.0	0.44086280
2	0.7, 0.8, 1.0	0.43841352
3	0.6, 0.7, 0.8, 1.0	0.44198500

.9 أ.

n	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
1	0.00118	0.00120
2	1.367×10^{-5}	1.452×10^{-5}

ب.

n	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
1	4.0523×10^{-2}	4.5153×10^{-2}
2	4.6296×10^{-3}	4.6296×10^{-3}

ج.

n	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
1	5.9210×10^{-3}	6.0971×10^{-3}
2	1.7455×10^{-4}	1.8128×10^{-4}

د.

n	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
1	2.7296×10^{-3}	1.4080×10^{-2}
2	5.1789×10^{-3}	9.2215×10^{-3}

11. أ. يكون لدينا $\sqrt{3} \approx P_4(1/2) = 1.708\overline{3}$

ب. يكون لدينا $\sqrt{3} \approx P_4(3) = 1.690607$

ج. الخطأ المطلق في الفقرة (أ) هو 0.0237 تقريبًا، والخطأ المطلق في الفقرة (ب) هو 0.0414 تقريبًا، ولذلك فإن الفقرة (أ) أدق.

13. $y = 1.25$

15. $f(1.09) \approx 0.2826$ الخطأ الحقيقي هو 4.3×10^{-5}، وحد الخطأ هو 7.4×10^{-6}. هذا الفرق ناتج من حقيقة كون البيانات معطاة فقط لأربع خانات عشرية، وأنه قد استخدمت حسابات بأربع مراتب فقط.

17. $P_2 = f(0.7) = 6.4$

19. أ. $P_2(x) = -11.22388889x^2 + 3.810500000x + 1$، وحد الخطأ 0.11371294

ب. $P_2(x) = -0.1306344167x^2 + 0.8969979335x - 0.63249693$، وحد الخطأ 9.45762×10^{-4}

ج. $P_3(x) = 0.1970056667x^3 - 1.06259055x^2 + 2.532453189x - 1.666868305$، وحد الخطأ 10^{-4}

د. $P_3(x) = -0.07932x^3 - 0.545506x^2 + 1.0065992x + 1$، وحد الخطأ 1.591376×10^{-3}

21. إن أكبر سعة خطوة محتملة هي 0.004291932، ولذلك فإن 0.04 تبدو اختيارًا معقولاً.

23. $P_{0,1,2,3}(2.5) = 2.875$.

25. الحدود العشرة الأولى من المتتالية هي: 1. 0.038462 2. 0.333671 3. 0.116605 4. -0.371760 5. -0.0548919 6. 0.605935 7. 0.190249 8. -0.513353 9. -0.0668173 10. 0.448335

وبما أن $f(1 + \sqrt{10}) = 0.0545716$، فإنه لا يبدو أن المتتالية تتقارب.

27. غيّر الخوارزمية (1.3) كما يلي:

المدخلات: الأعداد $y_0, y_1, \ldots, y_n$؛ القيم $x_0, x_1, \ldots, x_n$ هي كما في العمود الأول $Q_{0,0}, Q_{1,0}, \ldots, Q_{n,0}$ من Q.

المخرجات: الجدول Q مع $Q_{n,n}$ تقرب $f^{-1}(0)$.

الخطوة 1: عند $i = 1, 2, \ldots, n$ عند $j = 1, 2, \ldots, i$ ضع

$$Q_{i,j} = \frac{y_i Q_{i-1,j-1} - y_{i-j} Q_{i,j-1}}{y_i - y_{i-j}}$$

29. أ. العينة 1: $P_6(x) = 6.67 - 42.6434x + 16.1427x^2 - 2.09464x^3 + 0.126902x^4 - 0.00367168x^5 + 0.0000409458x^6$

العينة 2: $P_6(x) = 6.67 - 5.67821x + 2.91281x^2 - 0.413799x^3 + 0.0258413x^4 - 0.000752546x^5 + 0.00000836160x^6$

ب. العينة 1: 42.71 mg، والعينة 2: 19.42 mg

31. بما أن $g(x) = g(x_0) = 0$، لذا يوجد عدد ξ_1 بين x و x_0، بحيث $g'(\xi_1) = 0$. كذلك $g'(x_0) = 0$، لذلك يوجد عدد ξ_2 بين x_0 و ξ_1، بحيث تستمر العملية من خلال الاستنتاج لإثبات وجود العدد ξ_{n+1} بين x_0 و ξ_n مع $g^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0$.

إن معادلة الخطأ لكثيرات حدود تايلور تظهر بعدئذٍ.

33. أ. 1. $B_3(x) = x$، 2. $B_3(x) = 1$

مجموعة التمارين 3.3 (صفحة 127)

1. أ. $P_1(x) = 16.9441 + 3.1041(x - 8.1)$; $P_1(8.4) = 17.87533$; $P_2(x) = P_1(x) + 0.06(x - 8.1)(x - 8.3)$; $P_2(8.4) = 17.87713$

$P_3(x) = P_2(x) + -0.00208333(x - 8.1)(x - 8.3)(x - 8.6)$; $P_3(8.4) = 17.87714$

ب. $P_1(x) = -0.1769446 + 1.9069687(x - 0.6)$; $P_1(0.9) = 0.395146$

$P_2(x) = P_1(x) + 0.959224(x - 0.6)(x - 0.7)$; $P_2(0.9) = 0.4526995$

$P_3(x) = P_2(x) - 1.785741(x - 0.6)(x - 0.7)(x - 0.8)$; $P_3(0.9) = 0.4419850$

3. في المعادلات الآتية لدينا $s = (1/h)(x - x_0)$

أ. $P_1(s) = -0.718125 - 0.0470625s$; $P_1(-\frac{1}{3}) = -0.006625$

$P_2(s) = P_1(s) + 0.312625s(s - 1)/2$; $P_2(-\frac{1}{3}) = 0.1803056$

$P_3(s) = P_2(s) + 0.09375s(s - 1)(s - 2)/6$; $P_3(-\frac{1}{3}) = 0.1745185$

ب. $P_1(s) = -0.62049958 + 0.3365129s$; $P_1(0.25) = -0.1157302$

$P_2(s) = P_1(s) - 0.04592527s(s - 1)/2$; $P_2(0.25) = -0.1329522$

$P_3(s) = P_2(s) - 0.00283891s(s - 1)(s - 2)/6$; $P_3(0.25) = -0.1327748$

5. في المعادلات الآتية لدينا $s = (1/h)(x - x_n)$.

أ. $P_1(s) = 1.101 + 0.7660625s$; $f(-\frac{1}{3}) \approx P_1(-\frac{4}{3}) = 0.07958333$; $P_2(s) = P_1(s) + 0.406375s(s+1)/2$
$f(-\frac{1}{3}) \approx P_2(-\frac{4}{3}) = 0.1698889$; $P_3(s) = P_2(s) + 0.09375s(s+1)(s+2)/6$; $f(-\frac{1}{3}) \approx P_3(-\frac{4}{3}) = 0.1745185$

ب. $P_1(s) = 0.2484244 + 0.2418235s$; $f(0.25) \approx P_1(-1.5) = -0.1143108$; $P_2(s) = P_1(s) - 0.04876419s(s+1)/2$
$f(0.25) \approx P_2(-1.5) = -0.1325973$; $P_3(s) = P_2(s) - 0.00283891s(s+1)(s+2)/6$; $f(0.25) \approx P_3(-1.5) = -0.1327748$

7. أ. $P_3(x) = 5.3 - 33(x+0.1) + 129.8\overline{3}(x+0.1)x - 556.\overline{6}(x+0.1)x(x-0.2)$

ب. $P_4(x) = P_3(x) + 2730.243387(x+0.1)x(x-0.2)(x-0.3)$

9. أ. $f(0.05) \approx 1.05126$ ب. $f(0.65) \approx 1.91555$ ج. $f(0.43) \approx 1.53725$

11. أ. $P(-2) = Q(-2) = -1,\ P(-1) = Q(-1) = 3,\ P(0) = Q(0) = 1,\ P(1) = Q(1) = -1,\ P(2) = Q(2) = 3$

ب. معادلة كثيرة الحدود ليست وحيدة. وإذا ما وُسّعت $P(x)$ و $Q(x)$ فإنهما وحيدتان. هناك كثيرة حدود استكمال واحدة فقط إذا كانت الرتبة تساوي أو أقل من 4 للبيانات المعطاة. على أي حال يمكن التعبير بطرائق مختلفة بالاعتماد على التطبيق.

13. إن معامل x^2 هي 3.5.

15. يجب زيادة تقريب $f(0.3)$ بالمقدار 5.9375.

17. $f[x_0] = f(x_0) = 1,\ f[x_1] = f(x_1) = 3,\ f[x_0, x_1] = 5$

19. بما أن $f[x_2] = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$، فإن

$$a_2 = \frac{f[x_2] - f[x_0]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)}$$

وهذا يبسط في اتجاه $f[x_0, x_1, x_2]$.

21. ليكن $\tilde{P}(x) = f[x_{i_0}] + \sum_{k=1}^{n} f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}](x - x_{i_0}) \cdots (x - x_{i_k})$ و $\hat{P}(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_k)$
إن كثيرة حدود $\tilde{P}(x)$ تستوفي $f(x)$ عند البؤر $x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}$، وإن كثيرة حدود $\hat{P}(x)$ تستوفي $f(x)$ عند البؤر $x_0, \ldots, x_n$.
وبما أن مجموعتي البؤر متماثلة، وكثيرة حدود الاستكمال وحيدة، يكون لدينا $\tilde{P}(x) = \hat{P}(x)$. إن معامل x^n في $\hat{P}(x)$ هي $f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}]$، ومعامل x^n في $\tilde{P}(x)$ هي $f[x_0, \ldots, x_n]$. ولذلك فإن $f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}] = f[x_0, \ldots, x_n]$.

مجموعة التمارين 3.3 (صفحة 135)

1. المعامل لكثيرات الحدود في صيغة الفرق المنقسم معطاة في الجداول الآتية. على سبيل المثال إن كثيرة حدود الفقرة (أ) هي

$$H_3(x) = 17.56492 + 3.116256(x - 8.3) + 0.05948(x - 8.3)^2 - 0.00202222(x - 8.3)^2(x - 8.6)$$

أ	ب	ج	د
17.56492	0.22363362	−0.02475	−0.62049958
3.116256	2.1691753	0.751	3.5850208
0.05948	0.01558225	2.751	−2.1989182
−0.00202222	−3.2177925	1	−0.490447
		0	0.037205
		0	0.040475
			−0.0025277777
			0.0029629628

3.

	x	التقريب إلى $f(x)$	حقيقة $f(x)$	الخطأ
أ	8.4	17.877144	17.877146	2.33×10^{-6}
ب	0.9	0.44392477	0.44359244	3.3323×10^{-4}
ج	$-\frac{1}{3}$	0.1745185	0.17451852	1.85×10^{-8}
د	0.25	−0.1327719	−0.13277189	5.42×10^{-9}

5. أ. يكون لدينا $\sin 0.34 \approx H_5(0.34) = 0.33349$.

ب. تعطي المعادلة حد خطأ مقداره 3.05×10^{-14}، ولكن الخطأ الحقيقي هو 2.91×10^{-6}. الفرق ناجم عن حقيقة كون البيانات معطاة فقط لخمس مراتب عشرية.

ج. يكون لدينا $\sin 0.34 \approx H_7(0.34) = 0.33350$ ومع أن حد الخطأ هو الآن $5\,4 \times 10^{-20}$، فإن دقة البيانات المعطاة تسيطر على الحسابات. وهذه النتيجة في الحقيقة أقل دقة عند مقارنتها بالتقريب في الفقرة (ب)؛ لأن $\sin 0.34 = 0.333487$.

7. بالنسبة إلى 3 (أ)، فلدينا حد خطأ مقداره 5.9×10^{-8}. حد الخطأ لـ 3 (ج) هو 0؛ لأن $f^{(n)}(x) \equiv 0$ عند $n > 3$.

9. إن $H_3(1.25) = 1.169080403$ مع حد خطأ قدره 4.81×10^{-5}، وإن $H_5(1.25) = 1.169016064$ مع حد خطأ قدره 4.43×10^{-4}.

11. أ. افترض أن $P(x)$ كثيرة حدود أخرى مع $P(x_k) = f(x_k)$ و $P'(x_k) = f'(x_k)$ عند $k = 0,\ldots,\ n$، وأن رتبة $P(x)$ تكون $2n + 1$ على الأكثر. دع $D(x) = H_{2n+1}(x) - P(x)$. لذلك فإن $D(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $2n + 1$ على الأكثر مع $D(x_k) = 0$ و$D'(x_k) = 0$ لكل $k = 0, 1,\ldots,\ n$. لذلك فإن D له أصفار بمضاعف 2 عند كل من x_k و $D(x) = (x - x_0)^2 \ldots (x - x_n)^2 Q(x)$. لذلك يجب أن تكون $D(x)$ من الرتبة $2n$ أو أكثر الذي سيكون متناقضًا، أو أن $Q(x) \equiv 0$ التي تؤدي إلى أن $D(x) \equiv 0$. ومن ثم فإن $P(x) \equiv H_{2n+1}(x)$.

ب. لاحظ أولاً أن معادلة الخطأ تتحقق إذا كانت $x = x_k$ لأي اختيار لـ ξ.

دع $x \neq x_k$ عند $k = 0,\ldots,\ n$، وعرِف

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{(t - x_0)^2 \ldots (t - x_n)^2}{(x - x_0)^2 \ldots (x - x_n)^2}\,[f(x) - H_{2n+1}(x)]$$

لاحظ أن $g(x_k) = 0$ عند $k = 0,\ldots,\ n$، وأن $g(x) = 0$. ولذلك فإن g له $2n + 2$ من الأصفار المختلفة في $[a, b]$. ومن خلال نظرية Rolle، فإن g' له $n + 1$ من الأصفار المختلفة $\xi_0,\ldots,\xi_n$ التي هي بين الأعداد $x_0,\ldots,\ x_n, x$.

بالإضافة إلى ذلك، فإن $g'(x_k) = 0$ عند $k = 0,\ldots,\ n$، ومن ثم فإن g' له $2n + 2$ من الأصفار المختلفة $x_0,\ldots,\ x_n,\ \xi_0,\ldots,\xi_n$. وبما أن g' تكون قابلة للاشتقاق $2n + 1$ من المرات، فإن نظرية Generalized Rolle تؤدي إلى أن العدد $\xi \in [a, b]$ موجود مع $g^{(2n+2)}(\xi) = 0$ ولكن.

$$g^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{d^{2n+2}}{dt^{2n+2}} H_{2n+1}(t) - \frac{[f(x) - H_{2n+1}(x)] \cdot (2n + 2)!}{(x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2}$$

و

$$0 = g^{(2n+2)}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi) - \frac{(2n + 2)![f(x) - H_{2n+1}(x)]}{(x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2}$$

إن معادلة الخطأ تعقب ذلك.

مجموعة التمارين 4.3 (صفحة 153)

1. $S(x) = x$ على $[0, 2]$.

3. إن معادلات الأخاديد التكعيبية الحرة الخاصة بها هي

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

لكل x في $[x_i, x_{i+1}]$، حيث إن المعاملات معطاة في الجداول الآتية:

أ.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	17.564920	3.13410000	0.00000000	0.00000000

ب.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0.22363362	2.17229175	0.00000000	0.00000000

ج.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	−0.02475000	1.03237500	0.00000000	6.50200000
1	0.33493750	2.25150000	4.87650000	−6.50200000

د.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	−0.62049958	3.45508693	0.00000000	−8.9957933
1	−0.28398668	3.18521313	−2.69873800	−0.94630333
2	0.00660095	2.61707643	−2.98262900	9.9420966

5.

	x	التقريب إلى $f(x)$	حقيقة $f(x)$	الخطأ
أ	8.4	17.87833	17.877146	1.1840×10^{-3}
ب	0.9	0.4408628	0.44359244	2.7296×10^{-3}
ج	$-\frac{1}{3}$	0.1774144	0.17451852	2.8959×10^{-3}
د	0.25	−0.1315912	−0.13277189	1.1807×10^{-3}

	x	التقريب إلى to $f'(x)$	حقيقة $f'(x)$	الخطأ Error
أ	8.4	3.134100	3.128232	5.86829×10^{-3}
ب	0.9	2.172292	2.204367	0.0320747
ج	$-\frac{1}{3}$	1.574208	1.668000	0.093792
د	0.25	2.908242	2.907061	1.18057×10^{-3}

7. إن معادلات الأخاديد التكعيبية المتسلقة الخاصة بها هي

$$s(x) = s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

لكل x في $[x_i, x_{i+1}]$، حيث إن المعاملات معطاة في الجداول الآتية:

أ.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	17.564920	3.1162560	0.0600867	−0.00202222

ب.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0.22363362	2.1691753	0.65914075	−3.2177925

ج.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	−0.02475000	0.75100000	2.5010000	1.0000000
1	0.33493750	2.18900000	3.2510000	1.0000000

د.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	−0.62049958	3.5850208	−2.1498407	−0.49077413
1	−0.28398668	3.1403294	−2.2970730	−0.47458360
2	0.006600950	2.6666773	−2.4394481	−0.44980146

11. $b = -1, c = -3, d = 1$

13. $B = \frac{1}{4}, D = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{4}$

15. أ. إن معادلة الأخدود هي

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

لكل x في $[x_i, x_{i+1}]$، حيث إن المعاملات معطاة في الجدول الآتي:

x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1.0	− 0.7573593	0.0	− 6.627417
0.25	0.7071068	− 2.0	− 4.970563	6.627417
0.5	0.0	− 3.242641	0.0	6.627417
0.75	− 0.7071068	− 2.0	4.970563	− 6.627417

$\int_0^1 S(x)dx = 0.000000$

b. $S'(0.5) = -3.24264 \quad S''(0.5) = 0.0$

17. إن معادلة الأخدود هي $s(x) = s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$

لكل x في $[x_i, x_{i+1}]$، حيث إن المعاملات معطاة في الجدول الآتي:

x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1.0	0.0	− 5.193321	2.028118
0.25	0.7071068	− 2.216388	− 3.672233	4.896310
0.5	0.0	− 3.134447	0.0	4.896310
0.75	− 0.7071068	− 2.216388	3.672233	2.028118

$\int_0^1 s(x)\,dx = 0.000000$، $s'(0.5) = -3.13445$ و $s''(0.5) = 0.0$.

19. لتكن $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. من الواضح أن f تحقق الخواص (أ)، (ج)، (د)، (هـ) للتعريف (10.3)، وأن f تستوفي نفسها لأي اختيار لـ $x_0, \dots, x_n$. ولما كان الجزء (ii) من الخاصية (هـ) في التعريف (10.3) متحققًا، فإن f يجب أن تكون هي نفسها أخدودها التكعيبي المتسلق. وعلى أي حال فإن $f''(x) = 2c + 6dx$ يمكن أن تكون صفرًا فقط عندما $x = -c/3d$.
وبذلك فمن غير الممكن تحقق الجزء (i) من الخاصية (هـ) في التعريف (10.3) عند x_0 و x_n. ولذلك فلا يمكن أن تكون f أخدودًا تكعيبيًا طبيعيًا.

21. إن تقريب خطية التجزئة إلى f معطاة من خلال

$$F(x) = \begin{cases} 20(e^{0.1} - 1)x + 1, & \text{لكل } x \text{ في } [0, 0.05] \\ 20(e^{0.2} - e^{0.1})x + 2e^{0.1} - e^{0.2}, & \text{لكل } x \text{ في } (0.05, 1] \end{cases}$$

ولدينا $\int_0^{0.1} f(x)\,dx = 0.1107014$ و $\int_0^{0.1} F(x)\,dx = 0.1107936$

25. أ. على $[0, 0.05]$، يكون لدينا $s(x) = 1.000000 + 1.999999x + 1.998302x^2 + 1.401310x^3$

وعلى $(0.05, 0.1]$، يكون لدينا $s(x) = 1.105170 + 2.210340(x - 0.05) + 2.208498(x - 0.05)^2 + 1.548758(x - 0.05)^3$

ب. $\int_0^{0.1} s(x)\,dx = 0.110701$ ج. 1.6×10^{-7}

د. على $[0, 0.05]$، يكون لدينا $S(x) = 1 + 2.04811x + 22.12184x^3$

وعلى $(0.05, 0.1]$، يكون لدينا $S(0.02) = 1.041139$ $(x - 0.05) + 3.318277(x - 0.05)^2 - 22.12184(x - 0.05)^3$.

$S(x) = 1.105171 + 2.214028$ و $S(0.02) = 1.040811$

27.
$$S(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1 + (x - 1)^2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

29. الأخدود له المعادلة

$$s(x) = s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

لكل x في $[x_i, x_{i+1}]$، حيث إن المعاملات معطاة في الجدول الآتي:

x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0	75	−0.659292	0.219764
3	225	76.9779	1.31858	−0.153761
5	383	80.4071	0.396018	−0.177237
8	623	77.9978	−1.19912	0.0799115

يتنبأ الأخدود بموقع $s(10) = 774.84$ ft وسرعة $s'(10) = 74.16$ ft/s. ولتعظيم السرعة، نجد النقطة الحرجة الوحيدة $s'(x)$، ونقارن قيم $s(x)$ عند هذه النقطة ونقاط النهاية. سنجد أن $\max s'(x) = s'(5.7448) = 80.7$ ft/s $= 55.02$ mi/h، إن السرعة 55 mi/h تم أولاً تخطيها عند 5.5 s تقريبًا.

31. إن معادلة الأخدود هي

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

لكل x في $[x_i, x_{i+1}]$، حيث إن المعاملات معطاة في الجدول الآتي:

	العينة 1				العينة 2			
x_i	a_i	b_i	c_i	d_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	6.67	−0.44687	0	0.06176	6.67	1.6629	0	−0.00249
6	17.33	6.2237	1.1118	−0.27099	16.11	1.3943	−0.04477	−0.03251
10	42.67	2.1104	−2.1401	0.28109	18.89	−0.52442	−0.43490	0.05916
13	37.33	−3.1406	0.38974	−0.01411	15.00	−1.5365	0.09756	0.00226
17	30.10	−0.70021	0.22036	−0.02491	10.56	−0.64732	0.12473	−0.01113
20	29.31	−0.05069	−0.00386	0.00016	9.44	−0.19955	0.02453	−0.00102

33. الأخاديد الطبيعية الثلاثة لها معادلات بالصيغة

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

لكل x في $[x_i, x_{i+1}]$، حيث إن قيم المعاملات معطاة في الجدول الآتي:

		الأخدود 1			
i	x_i	$a_i = f(x_i)$	b_i	c_i	d_i
0	1	3.0	0.786	0.0	−0.086
1	2	3.7	0.529	−0.257	0.034
2	5	3.9	−0.086	0.052	0.334
3	6	4.2	1.019	1.053	−0.572
4	7	5.7	1.408	−0.664	0.156
5	8	6.6	0.547	−0.197	0.024
6	10	7.1	0.049	−0.052	−0.003
7	13	6.7	−0.342	−0.078	0.007
8	17	4.5			

الأخدود 2					
d_i	c_i	b_i	$a_i = f(x_i)$	x_i	i
−0.030	0.0	1.106	4.5	17	0
0.025	−0.272	0.289	7.0	20	1
0.204	−0.044	−0.660	6.1	23	2
−0.230	0.567	−0.137	5.6	24	3
−0.089	−0.124	0.306	5.8	25	4
0.314	−0.660	−1.263	5.2	27	5
			4.1	27.7	6

الأخدود 3					
d_i	c_i	b_i	$a_i = f(x_i)$	x_i	i
−0.910	0.0	0.749	4.1	27.7	0
0.116	−0.819	0.503	4.3	28	1
0.157	−0.470	−0.787	4.1	29	2
			3.0	30	3

مجموعة التمارين 3.5 (صفحة 163)

1. أ. $x(t) = -10t^3 + 14t^2 + t, \quad y(t) = -2t^3 + 3t^2 + t$

ب. $x(t) = -10t^3 + 14.5t^2 + 0.5t, \quad y(t) = -3t^3 + 4.5t^2 + 0.5t$

ج. $x(t) = -10t^3 + 14t^2 + t, \quad y(t) = -4t^3 + 5t^2 + t$

د. $x(t) = -10t^3 + 13t^2 + 2t, \quad y(t) = 2t$

3. أ. $x(t) = -11.5t^3 + 15t^2 + 1.5t + 1$ ، $y(t) = -4.25t^3 + 4.5t^2 + 0.75t + 1$

ب. $x(t) = -6.25t^3 + 10.5t^2 + 0.75t + 1$ ، $y(t) = -3.5t^3 + 3t^2 + 1.5t + 1$

ج. لكل t بين $(0, 0)$ و $(4, 6)$، يكون لدينا

$$x(t) = -5t^3 + 7.5t^2 + 1.5t, \quad y(t) = -13.5t^3 + 18t^2 + 1.5t$$

ولكل t بين $(4, 6)$ و $(6, 1)$، يكون لدينا

$$x(t) = -5.5t^3 + 6t^2 + 1.5t + 4, \quad y(t) = 4t^3 - 6t^2 - 3t + 6$$

د. لكل t بين $(0, 0)$ و $(2, 1)$، يكون لدينا

$$x(t) = -5.5t^3 + 6t^2 + 1.5t, \quad y(t) = -0.5t^3 + 1.5t$$

لكل t بين $(2, 1)$ و $(4, 0)$، يكون لدينا

$$x(t) = -4t^3 + 3t^2 + 3t + 2, \quad y(t) = -t^3 + 1$$

ولكل t بين $(4, 0)$ و $(6\ -1)$، يكون لدينا

$$x(t) = -8.5t^3 + 13.5t^2 - 3t + 4, \quad y(t) = -3.25t^3 + 5.25t^2 - 3t$$

5. أ. باستخدام الفرق المنقسم تتابعيًّا نحصل على الجدول الآتي:

			u_0	0
		$3(u_1 - u_0)$	u_0	0
	$u_3 - 3u_1 + 2u_0$	$u_3 - u_0$	u_3	1
$u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$	$2u_3 - 3u_2 + u_0$	$3(u_3 - u_2)$	u_3	1

ولذلك فإن

$$u(t) = u_0 + 3(u_1 - u_0)t + (u_3 - 3u_1 + 2u_0)t^2 + (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0)t^2(t-1)$$
$$= u_0 + 3(u_1 - u_0)t + (-6u_1 + 3u_0 + 3u_2)t^2 + (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0)t^3$$

وبالمثل فإن

$$v(t) = v_0 + 3(v_1 - v_0)t + (3v_2 - 6v_1 + 3v_0)t^2 + (v_3 - 3v_2 + 3v_1 - v_0)t^3$$

ب. باستخدام المعادلة لكثيرات حدود برنستين Bernstein نحصل على

$$u(t) = u_0(1-t)^3 + 3u_1t(1-t)^2 + 3u_2t^2(1-t) + u_3t^3$$
$$= u_0 + 3(u_1 - u_0)t + (3u_2 - 6u_1 + 3u_0)t^2 + (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0)t^3$$

وبالمثل فإن

$$v(t) = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}v_k t^k(1-t)^{3-k} = v_0 + 3(v_1 - v_0)t + (3v_2 - 6v_1 + 3v_0)t^2 + (v_3 - 3v_2 + 3v_1 - v_0)t^3$$

مجموعة التمارين 1.4 (صفحة 176)

1. من معادلة الفرق التتابعي – (الأمامي– الإرجاعي) (1.4)، لدينا التقريبات الآتية:

أ. $f'(0.5) \approx 0.8520,\ f'(0.6) \approx 0.8520,\ f'(0.7) \approx 0.7960$

ب. $f'(0.0) \approx 3.7070,\ f'(0.2) \approx 3.1520,\ f'(0.4) \approx 3.1520$

3. أ.

x	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
0.5	0.0255	0.0282
0.6	0.0267	0.0282
0.7	0.0312	0.0322

ب.

x	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
0.0	0.2930	0.3000
0.2	0.2694	0.2779
0.4	0.2602	0.2779

5. عند نقاط الأطراف للجداول، نستخدم المعادلة (4.4). والتقريبات الأخرى ناتجة من المعادلة (5.4).

أ. $f'(1.1) \approx 17.769705,\ f'(1.2) \approx 22.193635,\ f'(1.3) \approx 27.107350,\ f'(1.4) \approx 32.150850$

ب. $f'(8.1) \approx 3.092050,\ f'(8.3) \approx 3.116150,\ f'(8.5) \approx 3.139975,\ f'(8.7) \approx 3.163525$

ج. $f'(2.9) \approx 5.101375,\ f'(3.0) \approx 6.654785,\ f'(3.1) \approx 8.216330,\ f'(3.2) \approx 9.786010$

د. $f'(2.0) \approx 0.13533150,\ f'(2.1) \approx -0.09989550,\ f'(2.2) \approx -0.3298960,\ f'(2.3) \approx -0.5546700$

7. أ.

x	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
1.1	0.280322	0.359033
1.2	0.147282	0.179517
1.3	0.179874	0.219262
1.4	0.378444	0.438524

ب.

x	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
8.1	0.00018594	0.000020322
8.3	0.00010551	0.000010161
8.5	9.116×10^{-5}	0.000009677
8.7	0.00020197	0.000019355

ج.

x	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
2.9	0.011956	0.0180988
3.0	0.0049251	0.00904938
3.1	0.0004765	0.00493920
3.2	0.0013745	0.00987840

د.

x	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
2.0	0.00252235	0.00410304
2.1	0.00142882	0.00205152
2.2	0.00204851	0.00260034
2.3	0.00437954	0.00520068

9. التقريبات والمعادلات المستخدمة هي

أ. التقريب $f'(2.1) \approx 3.899344$ من المعادلة (7.4)
التقريب $f'(2.2) \approx 2.876876$ من المعادلة (7.4)
التقريب $f'(2.3) \approx 2.249704$ من المعادلة (6.4)
التقريب $f'(2.4) \approx 1.837756$ من المعادلة (6.4)
التقريب $f'(2.5) \approx 1.544210$ من المعادلة (7.4)
التقريب $f'(2.6) \approx 1.355496$ من المعادلة (7.4)

ب. التقريب $f'(-3.0) \approx -5.877358$ من المعادلة (7.4)
التقريب $f'(-2.8) \approx -5.468933$ من المعادلة (7.4)
التقريب $f'(-2.6) \approx -5.059884$ من المعادلة (6.4)
التقريب $f'(-2.4) \approx -4.650223$ من المعادلة (6.4)
التقريب $f'(-2.2) \approx -4.239911$ من المعادلة (7.4)
التقريب $f'(-2.0) \approx -3.828853$ من المعادلة (7.4)

11. أ.

x	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
2.1	0.0242312	0.109271
2.2	0.0105138	0.0386885
2.3	0.0029352	0.0182120
2.4	0.0013262	0.00644808
2.5	0.0138323	0.109271
2.6	0.0064225	0.0386885

ب.

x	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
−3.0	1.55×10^{-5}	6.33×10^{-7}
−2.8	1.32×10^{-5}	6.76×10^{-7}
−2.6	7.95×10^{-7}	1.05×10^{-7}
−2.4	6.79×10^{-7}	1.13×10^{-7}
−2.2	1.28×10^{-5}	6.76×10^{-7}
−2.0	7.96×10^{-6}	6.76×10^{-7}

13. $f'(3) \approx \frac{1}{12}[f(1) - 8f(2) + 8f(4) - f(5)] = 0.21062$ مع حد خطأ وفق الصيغة

$$\max_{1\le x\le 5} \frac{|f^{(5)}(x)|h^4}{30} \le \frac{23}{30} = 0.7\overline{6}$$

15. من معادلة الفرق التتابعي – (الأمامي– الإرجاعي) (1.4)، لدينا التقريبات الآتية:

أ. $f'(0.5) \approx 0.852,\ f'(0.6) \approx 0.852,\ f'(0.7) \approx 0.7960$

ب. $f'(0.0) \approx 3.707,\ f'(0.2) \approx 3.153,\ f'(0.4) \approx 3.153$

17. عند نقاط النهاية للجداول، نستخدم المعادلة (7.4). والتقريبات الأخرى ناتجة من المعادلة (6.4).

أ. $f'(2.1) \approx 3.884 \quad f'(2.2) \approx 2.896 \quad f'(2.3) \approx 2.249 \quad f'(2.4) \approx 1.836 \quad f'(2.5) \approx 1.550 \quad f'(2.6) \approx 1.348$

ب. $f'(-3.0) \approx -5.883 \quad f'(-2.8) \approx -5.467 \quad f'(-2.6) \approx -5.059 \quad f'(-2.4) \approx -4.650 \quad f'(-2.2) \approx -4.208$
$f'(-2.0) \approx -3.875$

19. التقريب هو $f''(0.5) = 0$. حد الخطأ هو 0.35874×10^{-9} -4.8×10^{-9}. الطريقة دقيقة جدًا؛ لأن الدّالة متماثلة حول $x = 0.5$.

21. أ. $f'(0.2) \approx -0.1951027$ ب. $f'(1.0) \approx -1.541415$ ج. $f'(0.6) \approx -0.6824175$

23. $f'(0.4) \approx -0.4249840$ و $f'(0.8) \approx -1.032772$

25. معادلات النقاط الثلاث تعطي النتائج في الجدول الآتي:

الزمن	0	3	5	8	10	13
السرعة	79	82.4	74.2	76.8	69.4	71.2

27. التقريب يصبح صفرًا حتمًا؛ لأن البسط يصبح صفرًا.

29. بما أن $e'(h) = -\varepsilon/h^2 + hM/3$، يكون لدينا $e'(h) = 0$ إذا وفقط إذا كانت $h = \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$. كذلك فإن $e'(h) < 0$ إذا كانت $h < \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$ و $e'(h) > 0$ إذا كانت $h > \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$، ومن ثم فإن أدنى مطلق لـ $e(h)$ يظهر عند $h = \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$.

مجموعة التمارين 2.4 (صفحة 184)

1. أ. $f'(1) \approx 1.0000109$ ب. $f'(0) \approx 2.0000000$ ج. $f'(1.05) \approx 2.2751459$ د. $f'(2.3) \approx -19.646799$

3. أ. $f'(1) \approx 1.001$ ب. $f'(0) \approx 1.999$ ج. $f'(1.05) \approx 2.283$ د. $f'(2.3) \approx -19.61$

5. $\int_0^{\pi} \sin x\, dx \approx 1.999999$

9. ليكن

$$N_2(h) = N\left(\frac{h}{3}\right) + \left(\frac{N\left(\frac{h}{3}\right) - N(h)}{2}\right) \quad \text{و} \quad N_3(h) = N_2\left(\frac{h}{3}\right) + \left(\frac{N_2\left(\frac{h}{3}\right) - N_2(h)}{8}\right)$$

لذلك فإن $N_3(h)$ تقريب $O(h^3)$ إلى M.

11. ليكن $N(h) = (1+h)^{1/h},\ N_2(h) = 2N(h/2) - N(h),\ N_3(h) = N_2(h/2) + \frac{1}{3}(N_2(h/2) - N_2(h))$.

أ. $N(0.04) = 2.665836331,\ N(0.02) = 2.691588029,\ N(0.01) = 2.704813829$.

ب. $N_2(0.04) = 2.717339727,\ N_2(0.02) = 2.718039629$. إن تقريب $O(h^3)$ هو $N_3(0.04) = 2.718272931$.

ج. نعم؛ لكون الأخطاء تبدو متناسبة مع h عند $N(h)$، مع h^2 عند $N_2(h)$، ومع h^3 عند $N_3(h)$.

15. د.

k	4	8	16	32	64	128	256	512
p_k	$2\sqrt{2}$	3.0614675	3.1214452	3.1365485	3.1403312	3.1412723	3.1415138	3.1415729
P_k	4	3.3137085	3.1825979	3.1517249	3.144184	3.1422236	3.1417504	3.1416321

هـ. قيم p_k و P_k معطاة معًا في الجداول الآتية مع نتائج الاستكمال الخارجي:

بالنسبة إلى p_k

2.8284271				
3.0614675	3.1391476			
3.1214452	3.1414377	3.1415904		
3.1365485	3.1415829	3.1415926	3.1415927	
3.1403312	3.1415921	3.1415927	3.1415927	3.1415927

بالنسبة إلى P_k

4				
3.3137085	3.0849447			
3.1825979	3.1388943	3.1424910		
3.1517249	3.1414339	3.1416032	3.1415891	
3.1441184	3.1415829	3.1415928	3 1415926	3.1415927

مجموعة التمارين 3.4 (صفحة 195)

1. إن قاعدة Trapezoidal تعطي التقريبات الآتية:

أ. 0.265625 ب. −0.2678571 ج. −0.17776434 د. 0.1839397

هـ. −0.8666667 و. −0.1777643 ز. 0.2180895 ح. 4.1432597

3.

	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
أ	0.071875	0.125
ب	7.943×10^{-4}	9.718×10^{-4}
ج	0.0358147	0.0396972
د	0.0233369	0.1666667
هـ	0.1326975	0.5617284
و	9.443×10^{-4}	1.0707×10^{-3}
ز	0.0663431	0.0807455
ح	1.554631	2.298827

5. إن قاعدة Simpson تعطي التقريبات الآتية:

أ. 0.1940104 ب. −0.2670635 ج. 0.1922453 د. 0.16240168

هـ. −0.7391053 و. −0.1768216 ز. 0.1513826 ح. 2.5836964

7.

	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
أ	2.604×10^{-4}	2.6042×10^{-4}
ب	7.14×10^{-7}	9.92×10^{-7}
ج	1.406×10^{-5}	2.170×10^{-5}
د	1.7989×10^{-3}	4.1667×10^{-4}
هـ	5.1361×10^{-3}	0.063280
و	1.549×10^{-6}	2.095×10^{-6}
ز	3.6381×10^{-4}	4.1507×10^{-4}
ح	4.9322×10^{-3}	0.1302826

9. إن قاعدة Midpoint تعطي التقريبات الآتية:

أ. 0.1582031 ب. −0.2666667 ج. 0.1743309 د. 0.1516327

هـ. −0.6753247 و. −0.1768200 ز. 0.1180292 ح. 1.8039148

11.

	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
أ	0.0355469	0.0625
ب	3.961×10^{-4}	4.859×10^{-4}
ج	0.0179285	0.0198486
د	8.9701×10^{-3}	0.0833333
هـ	0.0564448	0.2808642
و	4.698×10^{-4}	5.353×10^{-4}
ز	0.0337172	0.0403728
ح	0.7847138	1.1494136

13. $f(1) = \frac{1}{2}$

15. إن رتبة الدقة هي 3.

17. $c_0 = \frac{1}{3},\ c_1 = \frac{4}{3},\ c_2 = \frac{1}{3}$

19. إن $c_0 = \frac{1}{4},\ c_1 = \frac{3}{4},\ x_1 = \frac{2}{3}$ تعطي أعلى رتبة دقة 2.

21. التقريبات الآتية ناتجة من تطبيق المعادلات من (23.4) لغاية (30.4) على التوالي:

أ. 0.1024404, 0.1024598, 0.1024598, 0.1024598, 0.1024695, 0.1024663, 0.1024598, 0.1024598

ب. 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982

ج. 1.497171, 1.477536, 1.477529, 1.477523, 1.467719, 1.470981, 1.477512, 1.477515

د. 4.950000, 2.740909, 2.563393, 2.385700, 1.636364, 1.767857, 2.074893, 2.116379

هـ. 3.293182, 2.407901, 2.359772, 2.314751, 1.965260, 2.048634, 2.233251, 2.249001

و. 0.5000000, 0.6958004, 0.7126032, 0.7306341, 0.7937005, 0.7834709, 0.7611137, 0.7593572

23. الأخطاء في التمرين (22) هي 1.6×10^{-6} ، 5.3×10^{-8} ، -6.7×10^{-7} ، -7.2×10^{-7} و -1.3×10^{-6} على التوالي.

25. إذا كانت $E(x^k) = 0$، لكل $k = 0, 1, \ldots, n$، و $E(x^{n+1}) \neq 0$، فإنه مع $p_{n+1}(x) = x^{n+1}$، يكون لدينا كثيرة حدود من الرتبة $n + 1$ حيث إن $E(p_{n+1}(x)) \neq 0$. افترض أن $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ أي كثيرة حدود من الرتبة أقل أو تساوي n. وبذلك فإن $E(p(x)) = a_n E(x^n) + \cdots + a_1 E(x) + a_0 E(1) = 0$. وبالعكس، إذا كانت $E(p(x)) = 0$ لكل كثيرات حدود من الرتبة أقل أو تساوي n، فإن ذلك يؤدي إلى أن $E(x^k) = 0$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$. افترض أن $p_{n+1}(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_0$ كثيرة حدود من الرتبة $n + 1$ بحيث إن $E(p_{n+1}(x)) \neq 0$. وبما أن $a_{n+1} \neq 0$، يكون لدينا

$$x^{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} p_{n+1}(x) - \frac{a_n}{a_{n+1}} x^n - \cdots - \frac{a_0}{a_{n+1}}$$

ومن ثم فإن

$$E(x^{n+1}) = \frac{1}{a_{n+1}} E(p_{n+1}(x)) - \frac{a_n}{a_{n+1}} E(x^n) - \cdots - \frac{a_0}{a_{n+1}} E(1)$$

$$= \frac{1}{a_{n+1}} E(p_{n+1}(x)) \neq 0$$

ولذلك فإن المعادلة التربيعية لها رتبة دقة n.

مجموعة التمارين 4.4 (صفحة 203)

1. إن تقريبات قاعدة Composite Trapezoidal المركبة هي:

أ. 0.639900 ب. 31.3653 ج. 0.784241 د. −6.42872

هـ. −13.5760 و. 0.476977 ز. 0.605498 ح. 0.970926

3. إن تقريبات قاعدة Composite Simpson المركبة هي:

أ. 0.6363098 ب. 22.47713 ج. 0.7853980 د. −6.274868

هـ. −14.18334 و. 0.4777547 ز. 0.6043941 ح. 0.9610554

5. إن تقريبات قاعدة النقطة الوسطية Composite Midpoint المركبة هي:

أ. 0.633096 ب. 11.1568 ج. 0.786700 د. −6.11274

هـ. −14.9985 و. 0.478751 ز. 0.602961 ح. 0.947868

7. أ. 3.15947567 ب. 3.10933713 ج. 3.00906003

9. $\alpha = 1.5$

11. أ. إن قاعدة Composite Trapezoidal المركبة تتطلب $h < 0.000922295$ و $n \geq 2168$.

ب. إن قاعدة Composite Simpson المركبة تتطلب $h < 0.037658$ و $n \geq 54$.

ج. إن قاعدة النقطة الوسطية Composite Midpoint المركبة تتطلب $h < 0.00065216$ و $n \geq 3066$.

13. أ. إن قاعدة Composite Trapezoidal المركبة تتطلب $h < 0.04382$ و $n \geq 46$. التقريب هو 0.405471.

ب. إن قاعدة Composite Simpson المركبة تتطلب $h < 0.44267$ و $n \geq 6$. التقريب هو 0.405466.

ج. إن قاعدة النقطة الوسطية Composite Midpoint المركبة تتطلب $h < 0.03098$ و $n \geq 64$. التقريب هو 0.405460.

15. أ. بسبب كون النهايات من اليمين ومن اليسار عند 0.1 و 0.2 لـ f و f' و f'' هي نفسها، فإن الدّالات تكون متصلة على $[0, 0.3]$.

وعلى أي حال فإن

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, & 0 \leq x \leq 0.1 \\ 12, & 0.1 < x \leq 0.2 \\ 12, & 0.2 < x \leq 0.3 \end{cases}$$

غير متصلة عند $x = 0.1$.

ب. لدينا 0.302506 مع حد خطأ قدره 1.9×10^{-4}.

ج. لدينا 0.302425، وإن قيمة التكامل الحقيقية هي نفسها.

17. أ. مع قاعدة Composite Trapezoidal المركبة يكون لدينا

$$E(f) = -\frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) = -\frac{h^2}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)h = -\frac{h^2}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)\Delta x_j$$

حيث إن $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = h$ لكل j. وبما أن $\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)\Delta x_j$ هو مجموع ريمان Riemann لـ $\int_a^b f''(x)\,dx = f'(b) - f'(a)$ يكون لدينا

$$E(f) \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

ب. مع قاعدة النقطة الوسطية Composite Midpoint المركبة، يكون لدينا

$$E(f) = \frac{h^3}{3}\sum_{j=1}^{n/2} f''(\xi_j) = \frac{h^2}{6}\sum_{j=1}^{n/2} f''(\xi_j)(2h)$$

ولكن $\sum_{j=1}^{n/2} f''(\xi_j)(2h)$ هو مجموع ريمان Riemann لـ $\int_a^b f''(x)\,dx = f'(b) - f'(a)$، لذلك فإن

$$E(f) \approx \frac{h^2}{6}[f'(b) - f'(a)]$$

19. أ. إن التقدير باستخدام قاعدة Composite Trapezoidal المركبة هو $-\frac{1}{2}h^2 \ln 2 = -6.296 \times 10^{-6}$.

ب. إن التقدير باستخدام قاعدة Composite Simpson المركبة هو $-\frac{1}{240}h^2 = -3.75 \times 10^{-6}$.

ج. إن التقدير باستخدام قاعدة النقطة الوسطية Composite Midpoint المركبة هو $\frac{1}{6}h^2 \ln 2 = 6.932 \times 10^{-6}$

21. الطول 15.8655 تقريبًا.

23. إن قاعدة Composite Simpson المركبة مع $h = 0.25$ تعطي 2.61972s.

25. الطول 58.47082 تقريبًا، باستخدام $n = 100$ في قاعدة Composite Simpson المركبة.

مجموعة التمارين 5.4 (صفحة 211)

1. تكامل رومبرغ Romberg يعطي $R_{3,3}$ بحسب الآتي:

أ. 0.1922593 ب. 0.1606105 ج. −0.1768200 د. 0.08875677

هـ. 2.5879685 و. −0.7341567 ز. 0.6362135 ح. 0.6426970

3. تكامل رومبرغ Romberg يعطي $R_{4,4}$ بحسب الآتي:

أ. 0.1922594 ب. 0.1606028 ج. −0.1768200 د. 0.08875528

هـ. 2.5886272 و. −0.7339728 ز. 0.6362134 ح. 0.6426991

5. يعطي تكامل رومبرغ Romberg:

أ. 0.19225936 عندما $n = 4$ ب. 0.16060279 عندما $n = 5$ ج. −0.17682002 عندما $= 4$ د. 0.088755284 عندما $n = 5$

هـ. 2.5886286 عندما $n = 6$ و. −0.73396918 عندما $n = 6$ ز. 0.63621335 عندما $n = 4$ ح. 0.64269908 عندما $n = 5$

7. $R_{33} = 11.5246$

9. $f(2.5) \approx 0.43459$

11. $R_{31} = 5$

13. لدينا

$$R_{k,2} = \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} = \frac{1}{3}\left[R_{k-1,1} + 2h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2))\,h_{k-1})\right]$$ بالاشتقاق من (32.4)،

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{h_{k-1}}{2}(f(a) + f(b)) + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + ih_{k-1})\right.$$

$$\left. + 2h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2)h_{k-1})\right],$$ بالاشتقاق من (34.4) مع $k-1$ بدلًا من k

$$= \frac{1}{3}\left[h_k(f(a) + f(b)) + 2h_k\sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + 2ih_k) + 4h_k\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i - 1)h)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{M-1} f(a + 2ih) + 4\sum_{i=1}^{M} f(a + (2i - 1)h)\right]$$ حيث $h = h_k$ و $M = 2^{k-2}$

15. المعادلة (32.4) تنتج من

$$R_{k,1} = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k)\right]$$

$$= \frac{h_k}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f\left(a + \frac{i}{2}h_{k-1}\right)\right]$$

$$= \frac{h_k}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_{k-1}) + 2\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2)h_{k-1})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{h_{k-1}}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a+ih_{k-1})\right]+h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a+(i-1/2)h_{k-1})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1}+h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a+(i-1/2)h_{k-1})\right]$$

مجموعة التمارين 6.4 (صفحة 218)

1. تعطي قاعدة سمبسون Simpson:

أ. $S(1, 1.5) = 0.19224530, S(1, 1.25) = 0.039372434, S(1.25, 1.5) = 0.15288602$ والقيمة الحقيقية هي 0.19225935

ب. $S(0, 1) = 0.16240168, S(0, 0.5) = 0.028861071, S(0.5, 1) = 0.13186140$ والقيمة الحقيقية هي 0.16060279

ج. $S(0, 0.35) = -0.17682156, S(0, 0.175) = -0.087724382, S(0.175, 0.35) = -0.089095736$ والقيمة الحقيقية هي -0.17682002.

د. $S(0, \frac{\pi}{4}) = 0.087995669, S(0, \frac{\pi}{8}) = 0.0058315797, S(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}) = 0.082877624$ والقيمة الحقيقية هي 0.088755285

هـ. $S(0, \frac{\pi}{4}) = 2.5836964, S(0, \frac{\pi}{8}) = 0.33088926, S(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}) = 2.2568121$ والقيمة الحقيقية هي 2.5886286

و. $S(1, 1.6) = -0.73910533, S(1, 1.3) = -0.26141244, S(1.3, 1.6) = -0.47305351$ والقيمة الحقيقية هي -0.73396917

ز. $S(3, 3.5) = 0.63623873, S(3, 3.25) = 0.32567095, S(3.25, 3.5) = 0.31054412$ والقيمة الحقيقية هي 0.63621334

ح. $S(0, \frac{\pi}{4}) = 0.64326905, S(0, \frac{\pi}{8}) = 0.37315002, S(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}) = 0.26958270$ والقيمة الحقيقية هي 0.64269908

3. تعطي طريقة التكامل التكييفية Adaptive quadrature:

أ. 108.555281 ب. -1724.966983 ج. -15.306308 د. -18.945949

5.

	قاعدة سمبسون	عدد مرات التقييم	الخطأ	طريقة التكامل التكييفية	عدد مرات التقييم	الخطأ
	-0.21515695	57	6.3×10^{-6}	-0.21515062	229	1.0×10^{-8}
أ.	0.95135226	83	9.6×10^{-6}	0.95134257	217	1.1×10^{-7}
ب.	-6.2831813	41	4.0×10^{-6}	-6.2831852	109	1.1×10^{-7}
ج.	5.8696024	27	2.6×10^{-6}	5.8696044	109	4.0×10^{-9}

7. $\int_0^{2\pi} u(t)\,dt \approx 0.00001$

9. لدينا عند $h = b - a$

$$\left|T(a,b)-T\left(a,\frac{a+b}{2}\right)-T\left(\frac{a+b}{2},b\right)\right| \approx \frac{h^3}{16}|f''(\mu)|$$

و

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-T\left(a,\frac{a+b}{2}\right)-T\left(\frac{a+b}{2},b\right)\right| \approx \frac{h^3}{48}|f''(\mu)|$$

لذلك فإن

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-T\left(a,\frac{a+b}{2}\right)-T\left(\frac{a+b}{2},b\right)\right| \approx \frac{1}{3}\left|T(a,b)-T\left(a,\frac{a+b}{2}\right)-T\left(\frac{a+b}{2},b\right)\right|$$

مجموعة التمارين 7.4 (صفحة 226)

1. تعطي طريقة جاوس التكاملية Gaussian quadrature:

أ. 0.1922687 ب. 0.1594104 ج. -0.1768190 د. 0.08926302

هـ. 2.5913247 و. -0.7307230 ز. 0.6361966 ح. 0.6423172

3. تعطي طريقة جاوس التكاملية Gaussian quadrature:

أ. 0.1922594 ب. 0.1606028 ج. -0.1768200 د. 0.08875529

هـ. 2.5886327 و. -0.7339604 ز. 0.6362133 ح. 0.6426991

5. $a = 1, b = 1, c = \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$

مجموعة التمارين 8.4 (صفحة 239)

1. تعطي الخوارزمية (4.4) عندما تكون $n = m = 4$:

أ. 0.3115733 ب. 0.2552526 ج. 16.50864 د. 1.476684

3. تعطي الخوارزمية (4.4) عندما تكون ($n = 4$ و $m = 8$)، ($n = 8$ و $m = 4$) و ($n = m = 6$):

أ. 0.5119875, 0.5118533, 0.5118722 ب. 1.718857, 1.718220, 1.718385 ج. 1.001953, 1.000122, 1.000386

د. 0.7838542, 0.7833659, 0.7834362 هـ. $-1.985611, -1.999182, -1.997353$ و. 2.004596, 2.000879, 2.000980

ز. 0.3084277, 0.3084562, 0.3084323 ح. $-22.61612, -19.85408, -20.14117$

5. تعطي الخوارزمية (5.4) عندما تكون $n = m = 2$:

أ. 0.3115733 ب. 0.2552446 ج. 16.50863 د. 1.488875

7. تعطي الخوارزمية (4.5) عندما تكون ($n = m = 3$)، ($n = 3$ و $m = 4$)، ($n = 4$ و $m = 3$) و ($n = m = 4$):

أ. $0.5118655, 0.5118445, 0.5118655, 0.5118445, 2.1 \times 10^{-5}, 1.3 \times 10^{-7}, 2.1 \times 10^{-5}, 1.3 \times 10^{-7}$

ب. $1.718163, 1.718302, 1.718139, 1.718277, 1.2 \times 10^{-4}, 2.0 \times 10^{-5}, 1.4 \times 10^{-4}, 4.8 \times 10^{-6}$

ج. 1.000000, 1.000000, 1.0000000, 1.000000, 0, 0, 0, 0

د. 0.7833333, 0.7833333, 0.7833333, 0.7833333, 0, 0, 0, 0

هـ. $-1.991878, -2.000124, -1.991878, -2.000124, 8.1 \times 10^{-3}, 1.2 \times 10^{-4}, 8.1 \times 10^{-3}, 1.2 \times 10^{-4}$

و. $2.001494, 2.000080, 2.001388, 1.999984, 1.5 \times 10^{-3}, 8 \times 10^{-5}, 1.4 \times 10^{-3}, 1.6 \times 10^{-5}$

ز. $0.3084151, 0.3084145, 0.3084246, 0.3084245, 10^{-5}, 5.5 \times 10^{-7}, 1.1 \times 10^{-5}, 6.4 \times 10^{-7}$

ح. $-12.74790, -21.21539, -11.83624, -20.30373, 7.0, 1.5, 7.9, 0.564$

9. الخوارزمية (4.4) عندما تكون $n = m = 14$ تعطي 0.1479103 والخوارزمية (5.4) عندما تكون $n = m = 4$ تعطي 0.1506823

11. تقريب مركز الكتلة هو $(\overline{x}, \overline{y})$ حيث $\overline{x} = 0.3806333$ و $\overline{y} = 0.3822558$

13. المساحة هي 1.0402528 تقريبًا.

15. الخوارزمية (6.4) عندما تكون $n = m = p = 2$ تعطي أول قيمة. القيمة الثانية هي النتيجة الصحيحة:

أ. $5.204036, e(e^{0.5} - 1)(e - 1)^2$ ب. $0.08429784, \frac{1}{12}$ ج. $0.08641975, \frac{1}{14}$

د. $0.09722222, \frac{1}{12}$ هـ. $7.103932, 2 + \frac{1}{2}\pi^2$ و. $1.428074, \frac{1}{2}(e^2 + 1) - e$

17. الخوارزمية (6.4) عندما تكون $n = m = p = 4$ تعطي أول قيمة. القيمة الثانية هي من الخوارزمية (6.4) مع $n = m = p = 5$:

أ. 5.206447, 5.206447 ب. 0.08333333, 0.08333333 ج. 0.07142857, 0.07142857

د. 0.08333333, 0.08333333 هـ. 6.934912, 6.934801 و. 1.476207, 1.476246

19. التقريب 20.41887 يتطلب 125 تقييمًا داليًا.

مجموعة التمارين 9.4 (صفحة 245)

1. تعطي قاعدة سمبسون المركبة Composite Simpson:

أ. 0.5284163 ب. 4.266654 ج. 0.4329748 د. 0.8802210

3. تعطي قاعدة سمبسون المركبة Composite Simpson:

أ. 0.4112649 ب. 0.2440679 ج. 0.05501681 د. 0.2903746

5. سرعة الهروب هي 6.9450 mi/s تقريبًا.

7. أ. $\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, dx \approx 0.8535534 f(0.5857864) + 0.1464466\, f(3.4142136)$

ب. $\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, dx \approx 0.7110930 f(0.4157746) + 0.2785177 f(2.2942804) + 0.0103893 f(6.2899451)$

9. $n = 2: 2.9865139 \quad n = 3: 2.9958198$

مجموعة التمارين 1.5 (صفحة 255)

1. أ. ما دام $f(t, y) = y\cos t$، يكون لدينا $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \cos t$، وتحقق الدّالة f شرط Lipschitz في y
عندما تكون $L = 1$ على $D = \{(t, y)|0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$
كذلك تكون f متصلة على D، لذلك يوجد حل وحيد هو $y(t) = e^{\sin t}$.

ب. ما دام $f(t, y) = (2/t)y + t^2e^t$، يكون لدينا $\frac{\partial f}{\partial y} = 2/t$، وتحقق الدّالة f شرط Lipschitz في y
عندما تكون $L = 2$ على $D = \{(t, y)|1 \le t \le 2, -\infty < y < \infty\}$
كذلك تكون f متصلة على D، لذلك يوجد حل وحيد هو $y(t) = t^2(e^t - e)$.

ج. ما دام $f(t, y) = -(2/t)y + t^2e^t$، يكون لدينا $\frac{\partial f}{\partial y} = -2/t$، وتحقق الدّالة f شرط Lipschitz في y
عندما تكون $L = 2$ على $D = \{(t, y)|1 \le t \le 2, -\infty < y < \infty\}$
كذلك تكون f متصلة على D، لذلك يوجد حل وحيد هو $y(t) = (t^4e^t - 4t^3e^t + 12t^2e^t - 24te^t + 24e^t + (\sqrt{2} - 9)e)/t^2$

د. ما دام $f(t, y) = 4t^3y/(1 + t^4)$، يكون لدينا $\frac{\partial f}{\partial y} = 4t^3/(1 + t^4)$، وتحقق الدّالة f شرط Lipschitz في y
عندما تكون $L = 2$ على $D = \{(t, y)|0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$
كذلك تكون الدّالة f متصلة على D، لذلك يوجد حل وحيد هو $y(t) = 1 + t^4$.

3. أ. ثابت Lipschitz $L = 1$، إنها مسألة ذات عرض جيد.

ب. ثابت Lipschitz $L = 1$، إنها مسألة ذات عرض جيد.

ج. ثابت Lipschitz $L = 1$، إنها مسألة ذات عرض جيد.

د. لا يحقق الدّالة f شرط Lipschitz، ولذلك لا يمكن استخدام النظرية (6.5).

5. أ. تفاضل $y^3t + yt = 2$ يعطي $3y^2y't + y^3 + y't + y = 0$. والحل بالنسبة إلى y' يعطي المعادلة التفاضلية الأصلية، ووضع $t = 1$ و $y = 1$ يحقق الشرط الأصلي. ولتقريب $y(2)$؛ استخدم طريقة نيوتن لحل المعادلة $y^3 + y - 1 = 0$، وهذا يعطي $y(2) \approx 0.6823278$.

ب. تفاضل $y\sin t + t^2e^y + 2y - 1 = 0$ يعطي $y'\sin t + y\cos t + 2te^y + t^2e^yy' + 2y' = 0$. والحل بالنسبة إلى y' يعطي المعادلة التفاضلية الأصلية، ووضع $t = 1$ و $y = 0$ يحقق الشرط الأصلي. ولتقريب $y(2)$؛ استخدم طريقة نيوتن لحل المعادلة $(2 + \sin 2)y + 4e^y - 1 = 0$. هذا يعطي $y(2) \approx -0.4946599$.

7. ليكن (t_1, y_1) و (t_2, y_2) في D، مع $a \le t_1 \le b, a \le t_2 \le b, -\infty < y_1 < \infty$ و $-\infty < y_2 < \infty$. عند $0 \le \lambda \le 1$، يكون لدينا $(1 - \lambda)a \le (1 - \lambda)t_1 \le (1 - \lambda)b$ و $\lambda a \le \lambda t_2 \le \lambda b$. ولذلك فإن $a = (1 - \lambda)a + \lambda a \le (1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2 \le (1 - \lambda)b + \lambda b = b$. كذلك $-\infty < (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 < \infty$، ومن ثم فإن D محدبة.

9. أ. بما أن $y' = f(t, y(t))$، يكون لدينا

$$\int_a^t y'(z)\, dz = \int_a^t f(z, y(z))\, dz$$

ولذلك

$$y(t) - y(a) = \int_a^t f(z, y(z))\, dz \quad \text{و} \quad y(t) = \alpha + \int_a^t f(z, y(z))\, dz$$

تكون طريقة التكرار من خلال هذه المعادلة.

ب. لدينا $y_0(t) = 1,\ y_1(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2,\ y_2(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$ و $y_3(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4$

ج. لدينا $y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{120}t^5 + \cdots$

مجموعة التمارين 2.5 (صفحة 263)

1. تعطي طريقة Euler التقريبات في الجداول الآتية:

أ.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	0.500	0.0000000	0.2836165
2	1.000	1.1204223	3.2190993

ب.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	2.500	2.0000000	1.8333333
2	3.000	2.6250000	2.5000000

ج.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.250	2.7500000	2.7789294
2	1.500	3.5500000	3.6081977
3	1.750	4.3916667	4.4793276
4	2.000	5.2690476	5.3862944

د.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	0.250	1.2500000	1.3291498
2	0.500	1.6398053	1.7304898
3	0.750	2.0242547	2.0414720
4	1.000	2.2364573	2.1179795

3.

أ.

t	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
0.5	0.2836165	11.3938
1.0	2.0986771	42.3654

ب.

t	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
2.5	0.166667	0.429570
3.0	0.125000	1.59726

ج.

t	الخطأ الحقيقي	حد الخطأ
1.25	0.0289294	0.0355032
1.50	0.0581977	0.0810902
1.75	0.0876610	0.139625
2.00	0.117247	0.214785

د.

t	الخطأ الحقيقي
0.25	0.0791498
0.50	0.0906844
0.75	0.0172174
1.00	0.118478

لا يمكن تطبيق صيغة حد الخطأ (5.10) للفقرة (د)، لأن $L = 0$.

5. تعطي طريقة Euler التقريبات في الجداول الآتية:

أ.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	1.200	1.0082645	1.0149523
4	1.400	1.0385147	1.0475339
6	1.600	1.0784611	1.0884327
8	1.800	1.1232621	1.1336536
10	2.000	1.1706516	1.1812322

ب.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	1.400	0.4388889	0.4896817
4	1.800	1.0520380	1.1994386
6	2.200	1.8842608	2.2135018
8	2.600	3.0028372	3.6784753
10	3.000	4.5142774	5.8741000

ج.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	0.400	−1.6080000	−1.6200510
4	0.800	−1.3017370	−1.3359632
6	1.200	−1.1274909	−1.1663454
8	1.600	−1.0491191	−1.0783314
10	2.000	−1.0181518	−1.0359724

د.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	0.2	0.1083333	0.1626265
4	0.4	0.1620833	0.2051118
6	0.6	0.3455208	0.3765957
8	0.8	0.6213802	0.6461052
10	1.0	0.9803451	1.0022460

7. الأخطاء الحقيقية للتقريبات في التمرين (5) مبينة في الجداول الآتية:

أ.

t	الخطأ الحقيقي
1.2	0.0066879
1.5	0.0095942
1.7	0.0102229
2.0	0.0105806

ب.

t	الخطأ الحقيقي
1.4	0.0507928
2.0	0.2240306
2.4	0.4742818
3.0	1.3598226

ج.

t	الخطأ الحقيقي
0.4	0.0120510
1.0	0.0391546
1.4	0.0349030
2.0	0.0178206

د.

t	الخطأ الحقيقي
0.2	0.0542931
0.5	0.0363200
0.7	0.0273054
1.0	0.0219009

9. تعطي طريقة Euler التقريبات في الجدول الآتي:

أ.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.1	0.271828	0.345920
5	1.5	3.18744	3.96767
6	1.6	4.62080	5.70296
9	1.9	11.7480	14.3231
10	2.0	15.3982	18.6831

ب. يعطي الاستكمال الداخلي الخطي التقريبات في الجدول الآتي:

t	التقريب	$y(t)$	الخطأ
1.04	0.108731	0.119986	0.01126
1.55	3.90412	4.78864	0.8845
1.97	14.3031	17.2793	2.976

ج. $h < 0.00064$

11. أ. تعطي طريقة Euler التقريبات الآتية إلى $y(5) = 5.00674$.

	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
w_N	5.00377	5.00515	5.00592

ب. $h = \sqrt{2 \times 10^{-6}} \approx 0.0014142$

13.

أ.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.05	−0.9500000	−0.9523810
2	1.10	−0.9045353	−0.9090909
11	1.55	−0.6263495	−0.6451613
12	1.60	−0.6049486	−0.6250000
19	1.95	−0.4850416	−0.5128205
20	2.00	−0.4712186	−0.5000000

ب. (iii) $y(1.978) \approx -0.4773007$ (ii) $y(1.555) \approx -0.6242094$ (i) $y(1.052) \approx -0.9481814$

ج. $h < 0.029$

15. أ. $h = 10^{-n/2}$.

ب. إن أقل خطأ **Error** هو $10^{-n/2}(e-1) + 5e10^{-n-1}$.

t	$w(h = 0.1)$	$w(h = 0.01)$	$y(t)$	الخطأ ($n = 8$)
0.5	0.40951	0.39499	0.39347	1.5×10^{-4}
1.0	0.65132	0.63397	0.63212	3.1×10^{-4}

17. أ. $p(50) \approx 0.10430 = w_{50}$.

ب. لأن $p(t) = 1 - 0.99e^{-0.002t}$، فإن $p(50) = 0.10421$.

مجموعة التمارين 3.5 (صفحة 271)

.1

أ.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.50	0.12500000	0.28361652
1.00	2.02323897	3.21909932

ب.

t_i	w_i	$y(t_i)$
2.50	1.75000000	1.83333333
3.00	2.42578125	2.50000000

ج.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.25	2.78125000	2.77892944
1.50	3.61250000	3.60819766
1.75	4.48541667	4.47932763
2.00	5.39404762	5.38629436

د.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.25	1.34375000	1.32914981
0.50	1.77218707	1.73048976
0.75	2.11067606	2.04147203
1.00	2.20164395	2.11797955

.3

أ.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.50	0.25781250	0.28361652
1.00	3.05529474	3.21909932

ب.

t_i	w_i	$y(t_i)$
2.50	1.81250000	1.83333333
3.00	2.48591644	2.50000000

ج.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.25	2.77897135	2.77892944
1.50	3.60826562	3.60819766
1.75	4.47941561	4.47932763
2.00	5.38639966	5.38629436

د.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.25	1.32893880	1.32914981
0.50	1.72966730	1.73048976
0.75	2.03993417	2.04147203
1.00	2.11598847	2.11797955

.5

أ.

i	t_i	رتبة 2 w_i	$y(t_i)$
1	1.1	1.214999	1.215886
2	1.2	1.465250	1.467570

ب.

i	t_i	رتبة 2 w_i	$y(t_i)$
1	0.5	0.5000000	0.5158868
2	1.0	1.076858	1.091818

ج.

i	t_i	رتبة 2 w_i	$y(t_i)$
1	1.5	− 2.000000	− 1.500000
2	2.0	− 1.777776	− 1.333333
3	2.5	− 1.585732	− 1.250000
4	3.0	− 1.458882	− 1.200000

د.

i	t_i	رتبة 2 w_i	$y(t_i)$
1	0.25	1.093750	1.087088
2	0.50	1.312319	1.289805
3	0.75	1.538468	1.513490
4	1.0	1.720480	1.701870

.7

أ.

i	t_i	رتبة 4 w_i	$y(t_i)$
1	1.1	1.215883	1.215886
2	1.2	1.467561	1.467570

ب.

i	t_i	رتبة 4 w_i	$y(t_i)$
1	0.5	0.5156250	0.5158868
2	1.0	1.091267	1.091818

ج.

i	t_i	رتبة 4 w_i	$y(t_i)$
1	1.5	− 2.000000	− 1.500000
2	2.0	− 1.679012	− 1.333333
3	2.5	− 1.484493	− 1.250000
4	3.0	− 1.374440	− 1.200000

د.

i	t_i	رتبة 4 w_i	$y(t_i)$
1	0.25	1.086426	1.087088
2	0.50	1.288245	1.289805
3	0.75	1.512576	1.513490
4	1.0	1.701494	1.701870

9. أ. تعطي طريقة تايلور من الرتبة 2 النتائج في الجدول الآتي:

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.1	0.3397852	0.3459199
5	1.5	3.910985	3.967666
6	1.6	5.643081	5.720962
9	1.9	14.15268	14.32308
10	2.0	18.46999	18.68310

ب. يعطي الاستكمال الداخلي الخطي $y(1.04) \approx 0.1359139$, $y(1.55) \approx 4.777033$ و $y(1.97) \approx 17.17480$.
القيم الحقيقية هي $y(1.04) = 0.1199875$, $y(1.55) = 4.788635$, $y(1.97) = 17.27930$.

ج. تعطي طريقة تايلور من الرتبة 4 النتائج في الجدول الآتي:

i	t_i	w_i
1	1.1	0.3459127
5	1.5	3.967603
6	1.6	5.720875
9	1.9	14.32290
10	2.0	18.68287

د. يعطي استكمال هرمايت الداخلي التكعيبي $y(1.04) \approx 0.1199704$, $y(1.55) \approx 4.788527$, $y(1.97) \approx 17.27904$.

11. أ.

i	t_i	رتبة 2	رتبة 4
2	0.2	5.86595	5.86433
5	0.5	2.82145	2.81789
7	0.7	0.84926	0.84455
10	1.0	−2.08606	−2.09015

ب. 0.8 s

مجموعة التمارين 4.5 (صفحة 280)

1. أ.

t	تعديل يولر	$y(t)$
0.5	0.5602111	0.2836165
1.0	5.3014898	3.2190993

ب.

t	تعديل يولر	$y(t)$
2.5	1.8125000	1.8333333
3.0	2.4815531	2.5000000

ج.

t	تعديل يولر	$y(t)$
1.25	2.7750000	2.7789294
1.50	3.6008333	3.6081977
1.75	4.4688294	4.4793276
2.00	5.3728586	5.3862944

د.

t	تعديل يولر	$y(t)$
0.25	1.3199027	1.3291498
0.50	1.7070300	1.7304898
0.75	2.0053560	2.0414720
1.00	2.0770789	2.1179795

3. أ.

	تعديل يولر	
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.2	1.0147137	1.0149523
1.5	1.0669093	1.0672624
1.7	1.1102751	1.1106551
2.0	1.1808345	1.1812322

ب.

	تعديل يولر	
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.4	0.4850495	0.4896817
2.0	1.6384229	1.6612818
2.4	2.8250651	2.8765514
3.0	5.7075699	5.8741000

ج.

	تعديل يولر	
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.4	−1.6229206	−1.6200510
1.0	−1.2442903	−1.2384058
1.4	−1.1200763	−1.1146484
2.0	−1.0391938	−1.0359724

د.

	تعديل يولر	
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.2	0.1742708	0.1626265
0.5	0.2878200	0.2773617
0.7	0.5088359	0.5000658
1.0	1.0096377	1.0022460

.5

أ.

	هيون	
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.50	0.3397852	0.2836165
1.00	3.6968164	3.2190993

ب.

	هيون	
t_i	w_i	$y(t_i)$
2.50	1.7916667	1.8333333
3.00	2.4641747	2.5000000

ج.

	هيون	
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.25	2.7767857	2.7789294
1.50	3.6042017	3.6081977
1.75	4.4736520	4.4793276
2.00	5.3790494	5.3862944

د.

	هيون	
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.25	1.3295717	1.3291498
0.50	1.7310350	1.7304898
0.75	2.0417476	2.0414720
1.00	2.1176975	2.1179795

.7

أ.

	هيون	
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.2	1.0151123	1.0149523
1.5	1.0674528	1.0672624
1.7	1.1108444	1.1106551
2.0	1.1814172	1.1812322

ب.

	هيون	
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.4	0.4858314	0.4896817
2.0	1.6421387	1.6612818
2.4	2.8327728	2.8765514
3.0	5.7286247	5.8741000

ج.

	هيون	
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.4	−1.6205037	−1.6200510
1.0	−1.2415866	−1.2384058
1.4	−1.1183618	−1.1146484
2.0	−1.0385425	−1.0359724

د.

	هيون	
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.2	0.1729167	0.1626265
0.5	0.2858097	0.2773617
0.7	0.5066965	0.5000658
1.0	1.0074357	1.0022460

.9

أ.

t	نقطة المنتصف	$y(t)$
0.5	0.2646250	0.2836165
1.0	3.1300023	3.2190993

ب.

t	نقطة المنتصف	$y(t)$
2.5	1.7812500	1.8333333
3.0	2.4550638	2.5000000

ج.

t	نقطة المنتصف	$y(t)$
1.25	2.7777778	2.7789294
1.50	3.6060606	3.6081977
1.75	4.4763015	4.4793276
2.00	5.3824398	5.3862944

د.

t	نقطة المنتصف	$y(t)$
0.25	1.3337962	1.3291498
0.50	1.7422854	1.7304898
0.75	2.0596374	2.0414720
1.00	2.1385560	2.1179795

.11

أ.

$y(t_i)$	نقطة المنتصف w_i	t_i
1.0149523	1.0153257	1.2
1.0672624	1.0677427	1.5
1.1106551	1.1111478	1.7
1.1812322	1.1817275	2.0

ب.

$y(t_i)$	نقطة المنتصف w_i	t_i
0.4896817	0.4861770	1.4
1.6612818	1.6438889	2.0
2.8765514	2.8364357	2.4
5.8741000	5.7386475	3.0

ج.

$y(t_i)$	نقطة المنتصف w_i	t_i
− 1.6200510	− 1.6192966	0.4
− 1.2384058	− 1.2402470	1.0
− 1.1146484	− 1.1175165	1.4
− 1.0359724	− 1.0382227	2.0

د.

$y(t_i)$	نقطة المنتصف w_i	t_i
0.1626265	0.1722396	0.2
0.2773617	0.2848046	0.5
0.5000658	0.5056268	0.7
1.0022460	1.0063347	1.0

.13

أ.

$y(t_i)$	رونِج – كوتا w_i	t_i
0.2836165	0.2969975	0.5
3.2190993	3.3143118	1.0

ب.

$y(t_i)$	رونج – كوتا w_i	t_i
1.8333333	1.8333234	2.5
2.5000000	2.4999712	3.0

ج.

$y(t_i)$	رونج – كوتا w_i	t_i
2.7789294	2.7789095	1.25
3.6081977	3.6081647	1.50
4.4793276	4.4792846	1.75
5.3862944	5.3862426	2.00

د.

$y(t_i)$	رونِج – كوتا w_i	t_i
1.3291498	1.3291650	0.25
1.7304898	1.7305336	0.50
2.0414720	2.0415436	0.75
2.1179795	2.1180636	1.00

.15

أ.

$y(t_i)$	رونِج – كوتا w_i	t_i
1.0149523	1.0149520	1.2
1.0672624	1.0672620	1.5
1.1106551	1.1106547	1.7
1.1812322	1.1812319	2.0

ب.

$y(t_i)$	رونِج – كوتا w_i	t_i
0.4896817	0.4896842	1.4
1.6612818	1.6612651	2.0
2.8765514	2.8764941	2.4
5.8741000	5.8738386	3.0

ج.

$y(t_i)$	رونِج – كوتا w_i	t_i
− 1.6200510	− 1.6200576	0.4
− 1.2384058	− 1.2384307	1.0
− 1.1146484	− 1.1146769	1.4
− 1.0359724	− 1.0359922	2.0

د.

$y(t_i)$	رونِج – كوتا w_i	t_i
0.1626265	0.1627655	0.2
0.2773617	0.2774767	0.5
0.5000658	0.5001579	0.7
1.0022460	1.0023207	1.0

.17

أ. $1.0221167 \approx y(1.25) = 1.0219569,\ 1.1640347 \approx y(1.93) = 1.1643901$

ب. $1.9086500 \approx y(2.1) = 1.9249616,\ 4.3105913 \approx y(2.75) = 4.3941697$

ج. $-1.1461434 \approx y(1.3) = -1.1382768,\ -1.0454854 \approx y(1.93) = -1.0412665$

د. $0.3271470 \approx y(0.54) = 0.3140018,\ 0.8967073 \approx y(0.94) = 0.8866318$

.19

أ. $1.0225530 \approx y(1.25) = 1.0219569,\ 1.1646155 \approx y(1.93) = 1.1643901$

ب. $1.9132167 \approx y(2.1) = 1.9249616,\ 4.3246152 \approx y(2.75) = 4.3941697$

ج. $-1.1441775 \approx y(1.3) = -1.1382768,\ -1.0447403 \approx y(1.93) = -1.0412665$

د. $0.3251049 \approx y(0.54) = 0.3140018,\ 0.8945125 \approx y(0.94) = 0.8866318$

.21

أ. $1.0227863 \approx y(1.25) = 1.0219569,\ 1.1649247 \approx y(1.93) = 1.1643901$

ب. $1.9153749 \approx y(2.1) = 1.9249616,\ 4.3312939 \approx y(2.75) = 4.3941697$

ج. $-1.1432070 \approx y(1.3) = -1.1382768,\ -1.0443743 \approx y(1.93) = -1.0412665$

د. $0.3240839 \approx y(0.54) = 0.3140018,\ 0.8934152 \approx y(0.94) = 0.8866318$

.23

أ. $1.0223826 \approx y(1.25) = 1.0219569,\ 1.1644292 \approx y(1.93) = 1.1643901$

ب. $1.9373672 \approx y(2.1) = 1.9249616,\ 4.4134745 \approx y(2.75) = 4.3941697$

ج. $-1.1405252 \approx y(1.3) = -1.1382768,\ -1.0420211 \approx y(1.93) = -1.0412665$

د. $0.31716526 \approx y(0.54) = 0.3140018,\ 0.88919730 \approx y(0.94) = 0.8866318$

.25

أ. $1.0219569 = y(1.25) \approx 1.0219550,\ 1.1643902 = y(1.93) \approx 1.1643898$

ب. $1.9249617 = y(2.10) \approx 1.9249217,\ 4.3941697 = y(2.75) \approx 4.3939943$

ج. $-1.138268 = y(1.3) \approx -1.1383036,\ -1.0412666 = y(1.93) \approx -1.0412862$

د. $0.31400184 = y(0.54) \approx 0.31410579,\ 0.88663176 = y(0.94) \approx 0.88670653$

.27 مع $f(t, y) = -y + t + 1$، يكون لدينا

$$w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right) = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))\right]$$
$$= w_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, w_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}hf(t_i, w_i)\right)\right]$$
$$= w_i\left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) + t_i\left(h - \frac{h^2}{2}\right) + h$$

.29 في 0.2 s يكون لدينا 2099 وحدة من KOH.

.31 الثوابت المناسبة هي $\alpha_1 = \delta_1 = \alpha_2 = \delta_2 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \frac{1}{2}$ و $\alpha_3 = \delta_3 = 1$

مجموعة التمارين 5.5 (صفحة 289)

1. تعطي خوارزمية Runge–Kutta–Fehlberg النتائج في الجدول الآتي:

أ.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.2093900	0.0298184	0.2093900	0.0298337
3	0.5610469	0.4016438	0.1777496	0.4016860
5	0.8387744	1.5894061	0.1280905	1.5894600
7	1.0000000	3.2190497	0.0486737	3.2190993

ب.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	2.2500000	1.4499988	0.2500000	1.4500000
2	2.5000000	1.8333332	0.2500000	1.8333333
3	2.7500000	2.1785718	0.2500000	2.1785714
4	3.0000000	2.5000005	0.2500000	2.5000000

ج.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	1.2500000	2.7789299	0.2500000	2.7789294
2	1.5000000	3.6081985	0.2500000	3.6081977
3	1.7500000	4.4793288	0.2500000	4.4793276
4	2.0000000	5.3862958	0.2500000	5.3862944

د.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.2500000	1.3291478	0.2500000	1.3291498
2	0.5000000	1.7304857	0.2500000	1.7304898
3	0.7500000	2.0414669	0.2500000	2.0414720
4	1.0000000	2.1179750	0.2500000	2.1179795

3. تعطي خوارزمية Runge–Kutta–Fehlberg النتائج في الجدول الآتي:

أ.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	1.1101946	1.0051237	0.1101946	1.0051237
5	1.7470584	1.1213948	0.2180472	1.1213947
7	2.3994350	1.2795396	0.3707934	1.2795395
11	4.0000000	1.6762393	0.1014853	1.6762391

ب.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
4	1.5482238	0.7234123	0.1256486	0.7234119
7	1.8847226	1.3851234	0.1073571	1.3851226
10	2.1846024	2.1673514	0.0965027	2.1673499
16	2.6972462	4.1297939	0.0778628	4.1297904
21	3.0000000	5.8741059	0.0195070	5.8741000

ج.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.1633541	− 1.8380836	0.1633541	− 1.8380836
5	0.7585763	− 1.3597623	0.1266248	− 1.3597624
9	1.1930325	− 1.1684827	0.1048224	− 1.1684830
13	1.6229351	− 1.0749509	0.1107510	− 1.0749511
17	2.1074733	− 1.0291158	0.1288897	− 1.0291161
23	3.0000000	− 1.0049450	0.1264618	− 1.0049452

د.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.3986051	0.3108201	0.3986051	0.3108199
3	0.9703970	0.2221189	0.2866710	0.2221186
5	1.5672905	0.1133085	0.3042087	0.1133082
8	2.0000000	0.0543454	0.0902302	0.0543455

5. أ. عدد حالات الإصابة هو $y(30) \approx 80295.7$.

ب. إن القيمة الحدية لعدد حالات الإصابة لهذا النموذج هي $\lim_{t\to\infty} y(t) = 100,000$.

مجموعة التمارين 6.5 (صفحة 301)

1. تعطي طرائق Adams–Bashforth النتائج في الجداول الآتية:

أ.

t	2 خطوة	3 خطوات	4 خطوات	5 خطوات	$y(t)$
0.2	0.0268128	0.0268128	0.0268128	0.0268128	0.0268128
0.4	0.1200522	0.1507778	0.1507778	0.1507778	0.1507778
0.6	0.4153551	0.4613866	0.4960196	0.4960196	0.4960196
0.8	1.1462844	1.2512447	1.2961260	1.3308570	1.3308570
1.0	2.8241683	3.0360680	3.1461400	3.1854002	3.2190993

ب.

t	2 خطوة	3 خطوات	4 خطوات	5 خطوات	$y(t)$
2.2	1.3666667	1.3666667	1.3666667	1.3666667	1.3666667
2.4	1.6750000	1.6857143	1.6857143	1.6857143	1.6857143
2.6	1.9632431	1.9794407	1.9750000	1.9750000	1.9750000
2.8	2.2323184	2.2488759	2.2423065	2.2444444	2.2444444
3.0	2.4884512	2.5051340	2.4980306	2.5011406	2.5000000

ج.

t	2 خطوة	3 خطوات	4 خطوات	5 خطوات	$y(t)$
1.2	2.6187859	2.6187859	2.6187859	2.6187859	2.6187859
1.4	3.2734823	3.2710611	3.2710611	3.2710611	3.2710611
1.6	3.9567107	3.9514231	3.9520058	3.9520058	3.9520058
1.8	4.6647738	4.6569191	4.6582078	4.6580160	4.6580160
2.0	5.3949416	5.3848058	5.3866452	5.3862177	5.3862944

د.

t	2 خطوة	3 خطوات	4 خطوات	5 خطوات	$y(t)$
0.2	1.2529306	1.2529306	1.2529306	1.2529306	1.2529306
0.4	1.5986417	1.5712255	1.5712255	1.5712255	1.5712255
0.6	1.9386951	1.8827238	1.8750869	1.8750869	1.8750869
0.8	2.1766821	2.0844122	2.0698063	2.0789180	2.0789180
1.0	2.2369407	2.1115540	2.0998117	2.1180642	2.1179795

3. تعطي طرائق Adams–Bashforth النتائج في الجداول الآتية:

أ.

t	2 خطوة	3 خطوات	4 خطوات	5 خطوات	$y(t)$
1.2	1.0161982	1.0149520	1.0149520	1.0149520	1.0149523
1.4	1.0497665	1.0468730	1.0477278	1.0475336	1.0475339
1.6	1.0910204	1.0875837	1.0887567	1.0883045	1.0884327
1.8	1.1363845	1.1327465	1.1340093	1.1334967	1.1336536
2.0	1.1840272	1.1803057	1.1815967	1.1810689	1.1812322

ب.

t	2 خطوة	3 خطوات	4 خطوات	5 خطوات	$y(t)$
1.4	0.4867550	0.4896842	0.4896842	0.4896842	0.4896817
1.8	1.1856931	1.1982110	1.1990422	1.1994320	1.1994386
2.2	2.1753785	2.2079987	2.2117448	2.2134792	2.2135018
2.6	3.5849181	3.6617484	3.6733266	3.6777236	3.6784753
3.0	5.6491203	5.8268008	5.8589944	5.8706101	5.8741000

ج.

$y(t)$	5 خطوات	4 خطوات	3 خطوات	2 خطوة	t
− 1.5378828	− 1.5378676	− 1.5379372	− 1.5381988	− 1.5357010	0.5
− 1.2384058	− 1.2383693	− 1.2383734	− 1.2389605	− 1.2374093	1.0
− 1.0948517	− 1.0948481	− 1.0947925	− 1.0950952	− 1.0952910	1.5
− 1.0359724	− 1.0359760	− 1.0359497	− 1.0359996	− 1.0366643	2.0

د.

$y(t)$	5 خطوات	4 خطوات	3 خطوات	2 خطوة	t
0.1626265	0.1627655	0.1627655	0.1627655	0.1739041	0.2
0.2051118	0.2052405	0.2066057	0.2026399	0.2144877	0.4
0.3765957	0.3765206	0.3787680	0.3747011	0.3822803	0.6
0.6461052	0.6471458	0.6487176	0.6452640	0.6491272	0.8
1.0022460	1.0073348	1.0064121	1.0020894	1.0037415	1.0

.5

أ.

$y(t_i)$	w_i	t_i
0.0268128	0.0269059	0.2
0.1507778	0.1510468	0.4
0.4960196	0.4966479	0.6
1.3308570	1.3408657	0.8
3.2190993	3.2450881	1.0

ب.

$y(t_i)$	w_i	t_i
1.3666667	1.3666610	2.2
1.6857143	1.6857079	2.4
1.9750000	1.9749941	2.6
2.2444444	2.2446995	2.8
2.5000000	2.5003083	3.0

ج.

$y(t_i)$	w_i	t_i
2.6187859	2.6187787	1.2
3.2710611	3.2710491	1.4
3.9520058	3.9519900	1.6
4.6580160	4.6579968	1.8
5.3862944	5.3862715	2.0

د.

$y(t_i)$	w_i	t_i
1.2529306	1.2529350	0.2
1.5712255	1.5712383	0.4
1.8750869	1.8751097	0.6
2.0789180	2.0796618	0.8
2.1179795	2.1192575	1.0

.7 تعطي خوارزمية آدمز المصححة – المقدرة من الرتبة 4 Adams Fourth-order Predictor-Corrector Algorithm النتائج في الجداول الآتية :

أ.

t	w	$y(t)$
1.2	1.0149520	1.0149523
1.4	1.0475227	1.0475339
1.6	1.0884141	1.0884327
1.8	1.1336331	1.1336536
2.0	1.1812112	1.1812322

ب.

$y(t)$	w	t
0.4896817	0.4896842	1.4
1.1994386	1.1994245	1.8
2.2135018	2.2134701	2.2
3.6784753	3.6784144	2.6
5.8741000	5.8739518	3.0

ج.

t	w	$y(t)$
0.5	− 1.5378788	− 1.5378828
1.0	− 1.2384134	− 1.2384058
1.5	− 1.0948609	− 1.0948517
2.0	− 1.0359757	− 1.0359724

د.

$y(t)$	w	t
0.1626265	0.1627655	0.2
0.2051118	0.2048557	0.4
0.3765957	0.3762804	0.6
0.6461052	0.6458949	0.8
1.0022460	1.0021372	1.0

.9 أ. عند $h = 0.01$، تعطي طريقة آدمز – مولتون Adams-Moulton من ثلاث خطوات النتائج في الجدول الآتي :

w_i	t_i	i
1.317218	0.1	10
1.784511	0.2	20

ب. ستخفض طريقة نيوتن عدد مرات التكرار لكل خطوة من 3 إلى 2، باستخدام معيار التوقف

$$\left|w_i^{(k)} - w_i^{(k-1)}\right| \le 10^{-6}$$

15. لاشتقاق طريقة ملن Milne؛ نكامل $y'(t) = f(t, y(t))$ على الفترة $[t_{i-3}, t_{i+1}]$ لإيجاد

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-3}) = \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$$

وباستخدام صيغة نيوتن– كوتس Newton–Cotes المفتوحة (29.4)، يكون لدينا

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-3}) = \frac{4h[2f(t_i, y(t_i)) - f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 2f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))]}{3} + \frac{14h^5 f^{(4)}(\xi, y(\xi))}{45}$$

ومعادلة الفرق تصبح

$$w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{h[8f(t_i, w_i) - 4f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 8f(t_{i-2}, w_{i-2})]}{3}$$

مع خطأ تقلص محلي

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{14h^4 y^{(5)}(\xi)}{45}$$

مجموعة التمارين 7.5 (صفحة 307)

1. تعطي خوارزمية آدمز متغيرة سعة الخطوة المصححة – المقدرة Adams Variable Step-Size Predictor-Corrector النتائج في الجداول الآتية:

أ.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.04275596	0.00096891	0.04275596	0.00096887
5	0.22491460	0.03529441	0.05389076	0.03529359
12	0.60214994	0.50174348	0.05389076	0.50171761
17	0.81943926	1.45544317	0.04345786	1.45541453
22	0.99830392	3.19605697	0.03577293	3.19602842
26	1.00000000	3.21912776	0.00042395	3.21909932

ب.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	2.06250000	1.12132350	0.06250000	1.12132353
5	2.31250000	1.55059834	0.06250000	1.55059524
9	2.62471924	2.00923157	0.09360962	2.00922829
13	2.99915773	2.49895243	0.09360962	2.49894707
17	3.00000000	2.50000535	0.00021057	2.50000000

ج.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	1.06250000	2.18941363	0.06250000	2.18941366
4	1.25000000	2.77892931	0.06250000	2.77892944
8	1.85102559	4.84179835	0.15025640	4.84180141
12	2.00000000	5.38629105	0.03724360	5.38629436

د.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.06250000	1.06817960	0.06250000	1.06817960
5	0.31250000	1.42861668	0.06250000	1.42861361
10	0.62500000	1.90768386	0.06250000	1.90767015
13	0.81250000	2.08668486	0.06250000	2.08666541
16	1.00000000	2.11800208	0.06250000	2.11797955

3. إن الجداول الآتية تبين النتائج المتوافقة مع خوارزمية آدمز متغيرة سعة الخطوة المصححة – المقدرة
: Adams Variable Step-Size Predictor-Corrector

أ.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
5	1.10431651	1.00463041	0.02086330	1.00463045
15	1.31294952	1.03196889	0.02086330	1.03196898
25	1.59408142	1.08714711	0.03122028	1.08714722
35	2.00846205	1.18327922	0.04824992	1.18327937
45	2.66272188	1.34525123	0.07278716	1.34525143
52	3.40193112	1.52940900	0.11107035	1.52940924
57	4.00000000	1.67623887	0.12174963	1.67623914

ب.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
5	1.18519603	0.20333499	0.03703921	0.20333497
15	1.55558810	0.73586642	0.03703921	0.73586631
25	1.92598016	1.48072467	0.03703921	1.48072442
35	2.29637222	2.51764797	0.03703921	2.51764743
45	2.65452689	3.92602442	0.03092051	3.92602332
55	2.94341188	5.50206466	0.02584049	5.50206279
61	3.00000000	5.87410206	0.00122679	5.87409998

ج.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
5	0.16854008	−1.83303780	0.03370802	−1.83303783
17	0.64833341	−1.42945306	0.05253230	−1.42945304
27	1.06742915	−1.21150951	0.04190957	−1.21150932
41	1.75380240	−1.05819340	0.06681937	−1.05819325
51	2.50124702	−1.01335240	0.07474446	−1.01335258
61	3.00000000	−1.00494507	0.01257155	−1.00494525

د.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
5	0.28548652	0.32153668	0.05709730	0.32153674
15	0.85645955	0.24281066	0.05709730	0.24281095
20	1.35101725	0.15096743	0.09891154	0.15096772
25	1.66282314	0.09815109	0.06236118	0.09815137
29	1.91226786	0.06418555	0.06236118	0.06418579
33	2.00000000	0.05434530	0.02193303	0.05434551

5. التيار بعد دقيقتين 2 s يكون $i(2) = 8.693$ من الأمبيرات تقريبًا.

مجموعة التمارين 8.5 (صفحة 313)

1. تعطي خوارزمية الاستكمال الداخلي النتائج في الجداول الآتية :

أ.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	0.25	0.04543132	0.25	3	0.04543123
2	0.50	0.28361684	0.25	3	0.28361652
3	0.75	1.05257634	0.25	4	1.05257615
4	1.00	3.21909944	0.25	4	3.21909932

ب.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	2.25	1.44999987	0.25	3	1.45000000
2	2.50	1.83333321	0.25	3	1.83333333
3	2.75	2.17857133	0.25	3	2.17857143
4	3.00	2.49999993	0.25	3	2.50000000

ج.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	1.25	2.77892942	0.25	3	2.77892944
2	1.50	3.60819763	0.25	3	3.60819766
3	1.75	4.47932759	0.25	3	4.47932763
4	2.00	5.38629431	0.25	3	5.38629436

د.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	0.25	1.32914981	0.25	3	1.32914981
2	0.50	1.73048976	0.25	3	1.73048976
3	0.75	2.04147203	0.25	3	2.04147203
4	1.00	2.11797954	0.25	3	2.11797955

3. تعطي خوارزمية الاستكمال الداخلي النتائج في الجداول الآتية:

أ.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	1.50	1.06726237	0.50	4	1.06726235
2	2.00	1.18123223	0.50	3	1.18123222
3	2.50	1.30460372	0.50	3	1.30460371
4	3.00	1.42951608	0.50	3	1.42951607
5	3.50	1.55364771	0.50	3	1.55364770
6	4.00	1.67623915	0.50	3	1.67623914

ب.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	1.50	0.64387537	0.50	4	0.64387533
2	2.00	1.66128182	0.50	5	1.66128176
3	2.50	3.25801550	0.50	5	3.25801536
4	3.00	5.87410027	0.50	5	5.87409998

ج.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	0.50	−1.53788284	0.50	4	−1.53788284
2	1.00	−1.23840584	0.50	5	−1.23840584
3	1.50	−1.09485175	0.50	5	−1.09485175
4	2.00	−1.03597242	0.50	5	−1.03597242
5	2.50	−1.01338570	0.50	5	−1.01338570
6	3.00	−1.00494526	0.50	4	−1.00494525

د.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	0.50	0.29875177	0.50	4	0.29875178
2	1.00	0.21662642	0.50	4	0.21662642
3	1.50	0.12458565	0.50	4	0.12458565
4	2.00	0.05434552	0.50	4	0.05434551

مجموعة التمارين 9.5 (صفحة 322)

1. تعطي خوارزمية رونج–كوتا للأنظمة Runge–Kutta for Systems Algorithm النتائج في الجداول الآتية:

أ.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.200	2.12036583	2.12500839	1.50699185	1.51158743
0.400	4.44122776	4.46511961	3.24224021	3.26598528
0.600	9.73913329	9.83235869	8.16341700	8.25629549
0.800	22.67655977	23.00263945	21.34352778	21.66887674
1.000	55.66118088	56.73748265	56.03050296	57.10536209

ب.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.500	0.95671390	0.95672798	−1.08381950	−1.08383310
1.000	1.30654440	1.30655930	−0.83295364	−0.83296776
1.500	1.34416716	1.34418117	−0.56980329	−0.56981634
2.000	1.14332436	1.14333672	−0.36936318	−0.36937457

ج.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}	w_{3i}	u_{3i}
0.5	0.70787076	0.70828683	−1.24988663	−1.25056425	0.39884862	0.39815702
1.0	−0.33691753	−0.33650854	−3.01764179	−3.01945051	−0.29932294	−0.30116868
1.5	−2.41332734	−2.41345688	−5.40523279	−5.40844686	−0.92346873	−0.92675778
2.0	−5.89479008	−5.89590551	−8.70970537	−8.71450036	−1.32051165	−1.32544426

د.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}	w_{3i}	u_{3i}
0.2	1.38165297	1.38165325	1.00800000	1.00800000	−0.61833075	−0.61833075
0.5	1.90753116	1.90753184	1.12500000	1.12500000	−0.09090565	−0.09090566
0.7	2.25503524	2.25503620	1.34300000	1.34000000	0.26343971	0.26343970
1.0	2.83211921	2.83212056	2.00000000	2.00000000	0.88212058	0.88212056

3. تعطي خوارزمية رونج–كوتا للأنظمة Runge–Kutta for Systems Algorithm النتائج في الجداول الآتية:

أ.

t_i	w_{1i}	y_i
0.200	0.00015352	0.00015350
0.500	0.00742968	0.00743027
0.700	0.03299617	0.03299805
1.000	0.17132224	0.17132880

ب.

t_i	w_{1i}	y_i
1.200	0.96152437	0.96152583
1.500	0.77796897	0.77797237
1.700	0.59373369	0.59373830
2.000	0.27258237	0.27258872

ج.

t_i	w_{1i}	y_i
1.000	3.73162695	3.73170445
2.000	11.31424573	11.31452924
3.000	34.04395688	34.04517155

د.

t_i	w_{1i}	w_{2i}
1.200	0.27273759	0.27273791
1.500	1.08849079	1.08849259
1.700	2.04353207	2.04353642
2.000	4.36156675	4.36157780

5. لتقريب حلِّ النظام من الرتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة أولى $u'_j = f_j(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ لـِ $a \le t \le b, u_j(a) = \alpha_j, j = 1, 2, \ldots, m$ وعند $(n+1)$ من الأعداد متساوية الأبعاد في الفترة $[a, b]$.

المدخلات: نقاط النهاية a, b، عدد المعادلات m، عدد صحيح N، شروط ابتدائية $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

المخرجات: تقريب $w_{i,j}$ إلى $u_j(t_i)$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/N$
2	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $w_{0,j} = \alpha_j$
3	المخرجات $(t_0, w_{0,1}, w_{0,2}, \ldots, w_{0,m})$
4	عند $i = 1, 2, 3$ نفذ الخطوات 5-11.
5	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{1,j} = hf_j(t_{i-1}, w_{i-1,1}, \ldots, w_{i-1,m})$
6	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{2,j} = hf_j\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, w_{i-1,1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{i-1,2} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \ldots, w_{i-1,m} + \frac{1}{2}k_{1,m}\right)$
7	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{3,j} = hf_j\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, w_{i-1,1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{i-1,2} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \ldots, w_{i-1,m} + \frac{1}{2}k_{2,m}\right)$
8	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{4,j} = hf_j(t_{i-1} + h, w_{i-1,1} + k_{3,1}, w_{i-1,2} + k_{3,2}, \ldots, w_{i-1,m} + k_{3,m})$
9	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $w_{i,j} = w_{i-1,j} + (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j})/6$
10	ضع $t_i = a + ih$
11	المخرجات $(t_i, w_{i,1}, w_{i,2}, \ldots, w_{i,m})$
12	عند $i = 4, \ldots, N$ نفذ الخطوات 13-16.
13	ضع $t_i = a + ih$
14	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $w_{i,j}^{(0)} = w_{i-1,j} + h\left[55f_j(t_{i-1}, w_{i-1,1}, \ldots, w_{i-1,m}) - 59f_j(t_{i-2}, w_{i-2,1}, \ldots, w_{i-2,m})\right.$ $\left. + 37f_j(t_{i-3}, w_{i-3,1}, \ldots, w_{i-3,m}) - 9f_j(t_{i-4}, w_{i-4,1}, \ldots, w_{i-4,m})\right]/24$
15	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $w_{i,j} = w_{i-1,j} + h\left[9f_j(t_i, w_{i,1}^{(0)}, \ldots, w_{i,m}^{(0)}) + 19f_j(t_{i-1}, w_{i-1,1}, \ldots, w_{i-1,m})\right.$ $\left. - 5f_j(t_{i-2}, w_{i-2,1}, \ldots, w_{i-2,m}) + f_j(t_{i-3}, w_{i-3,1}, \ldots, w_{i-3,m})\right]/24$
16	المخرجات $(t_i, w_{i,1}, w_{i,2}, \ldots, w_{i,m})$
17	توقف.

7. تعطي طريقة آدمز متغيرة سعة الخطوة المصححة–المقدرة Adams Fourth-Order Predictor-Corrector للأنظمة المطبّقة على مسائل في التمرين (1) النتائج في الجداول الآتية:

أ.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.200	2.12036583	2.12500839	1.50699185	1.51158743
0.400	4.44122776	4.46511961	3.24224021	3.26598528
0.600	9.73913329	9.83235869	8.16341700	8.25629549
0.800	22.52673210	23.00263945	21.20273983	21.66887674
1.000	54.81242211	56.73748265	55.20490157	57.10536209

ب.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.500	0.95675505	0.95672798	−1.08385916	−1.08383310
1.000	1.30659995	1.30655930	−0.83300571	−0.83296776
1.500	1.34420613	1.34418117	−0.56983853	−0.56981634
2.000	1.14334795	1.14333672	−0.36938396	−0.36937457

ج.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}	w_{3i}	u_{3i}
0.5	0.70787076	0.70828683	−1.24988663	−1.25056425	0.39884862	0.39815702
1.0	−0.33691753	−0.33650854	−3.01764179	−3.01945051	−0.29932294	−0.30116868
1.5	−2.41332734	−2.41345688	−5.40523279	−5.40844686	−0.92346873	−0.92675778
2.0	−5.88968402	−5.89590551	−8.72213325	−8.71450036	−1.32972524	−1.32544426

د.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}	w_{3i}	u_{3i}
0.2	1.38165297	1.38165325	1.00800000	1.00800000	−0.61833075	−0.61833075
0.5	1.90752882	1.90753184	1.12500000	1.12500000	−0.09090527	−0.09090566
0.7	2.25503040	2.25503620	1.34300000	1.34300000	0.26344040	0.26343970
1.0	2.83211032	2.83212056	2.00000000	2.00000000	0.88212163	0.88212056

9. إن عدد الفرائس x_{1i} والمفترسين x_{2i} المتنبأ بهما مبين في الجدول الآتي:

i	t_i	x_{1i}	x_{2i}
10	1.0	4393	1512
20	2.0	288	3175
30	3.0	32	2042
40	4.0	25	1258

مجموعة التمارين 10.5 (صفحة 333)

1. ليكن L ثابت Lipschitz لـ ϕ. وبذلك $u_{i+1} - v_{i+1} = u_i - v_i + h[\phi(t_i, u_i, h) - \phi(t_i, v_i, h)]$، ومن ثم فإن

$$|u_{i+1} - v_{i+1}| \leq (1 + hL)|u_i - v_i| \leq (1 + hL)^{i+1}|u_0 - v_0$$

3. من خلال التمرين (31) في الفصل (4.5)، لدينا

$$\begin{aligned}\phi(t, w, h) = {} & \tfrac{1}{6} f(t, w) + \tfrac{1}{3} f\left(t + \tfrac{1}{2}h, w + \tfrac{1}{2}hf(t, w)\right) \\ & + \tfrac{1}{3} f\left(t + \tfrac{1}{2}h, w + \tfrac{1}{2}hf\left(t + \tfrac{1}{2}h, w + \tfrac{1}{2}hf(t, w)\right)\right) \\ & + \tfrac{1}{6} f\left(t + h, w + hf\left(t + \tfrac{1}{2}h, w + \tfrac{1}{2}hf\left(t + \tfrac{1}{2}h, w + \tfrac{1}{2}hf(t, w)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

وبذلك فإن

$$\phi(t, w, 0) = \tfrac{1}{6} f(t, w) + \tfrac{1}{3} f(t, w) + \tfrac{1}{3} f(t, w) + \tfrac{1}{6} f(t, w) = f(t, w)$$

5. أ. إن خطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1} = \frac{1}{4}h^3 y^{(4)}(\xi_i)$، لقيمة ξ محددة، حيث $t_{i-2} < \xi_i < t_{i+1}$.
ب. الطريقة متسقة لكنها غير مستقرة وغير متقاربة.

7. الطريقة غير مستقرة.

مجموعة التمارين 11.5 (صفحة 340)

1. تعطي طريقة ابتدائير Euler النتائج في الجداول الآتية:

أ.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.027182818	0.449328964
0.500	0.000027183	0.030197383
0.700	0.000000272	0.004991594
1.000	0.000000000	0.000335463

ب.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.373333333	0.046105213
0.500	−0.093333333	0.250015133
0.700	0.146666667	0.490000277
1.000	1.333333333	1.000000001

ج.

t_i	w_i	y_i
0.500	16.47925	0.479470939
1.000	256.7930	0.841470987
1.500	4096.142	0.997494987
2.000	65523.12	0.909297427

د.

t_i	w_i	y_i
0.200	6.128259	1.000000001
0.500	−378.2574	1.000000000
0.700	−6052.063	1.000000000
1.000	387332.0	1.000000000

3. تعطي طريقة رونج– كوتا Runge–Kutta من الرتبة 4 النتائج في الجداول الآتية:

أ.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.45881186	0.44932896
0.500	0.03181595	0.03019738
0.700	0.00537013	0.00499159
1.000	0.00037239	0.00033546

ب.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.07925926	0.04610521
0.500	0.25386145	0.25001513
0.700	0.49265127	0.49000028
1.000	1.00250560	1.00000000

ج.

t_i	w_i	y_i
0.500	188.3082	0.47947094
1.000	35296.68	0.84147099
1.500	6632737	0.99749499
2.000	1246413200	0.90929743

د.

t_i	w_i	y_i
0.200	−215.7459	1.00000000
0.500	−555750.0	1.00000000
0.700	−104435653	1.00000000
1.000	−269031268010	1.00000000

5. تعطي خوارزمية Adams Fourth-Order Predictor-Corrector النتائج في الجداول الآتية:

أ.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.4588119	0.4493290
0.500	−0.0112813	0.0301974
0.700	0.0013734	0.0049916
1.000	0.0023604	0.0003355

ب.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.0792593	0.0461052
0.500	0.1554027	0.2500151
0.700	0.5507445	0.4900003
1.000	0.7278557	1.0000000

ج.

t_i	w_i	y_i
.500	188.3082	0.4794709
1.000	38932.03	0.8414710
1.500	9073607	0.9974950
2.000	2115741299	0.9092974

د.

t_i	w_i	y_i
0.200	−215.7459	1.000000001
0.500	−682637.0	1.000000000
0.700	−159172736	1.000000000
1.000	−566751172258	1.000000000

7. تعطي خوارزمية Trapezoidal النتائج في الجداول الآتية:

أ.

t_i	w_i	k	y_i
0.200	0.39109643	2	0.44932896
0.500	0.02134361	2	0.03019738
0.700	0.00307084	2	0.00499159
1.000	0.00016759	2	0.00033546

ب.

t_i	w_i	k	y_i
0.200	0.04000000	2	0.04610521
0.500	0.25000000	2	0.25001513
0.700	0.49000000	2	0.49000028
1.000	1.00000000	2	1.00000000

ج.

t_i	w_i	k	y_i
0.500	0.66291133	2	0.47947094
1.000	0.87506346	2	0.84147099
1.500	1.00366141	2	0.99749499
2.000	0.91053267	2	0.90929743

د.

t_i	w_i	k	y_i
0.200	− 1.07568307	4	1.00000000
0.500	− 0.97868360	4	1.00000000
0.700	− 0.99046408	3	1.00000000
1.000	− 1.00284456	3	1.00000000

9.

أ.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.100	− 96.33011	0.66987648	193.6651	− 0.33491554
0.200	− 28226.32	0.67915383	56453.66	− 0.33957692
0.300	− 8214056	0.69387881	16428113	− 0.34693941
0.400	− 2390290586	0.71354670	4780581173	− 0.35677335
0.500	− 695574560790	0.73768711	1391149121600	− 0.36884355

ب.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.100	0.61095960	0.66987648	− 0.21708179	− 0.33491554
0.200	0.66873489	0.67915383	− 0.31873903	− 0.33957692
0.300	0.69203679	0.69387881	− 0.34325535	− 0.34693941
0.400	0.71322103	0.71354670	− 0.35612202	− 0.35677335
0.500	0.73762953	0.73768711	− 0.36872840	− 0.36884355

11. يعطي استخدام (23.4) $\tau_{i+1} = -\frac{1}{12}y'''(\xi_i)h^2$ لقيم محددة $t_i < \xi_i < t_{i+1}$، ومن خلال التعريف (18.5) فإن طريقة Trapezoidal متسقة. ومرة أخرى عند استخدام (23.4) نحصل على

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{2}[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))] - \frac{y'''(\xi_i)}{12}h^3$$

وبطرح معادلة الفرق واستخدام ثابت Lipschitz L لـ f نحصل على

$$|y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \le |y(t_i) - w_i| + \frac{hL}{2}|y(t_i) - w_i| + \frac{hL}{2}|y(t_{i+1}) - w_{i+1}| + \frac{h^3}{12}|y'''(\xi_i)|$$

وليكن $M = \max_{a\le x\le b}|y'''(x)|$، لذا نفترض $hL \ne 2$

$$|y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \le \frac{2+hL}{2-hL}|y(t_i) - w_i| + \frac{h^3}{6(2-hL)}M$$

وباستخدام المبرهنة (8.5) نحصل على

$$|y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \le e^{2(b-a)L/(2-hL)}\left[\frac{Mh^2}{12L} + |\alpha - w_0|\right] - \frac{Mh^2}{12L}$$

ولذلك إذا كانت $hL \ne 2$، فإن طريقة Trapezoidal تتقارب، ومن ثم فهي مستقرة.

13. ب. تتضمن الجداول الآتية نتائج طريقة ابتدائير التراجعية Backward Euler مطبقة على مسائل التمرين (1).

1أ.

i	t_i	w_i	k	y_i
2	0.20	0.75298666	2	0.44932896
5	0.50	0.10978082	2	0.03019738
7	0.70	0.03041020	2	0.00499159
10	1.00	0.00443362	2	0.00033546

1ب.

i	t_i	w_i	k	y_i
2	0.20	0.08148148	2	0.04610521
5	0.50	0.25635117	2	0.25001513
7	0.70	0.49515013	2	0.49000028
10	1.00	1.00500556	2	1.00000000

1ج.

i	t_i	w_i	k	y_i
2	0.50	0.50495522	2	0.47947094
4	1.00	0.83751817	2	0.84147099
6	1.50	0.99145076	2	0.99749499
8	2.00	0.90337560	2	0.90929743

1د.

i	t_i	w_i	k	y_i
2	0.20	1.00348713	3	1.00000000
5	0.50	1.00000262	2	1.00000000
7	0.70	1.00000002	1	1.00000000
10	1.00	1.00000000	1	1.00000000

15. أ. بتطبيق طريقة Trapezoidal على معادلة الاختبار نحصل على

$$w_{j+1} = \frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}} w_j \quad \text{ومن ثم} \quad Q(h\lambda) = \frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}$$

لذلك فإن $|Q(h\lambda)| < 1$ ما دام $\text{Re}(h\lambda) < 0$.

ب. بتطبيق طريقة Backward Euler على معادلة الاختبار نحصل على

$$w_{j+1} = \frac{w_j}{1-h\lambda} \quad \text{ومن ثم} \quad Q(h\lambda) = \frac{1}{1-h\lambda}$$

لذلك فإن $|Q(h\lambda)| < 1$ ما دام $\text{Re}(h\lambda) < 0$.

مجموعة التمارين 1.6 (صفحة 356)

1. أ. الخطوط المتقاطعة مع الحل $x_1 = x_2 = 1$.

ب. خط واحد، لذلك هناك عدد لانهائي من الحلول مع $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1$.

ج. خط واحد، لذلك هناك عدد لانهائي من الحلول مع $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$.

د. ثلاثة خطوط في المستوى لا تتقاطع عند نقطة مشتركة.

3. أ. $x_1 = 1.0, x_2 = -0.98, x_3 = 2.9$ ب. $x_1 = 1.1, x_2 = -1.1, x_3 = 2.9$

5. تعطي حذف جاوس Gaussian elimination الحلول الآتية:

أ. $x_1 = 1.1875, x_2 = 1.8125, x_3 = 0.875$ مع تطلب تبديل صف واحد.

ب. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ مع عدم تطلب التبديل.

ج. $x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = -1.2, x_4 = 3$ مع عدم تطلب التبديل.
د. لا يوجد حل وحيد.

7. تعطي حذف جاوس Gaussian elimination الحلول الآتية:

أ. $x_1 = -227.0769, x_2 = 476.9231, x_3 = -177.6923$

ب. $x_1 = 1.001291, x_2 = 1, x_3 = 1.00155$

ج. $x_1 = -0.03174600, x_2 = 0.5952377, x_3 = -2.380951, x_4 = 2.777777$

د. $x_1 = 1.918129, x_2 = 1.964912, x_3 = -0.9883041, x_4 = -3.192982, x_5 = -1.134503$

9. أ. عندما $\alpha = -\frac{1}{3}$ لا يوجد حل.
ب. عندما $\alpha = \frac{1}{3}$ هناك عدد لانهائي من الحلول مع $x_1 = x_2 + 1.5$، وإن x_2 محدد.
ج. إذا كان $\alpha \neq \pm\frac{1}{3}$ فإن الحل الوحيد هو

$$x_1 = \frac{3}{2(1+3\alpha)} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-3}{2(1+3\alpha)}$$

13. إن طريقة جاوس–جوردان Gauss–Jordan تعطي النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 0.98, x_2 = -0.98, x_3 = 2.9$ ب. $x_1 = 1.1, x_2 = -1.0, x_3 = 2.9$

15. ب. نتائج هذا التمرين مبينة في الجدول الآتي: (المختصرات M/D و A/S تستخدم في الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح على التوالي).

	جاوس - جوردن		حذف جاوس		
	A/S	M/D	A/S	M/D	n
	12	21	11	17	3
	495	595	375	430	10
	62475	64975	42875	44150	50
	499950	509950	338250	343300	100

17. طريقة Gaussian-Elimination/Gauss–Jordan الهجينة تعطي النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 1.0, x_2 = -0.98, x_3 = 2.9$ ب. $x_1 = 1.0, x_2 = -1.0, x_3 = 2.9$

19. أ. هناك طعام كافٍ لتلبية معدل الاستهلاك اليومي.
ب. نستطيع إضافة 200 من النوع 1، أو 150 من النوع 2، أو 100 من النوع 3، أو 100 من النوع 4.
ج. افترض عدم اختيار أي من الزيادات المذكورة في الفقرة (ب)، يمكن زيادة النوع 2 بـ 650، أو النوع 3 بـ 150، أو النوع 4 بـ 150.
د. افترض عدم اختيار أي من الزيادات المذكورة في الفقرة (ب) أو (ج)، يمكن زيادة النوع 3 بِـ 150، أو النوع 4 بِـ 150.

مجموعة التمارين 2.6 (صفحة 368)

1. أ. دون استبدال. ب. استبدال الصفين 2 و 3.
ج. دون استبدال. د. استبدال الصفين 1 و 2.

3. أ. استبدال الصفين 1 و 2. ب. استبدال الصفين 1 و 3.
ج. استبدال الصفين 1 و 2، ثم استبدال الصفين 2 و 3. د. استبدال الصفين 1 و 2.

5. أ. استبدال الصفين 1 و 3، ثم استبدال الصفين 2 و 3. ب. استبدال الصفين 2 و 3.
ج. استبدال الصفين 2 و 3. د. استبدال الصفين 1 و 3، ثم استبدال الصفين 2 و 3.

7. أ. استبدال الصفين 1 و 2 والعمودين 1 و 3، ثم استبدال الصفين 2 و 3 والعمودين 2 و 3.
ب. استبدال الصفين 1 و 2 والعمودين 1 و 3، ثم استبدال الصفين 2 و 3.

ج. استبدال الصفين 1 و 2 والعمودين 1 و 3، ثم استبدال الصفين 2 و 3.
د. استبدال الصفين 1 و 2 والعمودين 1 و 2، ثم استبدال الصفين 2 و 3 والعمودين 2 و 3.

9. تعطي حذف جاوس Gaussian elimination بحساب قطع لثلاث مراتب النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 30.0, x_2 = 0.990$ ب. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.142$

ج. $x_1 = 0.206, x_2 = 0.0154, x_3 = -0.0156, x_4 = -0.716$ د. $x_1 = 0.828, x_2 = -3.32, x_3 = 0.153, x_4 = 4.91$

11. تعطي حذف جاوس Gaussian elimination بحساب تدوير لثلاث مراتب النتائج الآتية:

أ. $x_1 = -10.0, x_2 = 1.01$ ب. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.143$

ج. $x_1 = 0.185, x_2 = 0.0103, x_3 = -0.0200, x_4 = -1.12$ د. $x_1 = 0.799, x_2 = -3.12, x_3 = 0.151, x_4 = 4.56$

13. تعطي حذف جاوس Gaussian elimination مع مركز دوران جزئي بحساب قطع لثلاث مراتب النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ ب. $x_1 = -0.163, x_2 = 9.98, x_3 = 0.142$

ج. $x_1 = 0.177, x_2 = -0.0072, x_3 = -0.0208, x_4 = -1.18$ د. $x_1 = 0.777, x_2 = -3.10, x_3 = 0.161, x_4 = 4.50$

15. تعطي حذف جاوس Gaussian elimination مع مركز دوران جزئي بحساب تدوير لثلاث مراتب النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ ب. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.143$

ج. $x_1 = 0.178, x_2 = 0.0127, x_3 = -0.0204, x_4 = -1.16$ د. $x_1 = 0.845, x_2 = -3.37, x_3 = 0.182, x_4 = 5.07$

17. تعطي حذف جاوس Gaussian elimination مع مركز دوران موزون جزئي بحساب قطع لثلاث مراتب النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ ب. $x_1 = -0.163, x_2 = 9.98, x_3 = 0.142$

ج. $x_1 = 0.171, x_2 = 0.0102, x_3 = -0.0217, x_4 = -1.27$ د. $x_1 = 0.687, x_2 = -2.66, x_3 = 0.117, x_4 = 3.59$

19. تعطي حذف جاوس Gaussian elimination مع مركز دوران موزون جزئي بحساب تدوير لثلاث مراتب النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ ب. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.143$

ج. $x_1 = 0.180, x_2 = 0.0128, x_3 = -0.0200, x_4 = -1.13$ د. $x_1 = 0.783, x_2 = -3.12, x_3 = 0.147, x_4 = 4.53$

21. استخدام الخوارزمية (1.6) في **Maple** مع Digits:=10 يعطينا:

أ. $x_1 = 10.00000000, x_2 = 1.000000000$ ب. $x_1 = 0.000000033, x_2 = 10.00000001, x_3 = 0.1428571429$

ج. $x_1 = 0.1768252958, x_2 = 0.0126926913, x_3 = -0.0206540503, x_4 = -1.182608714$

د. $x_1 = 0.7883937842, x_2 = -3.125413672, x_3 = 0.1675965951, x_4 = 4.557002521$

23. استخدام الخوارزمية (2.6) في **Maple** مع Digits:=10 يعطينا:

أ. $x_1 = 10.00000000, x_2 = 1.000000000$ ب. $x_1 = 0.000000000, x_2 = 10.00000000, x_3 = 0.1428571429$

ج. $x_1 = 0.1768252975, x_2 = 0.0126926909, x_3 = -0.0206540502, x_4 = -1.182608696$

د. $x_1 = 0.7883937863, x_2 = -3.125413680, x_3 = 0.1675965980, x_4 = 4.557002510$

25. استخدام الخوارزمية (3.6) في **Maple** مع Digits:=10 يعطينا:

أ. $x_1 = 10.00000000, x_2 = 1.000000000$ ب. $x_1 = 0.000000000, x_2 = 10.00000000, x_3 = 0.1428571429$

ج. $x_1 = 0.1768252977, x_2 = 0.0126926909, x_3 = -0.0206540501, x_4 = -1.182608693$

د. $x_1 = 0.7883937842, x_2 = -3.125413672, x_3 = 0.1675965952, x_4 = 4.557002521$

27. أ. $x_1 = 9.98, x_2 = 1.00$ ب. $x_1 = 0.0724, x_2 = 10.0, x_3 = 0.0952$

ج. $x_1 = 0.161, x_2 = 0.0125, x_3 = -0.0232, x_4 = -1.42$ د. $x_1 = 0.719, x_2 = -2.86, x_3 = 0.146, x_4 = 4.00$

29. أ. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ ب. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.143$

ج. $x_1 = 0.179, x_2 = 0.0127, x_3 = -0.0203, x_4 = -1.15$ د. $x_1 = 0.874, x_2 = -3.49, x_3 = 0.192, x_4 = 5.33$

31. فقط لـ (a)، حيث $\alpha = 6$.

33. استخدام خوارزمية مركز الدوران الكامل في **Maple** مع Digits:=10 يعطينا:

أ. $x_1 = 10.00000000, x_2 = 1.000000000$ ب. $x_1 = 0.000000000, x_2 = 10.00000000, x_3 = 0.1428571429$

ج. $x_1 = 0.1768252974, x_2 = 0.01269269087, x_3 = -0.02065405015, x_4 = -1.182608697$

د. $x_1 = 0.7883937840, x_2 = -3.125413669, x_3 = 0.1675965971, x_4 = 4.557002516$

مجموعة التمارين 3.6 (صفحة 378)

1. أ. المصفوفة مفردة. ب. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ ج. المصفوفة مفردة. د. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{28} & -\frac{11}{7} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. حلول الأنظمة الخطية التي وجدت في الفقرتين **(أ)** و **(ب)** من اليسار إلى اليمين $3, -6, -2, -1$ و $1, 1, 1, 1$

5. أ. افترض أن كلاً من $\tilde{A}$ و $\hat{A}$ معكوس للمصفوفة أ. ولذلك $A\tilde{A} = \tilde{A}A = I$ و $A\hat{A} = \hat{A}A = I$. لذلك

$$\tilde{A} = \tilde{A}I = \tilde{A}(A\hat{A}) = (\tilde{A}A)\hat{A} = I\hat{A} = \hat{A}$$

ب. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ و $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$ ولذلك فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ نظرًا لوجود معكوس واحد.

ج. بما أن $A^{-1}A = AA^{-1} = I$، نستنتج أن A^{-1} غير مفردة. ولأن المعكوس وحيد، يكون لدينا $(A^{-1})^{-1} = A$.

7. أ. إذا كان $C = AB$، حيث أ و ب مصفوفتان مثلثيتان سفليان، فإن $a_{ik} = 0$ إذا كان $k > i$ و $b_{kj} = 0$ إذا كان $k < j$. لذلك

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=j}^{i} a_{ik}b_{kj}$$

الذي سيكون له المجموع صفر ما لم يكن $j \le i$. ولذلك فإن ج هي مصفوفة مثلثية سفلية.

ب. لدينا $a_{ik} = 0$ إذا كان $k < i$ و $b_{kj} = 0$ إذا كان $k > j$. الخطوات مماثلة لتلك التي في **(أ)**.

ج. لتكن L مصفوفة مثلثية سفلية غير مفردة. لإيجاد العمود i لـ L^{-1}، حل n من الأنظمة الخطية ذات الصيغة

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{ii} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث يظهر الـ 1 في الموقع i لإيجاد العمود i لـ L^{-1}.

9. الأجوبة مماثلة لما في التمرين (1).

11. أ. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^4 = A, \quad A^5 = A^2, \quad A^6 = I, \ldots$

ب.

	السنة الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
العمر 1	6000	36000	12000	6000
العمر 2	6000	3000	18000	6000
العمر 3	6000	2000	1000	6000

ج. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

العنصر i و j هما عدد الخنافس بالعمر i الضروري لإنتاج خنفساء واحدة بعمر j.

13. أ. لدينا

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(x_0 - x_1) + \alpha_0 + \alpha_1 \\ 3(x_1 - x_0) - \alpha_1 - 2\alpha_0 \\ \alpha_0 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_0 - x_1) + 3\alpha_0 + 3\alpha_1 \\ 3(x_1 - x_0) - 3\alpha_1 - 6\alpha_0 \\ 3\alpha_0 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

ب.

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 2 & \frac{7}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مجموعة التمارين 4.6 (صفحة 386)

1. إن محددات المصفوفات هي:

أ. -8 ب. 14 ج. 0 د. 3

3. الأجوبة مماثلة لما في التمرين (1).

5. $\alpha = -\frac{3}{2}$ و $\alpha = 2$

7. $\alpha = -5$

9. عندما $n = 2$، فإن المحددة $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ تتطلب عمليتي ضرب وطرح. ولأن

$$2! \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k!} = 2 \text{ و } 2! - 1 = 1$$

فإن الصيغة متحققة عند $n = 2$. لنفترض صحة الصيغة عند $n = 2, \ldots, m$، وليكن A مصفوفة $(m+1) \times (m+1)$. لذلك

$$\det A = \sum_{j=1}^{m+1} a_{ij} A_{ij}$$ لكل i حيث $1 \le i \le m+1$. إن حساب كل A_{ij} يتطلب

$$m! \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}$$ من عمليات الضرب و $m! - 1$ من عمليات الجمع/ الطرح.

ولذلك فإن عدد عمليات الضرب لـ $\det A$ هو

$$(m+1)\left[m! \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\right] + (m+1) = (m+1)!\left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{m!}\right] = (m+1)! \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}$$

وعدد عمليات الجمع/ الطرح هو $(m+1)[m! - 1] + m = (m+1)! - 1$. ومن خلال مبدأ الاستنتاج الرياضي، فإن الصيغة متحققة لأي $n \ge 2$.

11. تظهر النتيجة من خلال $\det AB = \det A \cdot \det B$ والنظرية (15.6).

13. أ. إذا كانت D_i محددة المصفوفة المكونة من خلال استبدال العمود i للمصفوفة أ مع ب، وإذا كانت $D = \det A$ فإن $x_i = D_i / D$ عند $i = 1, \ldots, n$.

ب. $(n+1)! \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\right) + n$ من عمليات الضرب/ القسمة و $(n+1)! - n - 1$ من عمليات الجمع/ الطرح.

مجموعة التمارين 5.6 (صفحة 395)

.1 أ. $x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = 1$ ب. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{9}{2}, x_3 = \frac{7}{2}$

.3

أ. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ب. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ج. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ د. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

.5

أ. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 1.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4.5 & 7.5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

ب. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2.106719 & 1 & 0 \\ 3.067193 & 1.197756 & 1 \end{bmatrix}$ و $U = \begin{bmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ 0 & -0.3955257 & -0.4737443 \\ 0 & 0 & -8.939141 \end{bmatrix}$

ج. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1.33333 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

د. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.849190 & 1 & 0 & 0 \\ -0.4596433 & -0.2501219 & 1 & 0 \\ 2.768661 & -0.3079435 & -5.352283 & 1 \end{bmatrix}$ و $U = \begin{bmatrix} 2.175600 & 4.023099 & -2.173199 & 5.196700 \\ 0 & 13.43947 & -4.018660 & 10.80698 \\ 0 & 0 & -0.8929510 & 5.091692 \\ 0 & 0 & 0 & 12.03614 \end{bmatrix}$

.7

أ. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ ب. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

ج. $x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = -1.199998, x_4 = 3$

د. $x_1 = 2.939851, x_2 = 0.07067770, x_3 = 5.677735, x_4 = 4.379812$

.9

أ. $P^t LU = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

ب. $P^t LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $P^t LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

د. $P^t LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

.11 أ.

	الضرب والقسمة	الجمع والطرح
التحليل ضمن LU	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
الحل $Ly = b$	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
الحل $Ux = y$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
المجموع	$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$

ب.

	الضرب والقسمة	الجمع والطرح
التحليل ضمن LU	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
الحل $Ly^{(k)} = b^{(k)}$	$(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n)m$	$(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n)m$
الحل $Ux^{(k)} = y^{(k)}$	$(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n)m$	$(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n)m$
المجموع	$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n$	$\frac{1}{3}n^3 + (m - \frac{1}{2})n^2 - (m - \frac{1}{6})n$

مجموعة التمارين 6.6 (صفحة 409)

1. i. المصفوفة المتماثلة هي فقط (أ).

ii. المصفوفة المفردة هي فقط (ج).

iii. المصفوفتان (أ) و (ب) هما القطريتان بامتياز.

iv. المصفوفة موجبة التحديد هي فقط (أ).

3. أ. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

ب. $L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & -0.45454545 & 1.0 & 0.0 \\ 0.25 & 0.27272727 & 0.076923077 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.75 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.1818182 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5384615 \end{bmatrix}$

ج. $L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.25 & -0.27272727 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.44 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.75 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4.5454545 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.12 \end{bmatrix}$

د. $L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.33333333 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.16666667 & 0.2 & 1.0 & 0.0 \\ -0.16666667 & 0.1 & -0.24324324 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 6.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.3333333 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 3.7 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.5810811 \end{bmatrix}$

5. إن خوارزمية شولسكي Choleski's Algorithm تعطي النتائج الآتية:

أ. $L = \begin{bmatrix} 1.414213 & 0 & 0 \\ -0.7071069 & 1.224743 & 0 \\ 0 & -0.8164972 & 1.154699 \end{bmatrix}$

ب. $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.658311 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.7537785 & 1.087113 & 0 \\ 0.5 & 0.4522671 & 0.08362442 & 1.240346 \end{bmatrix}$

ج. $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.658311 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.4522671 & 2.132006 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9380833 & 1.766351 \end{bmatrix}$

د. $L = \begin{bmatrix} 2.449489 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8164966 & 1.825741 & 0 & 0 \\ 0.4082483 & 0.3651483 & 1.923538 & 0 \\ -0.4082483 & 0.1825741 & -0.4678876 & 1.606574 \end{bmatrix}$

7. إن خوارزمية التحليل المعدلة The modified factorization algorithm تعطي النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$

ب. $x_1 = 0.2, x_2 = -0.2, x_3 = -0.2, x_4 = 0.25$

ج. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 2$

د. $x_1 = -0.8586387, x_2 = 2.418848,$
$x_3 = -0.9581152, x_4 = -1.272251$

9. إن خوارزمية شولسكي المعدلة The modified Choleski's Algorithm تعطي النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$

ب. $x_1 = 0.2, x_2 = -0.2, x_3 = -0.2, x_4 = 0.25$

ج. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 2$

د. $x_1 = -0.85863874, x_2 = 2.4188482,$
$x_3 = -0.95811518, x_4 = -1.2722513$

11. إن خوارزمية تحليل كراوت Crout Factorization Algorithm تعطي النتائج الآتية:

أ. $x_1 = 0.5,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 1$ ب. $x_1 = -0.9999995,\ x_2 = 1.999999,\ x_3 = 1$

ج. $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0$ د. $x_1 = -0.09357798,\ x_2 = 1.587156,$ $x_3 = -1.167431,\ x_4 = 0.5412844$

13. لدينا $x_i = 1$ لكل $i = 1,\dots,\ 10$

15. المصفوفة في (د) فقط موجبة التحديد.

17. $-2 < \alpha < \frac{3}{2}$

19. $0 < \beta < 1$ و $3 < \alpha < 5 - \beta$

21. أ. كلا، وعلى سبيل المثال افترض $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ب. نعم؛ لأن $A = A^t$.

ج. نعم؛ لأن $\mathbf{x}^t(A+B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^tA\mathbf{x} + \mathbf{x}^tB\mathbf{x}$.

د. نعم؛ لأن $\mathbf{x}^tA^2\mathbf{x} = \mathbf{x}^tA^tA\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^t(A\mathbf{x}) \geq 0$ ولكون A غير منفردة، وتتحقق المساواة فقط إذا كانت $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

هـ. كلا، وعلى سبيل المثال افترض $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$.

23. أ. بما أن $\det A = 3\alpha - 2\beta$، فإن A منفردة إذا وفقط إذا كانت $\alpha = 2\beta/3$. ج. $\beta = 1$

ب. $|\alpha| > 1, |\beta| < 1$

25. أحد الأمثلة على ذلك هو $A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 \\ 0.1 & 1.0 \end{bmatrix}$.

27. إن خوارزمية كراوت التحليلية Crout Factorization يمكن إعادة كتابتها على النحو الآتي:

الخطوة	المضمون
1	ضع $l_1 = a_1;\ u_1 = c_1/l_1$
2	عند $i = 2,\dots,\ n-1$ ضع $l_i = a_i - b_iu_{i-1};\ u_i = c_i/l_i$
3	ضع $l_n = a_n - b_nu_{n-1}$
4	ضع $z_1 = d_1/l_1$
5	عند $i = 2,\dots,\ n$ ضع $z_i = (d_i - b_iz_{i-1})/l_i$
6	ضع $x_n = z_n$
7	عند $i = n-1,\dots,\ 1$ ضع $x_i = z_i - u_ix_{i+1}$
8	المخرجات $(x_1,\dots,\ x_n)$ توقف.

29. $i_1 = 0.6785047,\quad i_2 = 0.4214953,\quad i_3 = 0.2570093,\quad i_4 = 0.1542056,\quad i_5 = 0.1028037$

31. أ. تزاوج الذكر i مع الأنثى j ينتج صغيرًا بنفس صفات الجناح في حالة زواج أنثى i مع ذكر j.

ب. كلا، افترض على سبيل المثال $\mathbf{x} = (1, 0, -1)^t$.

مجموعة التمارين 1.7 (صفحة 427)

1. أ. لدينا $\|\mathbf{x}\|_\infty = 4$ و $\|\mathbf{x}\|_2 = 5.220153$

ب. لدينا $\|\mathbf{x}\|_\infty = 4$ و $\|\mathbf{x}\|_2 = 5.477226$

ج. لدينا $\|\mathbf{x}\|_\infty = 2^k$ و $\|\mathbf{x}\|_2 = (1 + 4^k)^{1/2}$

د. لدينا $\|\mathbf{x}\|_\infty = 4/(k+1)$ و $\|\mathbf{x}\|_2 = (16/(k+1)^2 + 4/k^4 + k^4e^{-2k})^{1/2}$

3. أ. لدينا $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = (0, 0, 0)^t$ ب. لدينا $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = (0, 1, 3)^t$

ج. لدينا $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = (0, 0, \frac{1}{2})^t$ د. لدينا $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = (1, -1, 1)^t$

5. أ. لدينا $\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|_\infty = 8.57\times 10^{-4}$ و $\|A\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\|_\infty = 2.06\times 10^{-4}$

ب. لدينا $\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|_\infty = 0.90$ و $\|A\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\|_\infty = 0.27$

ج. لدينا $\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|_\infty = 0.5$ و $\|A\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\|_\infty = 0.3$

د. لدينا $\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|_\infty = 6.55\times 10^{-2}$ و $\|A\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\|_\infty = 0.32$

7. ليكن $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$. لذلك $\|AB\|_\infty = 2$، لكن $\|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty = 1$.

9. ب. يكون لدينا

4أ. $\|A\|_F = \sqrt{326}$

4ب. $\|A\|_F = \sqrt{326}$

4ج. $\|A\|_F = 4$

4د. $\|A\|_F = \sqrt{148}$

مجموعة التمارين 2.7 (صفحة 435)

1. أ. للقيمة المميزة $\lambda_1 = 3$ متجه مميز $\mathbf{x}_1 = (1,-1)^t$ وللقيمة المميزة $\lambda_2 = 1$ متجه مميز $\mathbf{x}_2 = (1,1)^t$.

ب. للقيمة المميزة $\lambda_1 = (1+\sqrt{5})/2$ متجه مميز

$$\mathbf{x} = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

وللقيمة المميزة $\lambda_2 = (1-\sqrt{5})/2$ متجه مميز

$$\mathbf{x} = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

ج. للقيمة المميزة $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ متجه مميز $\mathbf{x}_1 = (1,1)^t$ وللقيمة المميزة $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ متجه مميز $\mathbf{x}_2 = (1,-1)^t$.

د. للقيمة المميزة $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ متجهان مميزان $\mathbf{x}_1 = (0,0,1)^t$ و $\mathbf{x}_2 = (1,1,0)^t$ وللقيمة المميزة $\lambda_3 = 1$ متجه مميز $\mathbf{x}_3 = (1,-1,0)^t$

هـ. للقيمة المميزة $\lambda_1 = 7$ متجه مميز $\mathbf{x}_1 = (1,4,4)^t$، وللقيمة المميزة $\lambda_2 = 3$ متجه مميز $\mathbf{x}_2 = (1,2,0)^t$، وللقيمة المميزة $\lambda_3 = -1$ متجه مميز $\mathbf{x}_3 = (1,0,0)^t$.

و. للقيمة المميزة $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ متجهان مميزان $\mathbf{x}_1 = (-1,1,0)^t$ و $\mathbf{x}_2 = (-1,0,1)^t$ وللقيمة المميزة $\lambda_3 = 5$ متجه مميز $\mathbf{x}_3 = (1,2,1)^t$

3. أ. 3 ب. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ج. $\frac{1}{2}$ د. 3 هـ. 7 و. 5

5. المصفوفة في 3(c) فقط متقاربة.

7. أ. 3 ب. 1.618034 ج. 0.5 د. 3 هـ. 8.224257 و. 5.203527

9. بما أن

$$A_1^k = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{2^k-1}{2^{k+1}} & 2^{-k}\end{bmatrix}، \text{ يكون لدينا } \lim_{k\to\infty} A_1^k = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$\text{كذلك } A_2^k = \begin{bmatrix}2^{-k} & 0\\ \frac{16k}{2^{k-1}} & 2^{-k}\end{bmatrix}، \text{ لذلك } \lim_{k\to\infty} A_2^k = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

11. لتكن A عبارة عن مصفوفة $n\times n$. ويعطينا التوسع عبر الصف الأول كثيرة حدود الخاصية

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) M_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}$$

المحددات M_{1j} هي ذات الصيغة

$$M_{1j} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,j-1} - \lambda & a_{j-1,j+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,j-1} & a_{j,j+1} & \cdots & a_{j,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,j-1} & a_{j+1,j+1} - \lambda & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

عند n ,…,$j = 2$. لاحظ أن كل M_{1j} لها $n - 2$ من العناصر بالصيغة $a_{ii} - \lambda$. لذلك

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) M_{11} + \text{(حدود بدرجة } n-2 \text{ أو أقل)}$$

وبما أن

$$M_{11} = \det \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

على صيغة $\det(A - \lambda I)$ نفسها، لذلك فإن الحجة نفسها يمكن تكرار تطبيقها لتحديد

$$p(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + \text{(حدود بدرجة } n-2 \text{ أو أقل في } \lambda\text{)}$$

ولذلك فإن $p(\lambda)$ كثيرة حدود بدرجة n.

13. أ. $\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^t) = \det(A^t - \lambda I)$

ب. إذا كانت $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ فإن $A^2\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$، ومن خلال الاستنتاج، فإن $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$.

ج. إذا كانت $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ و A^{-1} موجودة فإن $\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$. ومن خلال التمرين 8 (ب)، فإن $\lambda \neq 0$ ولذلك فإن $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$.

د. بما أن $A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$، يكون لدينا $(A^{-1})^2\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{x}$. ويعطينا الاستنتاج الرياضي

$$(A^{-1})^k\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda^k}\mathbf{x}$$

هـ. إذا كان $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ فإن

$$q(A)\mathbf{x} = q_0\mathbf{x} + q_1 A\mathbf{x} + \cdots + q_k A^k\mathbf{x} = q_0\mathbf{x} + q_1\lambda\mathbf{x} + \cdots + q_k\lambda^k\mathbf{x} = q(\lambda)\,\mathbf{x}$$

و. لتكن $A - \alpha I$ غير منفردة. وبما أن $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$، فإن

$$(A - \alpha I)\mathbf{x} = A\mathbf{x} - \alpha I\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = (\lambda - \alpha)\mathbf{x}$$

ولذلك فإن $(A - \alpha I)^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda - \alpha}\mathbf{x}$.

15. أ. لدينا القيمة المميزة الحقيقية $\lambda = 1$ مع المتجه المميز $\mathbf{x} = (6, 3, 1)^t$

ب. اختر أي مضروب للمتجه $(6, 3, 1)^t$.

17. ليكن $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$، وبذلك فإن $\|\mathbf{x}\|\|A\| \le \|A\mathbf{x}\| = \|\lambda\|\|\mathbf{x}\|$ يعطي $|\lambda| \le \|A\|$. كذلك $(1/\lambda)\,\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$، ولذلك فإن $1/|\lambda| \le \|A^{-1}\|$ و $\|A^{-1}\|^{-1} \le |\lambda|$.

مجموعة التمارين 3.7 (صفحة 449)

1. يعطي تكراران لطريقة جاكوبي Jacobi النتائج الآتية:

أ. $(0.1428571, -0.3571429, 0.4285714)^t$ ب. $(0.97, 0.91, 0.74)^t$

ج. $(-0.65, 1.65, -0.4, -2.475)^t$ د. $(1.325, -1.6, 1.6, 1.675, 2.425)^t$

3. يعطي تكراران لطريقة جاوس- سيدل Gauss–Seidel النتائج الآتية:

أ. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.1111111, -0.2222222, 0.6190476)^t$ ب. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.979, 0.9495, 0.7899)^t$

ج. $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.5, 2.64, -0.336875, -2.267375)^t$ د. $\mathbf{x}^{(2)} = (1.189063, -1.521354, 1.862396, 1.882526, 2.255645)^t$

5. تعطي خوارزمية جاكوبي Jacobi النتائج الآتية:

أ. $\mathbf{x}^{(10)} = (0.03507839, -0.2369262, 0.6578015)^t$ ب. $\mathbf{x}^{(6)} = (0.9957250, 0.9577750, 0.7914500)^t$

ج. $\mathbf{x}^{(22)} = (-0.7975853, 2.794795, -0.2588888, -2.251879)^t$ د. $\mathbf{x}^{(12)} = (0.7870883, -1.003036, 1.866048, 1.912449, 1.985707)^t$

7. تعطي خوارزمية جاوس- سيدل Gauss–Seidel النتائج الآتية:

أ. $\mathbf{x}^{(6)} = (0.03535107, -0.2367886, 0.6577590)^t$ ب. $\mathbf{x}^{(4)} = (0.9957475, 0.9578738, 0.7915748)^t$

ج. $\mathbf{x}^{(10)} = (-0.7973091, 2.794982, -0.2589884, -2.251798)^t$ د. $\mathbf{x}^{(7)} = (0.7866825, -1.002719, 1.866283, 1.912562, 1.989790)^t$

9. يعطي تكراران لطريقة SOR النتائج الآتية:

أ. $(0.05410079, -0.2115435, 0.6477159)^t$ ب. $(0.9876790, 0.9784935, 0.7899328)^t$

ج. $(-0.71885, 2.818822, -0.2809726, -2.235422)^t$ د. $(1.079675, -1.260654, 2.042489, 1.995373, 2.049536)^t$

11. يعطي تكراران لطريقة SOR مع $\omega = 1.3$ النتائج الآتية:

أ. $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.1040103, -0.1331814, 0.6774997)^t$ ب. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.957073, 0.9903875, 0.7206569)^t$

ج. $\mathbf{x}^{(2)} = (-1.23695, 3.228752, -0.1523888, -2.041266)^t$ د. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.7064258, -0.4103876, 2.417063, 2.251955, 1.061507)^t$

13. تعطي خوارزمية SOR النتائج الآتية:

أ. $\mathbf{x}^{(12)} = (0.03488469, -0.2366474, 0.6579013)^t$ ب. $\mathbf{x}^{(7)} = (0.9958341, 0.9579041, 0.7915756)^t$

ج. $\mathbf{x}^{(8)} = (-0.7976009, 2.795288, -0.2588293, -2.251768)^t$ د. $\mathbf{x}^{(10)} = (0.7866310, -1.002807, 1.866530, 1.912645, 1.989792)^t$

15. المصفوفات الثلاثية الأقطار هي في الفقرتين (ب) و (ج).

(9ب): عند $\omega = 1.012823$، يكون لدينا $\mathbf{x}^{(4)} = (0.9957846, 0.9578935, 0.7915788)^t$

(9ج): عند $\omega = 1.153499$، يكون لدينا $\mathbf{x}^{(7)} = (-0.7977651, 2.795343, -0.2588021, -2.251760)^t$

17. أ.

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det(\lambda I - T_j) = \lambda^3 + \frac{5}{4}x$$

ولذلك فإن القيم المميزة لـ T_j هي 0 و $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$ ، ولذلك فإن $\rho(T_j) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

ب. $\mathbf{x}^{(25)} = (-20.827873, 2.0000000, -22.827873)^t$

ج. $T_g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $\det(\lambda I - T_g) = \lambda\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2$. ولذلك فإن القيم المميزة لِـ T_g هي $0, -\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$، و إن $\rho(T_g) = \frac{1}{2}$.

د. $\mathbf{x}^{(23)} = (1.0000023, 1.9999975, -1.0000001)^t$ وهي ضمن 10^{-5} في معيار l_∞.

19. أ. المصفوفة A هي قطرية بامتياز.

ب. $T_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \\ -1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$ و $\rho(T_j) = 0.97210521$. وبما أن T_j متقاربة، فإن طريقة جاكوبي Jacobi ستتقارب.

ج. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, $\mathbf{x}^{(187)} = (0.90222655, -0.79595242, 0.69281316)^t$.

د. $\rho(T_j) = 1.39331779371$ وبما أن T_j غير متقاربة، فإن طريقة جاكوبي Jacobi لن تتقارب.

21. أ. اطرح $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ من $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ لإيجاد $\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} = T(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x})$. وبذلك فإن

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \le \|T\|\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}\|$$

بالاستنتاج يكون لدينا

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \le \|T\|^k\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|$$

وبقية البرهان مماثل لبرهان النتيجة (5.2).

ب. العمود الأخير خالٍ من العناصر عندما $\|T\|_\infty = 1$.

	$\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|T\|_\infty$	$\|T\|_\infty^2\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\dfrac{\|T\|_\infty^2}{1 - \|T\|_\infty}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty$
1 (a)	0.22932	0.857143	0.48335	2.9388
1 (b)	0.051579	0.3	0.089621	0.11571
1 (c)	1.1453	0.9	2.2642	20.25
1 (d)	0.27511	1	0.75342	
1 (e)	0.59743	1	1.9897	
1 (f)	0.875	0.75	1.125	3.375

23. لتكن $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ القيم المميزة لـ T_ω. لذلك

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i &= \det T_\omega = \det\left((D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]\right) \\ &= \det(D - \omega L)^{-1}\det((1-\omega)D + \omega U) = \det\left(D^{-1}\right)\det((1-\omega)D) \\ &= \left(\frac{1}{(a_{11}a_{22}\ldots a_{nn})}\right)((1-\omega)^n a_{11}a_{22}\ldots a_{nn})) = (1-\omega)^n.\end{aligned}$$

وبذلك فإن

$$\rho(T_\omega) = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i| \ge |\omega - 1|$$

وإن $|\omega - 1| < 1$ إذا وفقط إذا $0 < \omega < 2$.

.25

	Jacobi 33 تكرارًا	Gauss–Seidel 8 تكرارات	SOR ($\omega = 1.2$) 13 تكرارًا
x_1	1.53873501	1.53873270	1.53873549
x_2	0.73142167	0.73141966	0.73142226
x_3	0.10797136	0.10796931	0.10797063
x_4	0.17328530	0.17328340	0.17328480
x_5	0.04055865	0.04055595	0.04055737
x_6	0.08525019	0.08524787	0.08524925
x_7	0.16645040	0.16644711	0.16644868
x_8	0.12198156	0.12197878	0.12198026
x_9	0.10125265	0.10124911	0.10125043
x_{10}	0.09045966	0.09045662	0.09045793
x_{11}	0.07203172	0.07202785	0.07202912
x_{12}	0.07026597	0.07026266	0.07026392
x_{13}	0.06875835	0.06875421	0.06875546
x_{14}	0.06324659	0.06324307	0.06324429
x_{15}	0.05971510	0.05971083	0.05971200
x_{16}	0.05571199	0.05570834	0.05570949
x_{17}	0.05187851	0.05187416	0.05187529
x_{18}	0.04924911	0.04924537	0.04924648
x_{19}	0.04678213	0.04677776	0.04677885
x_{20}	0.04448679	0.04448303	0.04448409
x_{21}	0.04246924	0.04246493	0.04246597
x_{22}	0.04053818	0.04053444	0.04053546
x_{23}	0.03877273	0.03876852	0.03876952
x_{24}	0.03718190	0.03717822	0.03717920
x_{25}	0.03570858	0.03570451	0.03570548
x_{26}	0.03435107	0.03434748	0.03434844
x_{27}	0.03309542	0.03309152	0.03309246
x_{28}	0.03192212	0.03191866	0.03191958
x_{29}	0.03083007	0.03082637	0.03082727
x_{30}	0.02980997	0.02980666	0.02980755
x_{31}	0.02885510	0.02885160	0.02885248
x_{32}	0.02795937	0.02795621	0.02795707
x_{33}	0.02711787	0.02711458	0.02711543
x_{34}	0.02632478	0.02632179	0.02632262
x_{35}	0.02557705	0.02557397	0.02557479
x_{36}	0.02487017	0.02486733	0.02486814
x_{37}	0.02420147	0.02419858	0.02419938
x_{38}	0.02356750	0.02356482	0.02356560
x_{39}	0.02296603	0.02296333	0.02296410
x_{40}	0.02239424	0.02239171	0.02239247
x_{41}	0.02185033	0.02184781	0.02184855
x_{42}	0.02133203	0.02132965	0.02133038
x_{43}	0.02083782	0.02083545	0.02083615
x_{44}	0.02036585	0.02036360	0.02036429
x_{45}	0.01991483	0.01991261	0.01991324
x_{46}	0.01948325	0.01948113	0.01948175

0.01906846	0.01906793	0.01907002	x_{47}
0.01867239	0.01867187	0.01867387	x_{48}
0.01829233	0.01829190	0.01829386	x_{49}
0.01792749	0.01792707	0.71792896	x_{50}
0.01757683	0.01757648	0.01757833	x_{51}
0.01723968	0.01723933	0.01724113	x_{52}
0.01691517	0.01691487	0.01691660	x_{53}
0.01660267	0.01660237	0.01660406	x_{54}
0.01630146	0.01630127	0.01630279	x_{55}
0.01601101	0.01601082	0.01601230	x_{56}
0.01573077	0.01573087	0.01573198	x_{57}
0.01546010	0.01546020	0.01546129	x_{58}
0.01519878	0.01519909	0.01519990	x_{59}
0.01494595	0.01494626	0.01494704	x_{60}
0.01470077	0.01470085	0.01470181	x_{61}
0.01446409	0.01446417	0.01446510	x_{62}
0.01423461	0.01423437	0.01423556	x_{63}
0.01401256	0.01401233	0.01401350	x_{64}
0.01380242	0.01380234	0.01380328	x_{65}
0.01359363	0.01359356	0.01359448	x_{66}
0.01338418	0.01338434	0.01338495	x_{67}
0.01318765	0.01318780	0.01318840	x_{68}
0.01297107	0.01297109	0.01297174	x_{69}
0.01278597	0.01278598	0.01278663	x_{70}
0.01270271	0.01270263	0.01270328	x_{71}
0.01494595	0.01494626	0.01494704	x_{60}
0.01470077	0.01470085	0.01470181	x_{61}
0.01446409	0.01446417	0.01446510	x_{62}
0.01423461	0.01423437	0.01423556	x_{63}
0.01401256	0.01401233	0.01401350	x_{64}
0.01380242	0.01380234	0.01380328	x_{65}
0.01359363	0.01359356	0.01359448	x_{66}
0.01338418	0.01338434	0.01338495	x_{67}
0.01318765	0.01318780	0.01318840	x_{68}
0.01297107	0.01297109	0.01297174	x_{69}
0.01278597	0.01278598	0.01278663	x_{70}
0.01270271	0.01270263	0.01270328	x_{71}

27. عند $0 < \omega < 2$، دع $T_\omega = (D - \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega L^t\right]$. دع $P = A - T_\omega^t A T_\omega$، ولاحظ أن P متماثلة. نشتق تمثيلاً جديدًا لـ T_ω، $(D - \omega L)T_\omega = (1-\omega)D + \omega L^t = (D - \omega L) - \omega A$، ولذلك فإن $T_\omega = I - \omega(D - \omega L)^{-1}A$.

دع $Q = \omega(D - \omega L)^{-1}A$ و $Q^t = \omega A\left[(D - \omega L)^{-1}\right]^t$. ومرة أخرى $P = Q^t\left[AQ^{-1} + \left(Q^t\right)^{-1}A - A\right]Q$ ولكن $AQ^{-1} = \frac{1}{\omega}(D - \omega L)$ و $(Q^t)^{-1}A = \frac{1}{\omega}\left(D - \omega L^t\right)$ ولذلك فإن

$$AQ^{-1} + (Q^t)^{-1}A - A = \frac{1}{\omega}[D - \omega L + D - \omega L^t] - A$$

$$= \frac{2}{\omega}D - D + D - L - L^t - A = \left(\frac{2}{\omega} - 1\right)D$$

وبذلك فإن $P = \left(\frac{2}{\omega} - 1\right)Q^t D Q$. وبما أن $0 < \omega < 2$، يكون لدينا $0 < \frac{2}{\omega} - 1$ و P موجبة التحديد.

يتبع هذا البرهان التمرين (16) مع استبدال T_g بـ T_ω. وبذلك فإن T_ω متقاربة.

مجموعة التمارين 4.7 (صفحة 461)

1. إن عدد الشرط $\|\cdot\|_\infty$ هو

أ. 50 ب. 241.37 ج. 600,002 د. 339,866

3.

	$\|x - \hat{x}\|_\infty$	$K_\infty(A)\|b - A\hat{x}\|_\infty / \|A\|_\infty$
أ.	8.571429×10^{-4}	1.238095×10^{-2}
ب.	0.1	3.832060
ج.	0.04	0.8
د.	20	1.152440×10^{5}

5. تعطي حذف جاوس Gaussian والتنقية المعادة النتائج الآتية:

أ. (i) $(-10.0, 1.01)^t$, (ii) $(10.0, 1.00)^t$

ب. (i) $(12.0, 0.499, -1.98)^t$, (ii) $(1.00, 0.500, -1.00)^t$

ج. (i) $(0.185, 0.0103, -0.0200, -1.12)^t$, (ii) $(0.177, 0.0127, -0.0207, -1.18)^t$

د. (i) $(0.799, -3.12, 0.151, 4.56)^t$, (ii) $(0.758, -3.00, 0.159, 4.30)^t$

7. المصفوفة معلولة الاشتراط؛ لأن $K_\infty = 60002$ لدينا $\hat{x} = (-1.0000, 2.0000)$

9. لأي متجه x، يكون لدينا

$$\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \le \|A^{-1}\|\,\|Ax\| \quad \text{إذًا يكون} \quad \|Ax\| \ge \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

ليكن $x \neq 0$ بحيث $\|x\| = 1$ و $Bx = 0$. لذلك فإن

$$\|(A-B)x\| = \|Ax\| \ge \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \quad \text{و} \quad \frac{\|(A-B)x\|}{\|A\|} \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|\,\|A\|} = \frac{1}{K(A)}$$

وبما أن $\|x\| = 1$، فإن

$$\|(A-B)x\| \le \|A-B\|\|x\| = \|A-B\| \quad \text{و} \quad \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \ge \frac{1}{K(A)}$$

11. أ. $K_\infty(H^{(4)}) = 28,375$.

ب. $K_\infty(H^{(5)}) = 943,656$.

ج. الحل الحقيقي $x = (-124, 1560\ -3960, 2660)$ والحل التقريبي $\|x - \tilde{x}\|_\infty = 11.8;\ \frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.02980$

و $\tilde{x} = (-124.2, 1563.8, -3971.8, 2668.8)^t$.

$$\frac{K_\infty(A)}{1 - K_\infty(A)\left(\frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}\right)}\left[\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} + \frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}\right] = \frac{28375}{1 - 28375\left(\frac{6.\bar{6}\times 10^{-6}}{2.08\bar{3}}\right)}\left[0 + \frac{6.\bar{6}\times 10^{-6}}{2.08\bar{3}}\right] = 0.09987$$

مجموعة التمارين 5.7 (صفحة 476)

1. $(0.18, 0.13)^t$

أ. $(0.19, 0.10)^t$

ب. تعطي حذف جاوس Gaussian أحسن إجابة؛ لأن $v^{(2)} = (0, 0)^t$ في طريقة التدرج المتقارن.

ج. $(0.13, 0.21)^t$ لم يكن هناك تحسن على الرغم من أن $v^{(2)} \neq 0$.

3. أ. $(1.00, -1.00, 1.00)^t$

ب. $(0.827, 0.0453, -0.0357)^t$

ج. يعطي دوران جزئي ودوران جزئي موزون $(1.00, -1.00, 1.00)^t$.

د. $(0.776, 0.238, -0.185)^t$، الباقي من (3ب) هو$(-0.0004, -0.0038, 0.0037)^t$، الباقي من (3د) هو $(0.0022, -0.0038, 0.0024)$. لا يبدو أن هناك تحسنًا ملحوظًا في حالة وجوده. وخطأ التدوير أكثر شيوعًا بسبب زيادة عدد عمليات ضرب المصفوفة.

5.

أ. $x^{(2)} = (0.1535933456, -0.1697932117, 0.5901172091)^t$, $\|r^{(2)}\|_\infty = 0.221$.

ب. $x^{(2)} = (0.9993129510, 0.9642734456, 0.7784266575)^t$, $\|r^{(2)}\|_\infty = 0.144$.

ج. $x^{(2)} = (-0.7290954114, 2.515782452, -0.6788904058, -2.331943982)^t$, $\|r^{(2)}\|_\infty = 2.2$.

د. $x^{(2)} = (-0.7071108901, -0.0954748881, -0.3441074093, 0.5256091497)^t$, $\|r^{(2)}\|_\infty = 0.39$.

هـ. $x^{(2)} = (0.5335968381, 0.9367588935, 1.339920949, 1.743083004, 1.743083004)^t$, $\|r^{(2)}\|_\infty = 1.3$.

و. $x^{(2)} = (1.022375671, 1.686451893, 1.022375671, 2.060919568, 0.8310997764, 2.060919568)^t$, $\|r^{(2)}\|_\infty = 1.13$.

7.

أ. $x^{(3)} = (0.06185567013, -0.1958762887, 0.6185567010)^t$, $\|r^{(3)}\|_\infty = 0.4 \times 10^{-9}$.

ب. $x^{(3)} = (0.9957894738, 0.9578947369, 0.7915789474)^t$, $\|r^{(3)}\|_\infty = 0.1 \times 10^{-9}$.

ج. $x^{(4)} = (-0.7976470579, 2.795294120, -0.2588235305, -2.251764706)^t$, $\|r^{(4)}\|_\infty = 0.39 \times 10^{-7}$.

د. $x^{(4)} = (-0.7534246575, 0.04109589039, -0.2808219179, 0.6917808219)^t$, $\|r^{(4)}\|_\infty = 0.11 \times 10^{-9}$.

هـ. $x^{(5)} = (0.4516129032, 0.7096774197, 1.677419355, 1.741935483, 1.806451613)^t$, $\|r^{(5)}\|_\infty = 0.2 \times 10^{-9}$.

و. $x^{(4)} = (1.000000000, 2.000000000, 1.000000000, 2.000000000, 0.9999999997, 2.000000000)^t$, $\|r^{(4)}\|_\infty = 0.44 \times 10^{-9}$.

9. أ.

	جاكوبي 49 تكرارًا	جاوس – سيدل 28 تكرارًا	SOR ($\omega = 1.3$) 13 تكرارًا	Conjugate Gradient 9 تكرارات
x_1	0.93406183	0.93406917	0.93407584	0.93407713
x_2	0.97473885	0.97475285	0.97476180	0.97476363
x_3	1.10688692	1.10690302	1.10691093	1.10691243
x_4	1.42346150	1.42347226	1.42347591	1.42347699
x_5	0.85931331	0.85932730	0.85933633	0.85933790
x_6	0.80688119	0.80690725	0.80691961	0.80692197
x_7	0.85367746	0.85370564	0.85371536	0.85372011
x_8	1.10688692	1.10690579	1.10691075	1.10691250
x_9	0.87672774	0.87674384	0.87675177	0.87675250
x_{10}	0.80424512	0.80427330	0.80428301	0.80428524
x_{11}	0.80688119	0.80691173	0.80691989	0.80692252
x_{12}	0.97473885	0.97475850	0.97476265	0.97476392
x_{13}	0.93003466	0.93004542	0.93004899	0.93004987
x_{14}	0.87672774	0.87674661	0.87675155	0.87675298
x_{15}	0.85931331	0.85933296	0.85933709	0.85933979
x_{16}	0.93406183	0.93407462	0.93407672	0.93407768

ب.

	جاكوبي 60 تكرارًا	جاوس – سيدل 35 تكرارًا	SOR (ω = 1.2) 23 تكرارًا	Conjugate Gradien 11 تكرارات
x_1	0.39668038	0.39668651	0.39668915	0.39669775
x_2	0.07175540	0.07176830	0.07177348	0.07178516
x_3	−0.23080396	−0.23078609	−0.23077981	−0.23076923
x_4	0.24549277	0.24550989	0.24551535	0.24552253
x_5	0.83405412	0.83406516	0.83406823	0.83407148
x_6	0.51497606	0.51498897	0.51499414	0.51500583
x_7	0.12116003	0.12118683	0.12119625	0.12121212
x_8	−0.24044414	−0.24040991	−0.24039898	−0.24038462
x_9	0.37873579	0.37876891	0.37877812	0.37878788
x_{10}	1.09073364	1.09075392	1.09075899	1.09076341
x_{11}	0.54207872	0.54209658	0.54210286	0.54211344
x_{12}	0.13838259	0.13841682	0.13842774	0.13844211
x_{13}	−0.23083868	−0.23079452	−0.23078224	−0.23076923
x_{14}	0.41919067	0.41923122	0.41924136	0.41925019
x_{15}	1.15015953	1.15018477	1.15019025	1.15019425
x_{16}	0.51497606	0.51499318	0.51499864	0.51500583
x_{17}	0.12116003	0.12119315	0.12120236	0.12121212
x_{18}	−0.24044414	−0.24040359	−0.24039345	−0.24038462
x_{19}	0.37873579	0.37877365	0.37878188	0.37878788
x_{20}	1.09073364	1.09075629	1.09076069	1.09076341
x_{21}	0.39668038	0.39669142	0.39669449	0.39669775
x_{22}	0.07175540	0.07177567	0.07178074	0.07178516
x_{23}	−0.23080396	−0.23077872	−0.23077323	−0.23076923
x_{24}	0.24549277	0.24551542	0.24551982	0.24552253
x_{25}	0.83405412	0.83406793	0.83407025	0.83407148

ج.

	جاكوبي 15 تكرارًا	جاوس – سيدل 9 تكرارات	SOR ($\omega = 1.3$) 8 تكرارات	Conjugate Gradient 8 تكرارات
x_1	– 3.07611424	– 3.07611739	– 3.07611796	– 3.07611794
x_2	– 1.65223176	– 1.65223563	– 1.65223579	– 1.65223582
x_3	– 0.53282391	– 0.53282528	– 0.53282531	– 0.53282528
x_4	– 0.04471548	– 0.04471608	– 0.04471609	– 0.04471604
x_5	0.17509673	0.17509661	0.17509661	0.17509661
x_6	0.29568226	0.29568223	0.29568223	0.29568218
x_7	0.37309012	0.37309011	0.37309011	0.37309011
x	0.42757934	0.42757934	0.42757934	0.42757927
x_9	0.46817927	0.46817927	0.46817927	0.46817927
x_{10}	0.49964748	0.49964748	0.49964748	0.49964748
x_{11}	0.52477026	0.52477026	0.52477026	0.52477027
x_{12}	0.54529835	0.54529835	0.54529835	0.54529836
x_{13}	0.56239007	0.56239007	0.56239007	0.56239009
x_{14}	0.57684345	0.57684345	0.57684345	0.57684347
x_{15}	0.58922662	0.58922662	0.58922662	0.58922664
x_{16}	0.59995522	0.59995522	0.59995522	0.59995523
x_{17}	0.60934045	0.60934045	0.60934045	0.60934045
x_{18}	0.61761997	0.61761997	0.61761997	0.61761998
x_{19}	0.62497846	0.62497846	0.62497846	0.62497847
x_{20}	0.63156161	0.63156161	0.63156161	0.63156161
x_{21}	0.63748588	0.63748588	0.63748588	0.63748588
x_{22}	0.64284553	0.64284553	0.64284553	0.64284553
x_{23}	0.64771764	0.64771764	0.64771764	0.64771764
x_{24}	0.65216585	0.65216585	0.65216585	0.65216585
x_{25}	0.65624320	0.65624320	0.65624320	0.65624320
x_{26}	0.65999423	0.65999423	0.65999423	0.65999422
x_{27}	0.66345660	0.66345660	0.66345660	0.66345660
x_{28}	0.66666242	0.66666242	0.66666242	0.66666242
x_{29}	0.66963919	0.66963919	0.66963919	0.66963919
x_{30}	0.67241061	0.67241061	0.67241061	0.67241060
x_{31}	0.67499722	0.67499722	0.67499722	0.67499721
x_{32}	0.67741692	0.67741692	0.67741691	0.67741691
x_{33}	0.67968535	0.67968535	0.67968535	0.67968535
x_{34}	0.68181628	0.68181628	0.68181628	0.68181628
x_{35}	0.68382184	0.68382184	0.68382184	0.68382184
x_{36}	0.68571278	0.68571278	0.68571278	0.68571278
x_{37}	0.68749864	0.68749864	0.68749864	0.68749864
x_{38}	0.68918652	0.68918652	0.68918652	0.68918652
x_{39}	0.69067718	0.69067718	0.69067718	0.69067717
x_{40}	0.68363346	0.68363346	0.68363346	0.68363349

11. أ.

الحل	الباقي
2.55613420	0.00668246
4.09171393	−0.00533953
4.60840390	−0.01739814
3.64309950	−0.03171624
5.13950533	0.01308093
7.19697808	−0.02081095
7.68140405	−0.04593118
5.93227784	0.01692180
5.81798997	0.04414047
5.85447806	0.03319707
5.94202521	−0.00099947
4.42152959	−0.00072826
3.32211695	0.02363822
4.49411604	0.00982052
4.80968966	0.00846967
3.81108707	−0.01312902

وهذا يتقارب في 6 تكرارات مع حد سماح 5.00×10^{-2} في المعيار l_∞، وإن $\|r^{(6)}\|_\infty = 0.046$

ب.

الحل	الباقي
2.55613420	0.00668246
4.09171393	−0.00533953
4.60840390	−0.01739814
3.64309950	−0.03171624
5.13950533	0.01308093
7.19697808	−0.02081095
7.68140405	−0.04593118
5.93227784	0.01692180
5.81798996	0.04414047
5.85447805	0.03319706
5.94202521	−0.00099947
4.42152959	−0.00072826
3.32211694	0.02363822
4.49411603	0.00982052
4.80968966	0.00846967
3.81108707	−0.01312902

وهذا يتقارب في 6 تكرارات مع حد سماح 5.00×10^{-2} في المعيار l_∞، وإن $\|r^{(6)}\|_\infty = 0.046$

ج. تؤدي حدود السماح جميعها إلى تفصيلات التقارب نفسها.

13. أ. لتكن $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مجموعة متجهات متعامدة لاصفرية للمصفوفة A– الموجبة المتماثلة والمحددة.

عندها تكون $\langle \mathbf{v}^{(i)}, A\mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ إذا كان $i \neq j$. افرض أن $c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + \cdots + c_n\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{0}$

وليست قيم كل c_i صفرًا. افترض أن $c_k\mathbf{v}^{(k)} + c_{k+1}\mathbf{v}^{(k+1)} + \cdots + c_n\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{0}$

ولإيجاد قيمة $\mathbf{v}^{(k)}$ تحصل على $\mathbf{v}^{(k)} = -\frac{c_{k+1}}{c_k}\mathbf{v}^{(k+1)} - \cdots - \frac{c_n}{c_k}\mathbf{v}^{(n)}$

وبالضرب في A نحصل على $A\mathbf{v}^{(k)} = -\frac{c_{k+1}}{c_k}A\mathbf{v}^{(k+1)} - \cdots - \frac{c_n}{c_k}A\mathbf{v}^{(n)}$ كالآتي:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}^{(k)})^t A\mathbf{v}^{(k)} &= -\frac{c_{k+1}}{c_k}(\mathbf{v}^{(k)})^t A\mathbf{v}^{(k+1)} - \cdots - \frac{c_n}{c_k}(\mathbf{v}^{(k)t})A\mathbf{v}^{(n)}\\ &= -\frac{c_{k+1}}{c_k}\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k+1)}\rangle - \cdots - \frac{c_n}{c_k}\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(n)}\rangle\\ &= -\frac{c_{k+1}}{c_k}\cdot 0 - \cdots - \frac{c_n}{c_k}\cdot 0.\end{aligned}$$

وبما أن A موجبة التحديد، فإن $\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{0}$ الذي هو تناقض. لذلك فإن جميع c_i يجب أن تكون صفرًا، وتكون $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مستقلة خطيًا.

ب. لتكن $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مجموعة متجهات متعامدة لاصفرية للمصفوفة موجبة التحديد والمتماثلة A، وأن z متعامدة على $\mathbf{v}^{(i)}$ لكل $i = 1, \ldots, n$. من الفقرة (أ)، المجموعة $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مستقلة خطيًّا ولذلك هناك مجموعة من الثوابت $\beta_1, \ldots, \beta_n$ مع $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}^{(i)}$
ولذلك فإن $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle = \mathbf{z}^t\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{z}^t\mathbf{v}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot 0 = 0$
وتؤدي النظرية (30.7) الجزء (v) إلى أن $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

مجموعة التمارين 1.8 (صفحة 490)

1. كثيرة حدود المربعات الصغرى الخطية هي $1.70784x + 0.89968$.

3. كثيرات حدود المربعات الصغرى مع أخطائها هي على التوالي.
$0.6208950 + 1.219621x$ مع $E = 2.719 \times 10^{-5}$،
$0.5965807 + 1.253293x - 0.01085343x^2$ مع $E = 1.801 \times 10^{-5}$
و $0.6290193 + 1.185010x + 0.03533252x^2 - 0.01004723x^3$ مع $E = 1.741 \times 10^{-5}$.

5. أ. كثيرة حدود المربعات الصغرى الخطية هي $72.0845x - 194.138$ مع خطأ 329.
ب. كثيرة حدود المربعات الصغرى بدرجة 2 هي $6.61821x^2 - 1.14352x + 1.23556$ مع خطأ 1.44×10^{-3}.
ج. كثيرة حدود المربعات الصغرى بدرجة 3 هي $-0.0136742x^3 + 6.84557x^2 - 2.37919x + 3.42904$ مع خطأ 5.27×10^{-4}.
د. تقريب المربعات الصغرى من الصيغة be^{ax} هو $24.2588e^{0.372382x}$ مع خطأ 418.
هـ. تقريب المربعات الصغرى من الصيغة bx^a هو $6.23903x^{2.01954}$ مع خطأ 0.00703.

7. أ. $k = 0.8996,\ E(k) = 0.295$.
ب. $k = 0.9052,\ E(k) = 0.128$ يناسب الجزء (b) مجموعة بيانات التجربة على نحو أفضل.

9. خط المربعات الصغرى للمعدل النقطي هو $0.101\,(\text{ACT score}) + 0.487$.

11. تعطي كثيرة حدود المربعات الصغرى الخطية $y \approx 0.17952x + 8.2084$.

13. أ. $\ln R = \ln 1.304 + 0.5756 \ln W$ ب. $E = 25.25$
ج. $\ln R = \ln 1.051 + 0.7006 \ln W + 0.06695(\ln W)^2$ د. $E = \sum_{i=1}^{37}\left(R_i - bW_i^a e^{c(\ln W_i)^2}\right)^2 = 20.30$

مجموعة التمارين 2.8 (صفحة 502)

1. تقريبات المربعات الصغرى الخطية هي:

أ. $P_1(x) = 1.833333 + 4x$ ب. $P_1(x) = -1.600003 + 3.600003x$ ج. $P_1(x) = 1.140981 - 0.2958375x$

د. $P_1(x) = 0.1945267 + 3.000001x$ هـ. $P_1(x) = 0.6109245 + 0.09167105x$ و. $P_1(x) = -1.861455 + 1.666667x$

3. تقريبات المربعات الصغرى بدرجة 2 هي:

أ. $P_2(x) = 2.000002 + 2.999991x + 1.000009x^2$ ب. $P_2(x) = 0.4000163 - 2.400054x + 3.000028x^2$

ج. $P_2(x) = 1.723551 - 0.9313682x + 0.1588827x^2$ د. $P_2(x) = 1.167179 + 0.08204442x + 1.458979x^2$

هـ. $P_2(x) = 0.4880058 + 0.8291830x - 0.7375119x^2$ و. $P_2(x) = -0.9089523 + 0.6275723x + 0.2597736x^2$

5. أ. $0.3427x10^{-9}$ ب. 0.0457142 ج. 0.000358354

د. 0.0106445 هـ. 0.0000134621 و. 0.0000967795

7. إن عملية Gram–Schmidt تنتج المجاميع الآتية لكثيرات الحدود:

أ. $\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = x - 0.5,\ \phi_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}\ \ \phi_3(x) = x^3 - 1.5x^2 + 0.6x - 0.05$

ب. $\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = x - 1\ ,\ \phi_2(x) = x^2 - 2x + \frac{2}{3}\ \ \phi_3(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{2}{5}$

ج. $\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = x - 2\ ,\ \phi_2(x) = x^2 - 4x + \frac{11}{3}\ \ \phi_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11.4x - 6.8$

9. كثيرات حدود المربعات الصغرى بدرجة 2 هي:

أ. $P_2(x) = 3.833333\phi_0(x) + 4\phi_1(x) + 0.9999998\phi_2(x)$

ب. $P_2(x) = 2\phi_0(x) + 3.6\varphi_1(x) + 3\phi_2(x)$

ج. $P_2(x) = 0.5493061\phi_0(x) - 0.2958369\varphi_1(x) + 0.1588785\varphi_2(x)$

د. $P_2(x) = 3.194528\varphi_0(x) + 3\phi_1(x) + 1.458960\phi_2(x)$

هـ. $P_2(x) = 0.6567600\phi_0(x) + 0.09167105\phi_1(x) - 0.73751218\phi_2(x)$

و. $P_2(x) = 1.471878\phi_0(x) + 1.666667\phi_1(x) + 0.2597705\phi_2(x)$

11. كثيرات حدود Laguerre هي $L_1(x) = x - 1,\ L_2(x) = x^2 - 4x + 2$ و $L_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$

مجموعة التمارين 3.8 (صفحة 512)

1. كثيرات حدود استكمال داخلي بدرجة 2 هي:

أ. $P_2(x) = 2.377443 + 1.590534(x - 0.8660254) + 0.5320418(x - 0.8660254)x$

ب. $P_2(x) = 0.7617600 + 0.8796047(x - 0.8660254)$

ج. $P_2(x) = 1.052926 + 0.4154370(x - 0.8660254) - 0.1384262x(x - 0.8660254)$

د. $P_2(x) = 0.5625 + 0.649519(x - 0.8660254) + 0.75x(x - 0.8660254)$

3. حدود الأخطاء العظمى لكثيرات حدود التمرين (1) هي:

أ. 0.1132617 ب. 0.04166667 ج. 0.08333333 د. 1.000000

5. تنتج أصفار $\tilde{T}_3$ كثيرات حدود استكمال داخلي بدرجة 2 كما يلي:

أ. $P_2(x) = 0.3489153 - 0.1744576(x - 2.866025) + 0.1538462(x - 2.866025)(x - 2)$

ب. $P_2(x) = 0.1547375 - 0.2461152(x - 1.866025) + 0.1957273(x - 1.866025)(x - 1)$

ج. $P_2(x) = 0.6166200 - 0.2370869(x - 0.9330127) - 0.7427732(x - 0.9330127)(x - 0.5)$

د. $P_2(x) = 3.0177125 + 1.883800(x - 2.866025) + 0.2584625(x - 2.866025)(x - 2)$

7. كثيرة حدود التكعيبي $\frac{383}{384}x - \frac{5}{32}x^3$ تقرب $\sin x$ مع خطأ 7.19×10^{-4} على الأكثر.

9. التغير في المتغير $x = \cos\theta$ ينتج

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{[\cos(n\arccos x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} (\cos(n\theta))^2\,dx = \frac{\pi}{2}$$

مجموعة التمارين 8.4 (صفحة 522)

1. إن تقريبات Padé بدرجة 2 إلى $f(x) = e^{2x}$ هي:

$$n = 2, m = 0 : r_{2,0}(x) = 1 + 2x + 2x^2$$

$$n = 1, m = 1 : r_{1,1}(x) = (1 + x)/(1 - x)$$

$$n = 0, m = 2 : r_{0,2}(x) = (1 - 2x + 2x^2)^{-1}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$r_{2,0}(x_i)$	$r_{1,1}(x_i)$	$r_{0,2}(x_i)$
1	0.2	1.4918	1.4800	1.5000	1.4706
2	0.4	2.2255	2.1200	2.3333	1.9231
3	0.6	3.3201	2.9200	4.0000	1.9231
4	0.8	4.9530	3.8800	9.0000	1.4706
5	1.0	7.3891	5.0000	غير محددة	1.0000

3. $r_{2,3}(x) = (1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2)/(1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3)$

i	$r_{2,3}(x_i)$	$f(x_i)$	x_i
1	1.22140277	1.22140276	0.2
2	1.49182561	1.49182470	0.4
3	1.82213210	1.82211880	0.6
4	2.22563652	2.22554093	0.8
5	2.71875000	2.71828183	1.0

5. $r_{3,3}(x) = (x - \frac{7}{60}x^3)/(1 + \frac{1}{20}x^2)$

i	x_i	$f(x_i)$	كثيرة حدود Maclaurin بدرجة 6	$r_{3,3}(x_i)$
0	0.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
1	0.1	0.09983342	0.09966675	0.09938640
2	0.2	0.19866933	0.19733600	0.19709571
3	0.3	0.29552021	0.29102025	0.29246305
4	0.4	0.38941834	0.37875200	0.38483660
5	0.5	0.47942554	0.45859375	0.47357724

7. إن تقريبات Padé بدرجة 5 هي:

أ. $r_{0,5}(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5\right)$

ب. $r_{1,4}(x) = \left(1 - \frac{1}{5}x\right) / \left(1 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{120}x^4\right)$

ج. $r_{3,2}(x) = \left(1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3\right) / \left(1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2\right)$

د. $r_{4,1}(x) = \left(1 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{10}x^2 - \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{120}x^4\right) / \left(1 + \frac{1}{5}x\right)$

i	x_i	$f(x_i)$	$r_{0,5}(x_i)$	$r_{4,1}(x_i)$	$r_{2,3}(x_i)$	$r_{1,4}(x_i)$
1	0.2	0.81873075	0.81873081	0.81873077	0.81873075	0.81873074
2	0.4	0.67032005	0.67032276	0.67032099	0.67031963	0.67031942
3	0.6	0.54881164	0.54883296	0.54882143	0.54880763	0.54880635
4	0.8	0.44932896	0.44941181	0.44937931	0.44930966	0.44930678
5	1.0	0.36787944	0.36809816	0.36805556	0.36781609	0.36781609

.9
$$r_{T_{2,0}}(x) = (1.266066T_0(x) - 1.130318T_1(x) + 0.2714953T_2(x))/\ T_0(x)$$
$$r_{T_{1,1}}(x) = (0.9945705T_0(x) - 0.4569046T_1(x))/(\ T_0(x) + 0.48038745T_1(x))$$
$$r_{T_{0,2}}(x) = 0.7940220T_0(x)/(\ T_0(x) + 0.8778575T_1(x) + 0.1774266T_2(x))$$

$r_{T_{0,2}}(x_i)$	$r_{T_{1,1}}(x_i)$	$r_{T_{2,0}}(x_i)$	$f(x_i)$	x_i	i
0.74610974	0.78595377	0.74592811	0.77880078	0.25	1
0.58807059	0.61774075	0.56515935	0.60653066	0.50	2
0.38633199	0.36319269	0.40724330	0.36787944	1.00	3

.11 $$r_{T_{2,2}}(x) = \frac{0.91747T_1(x)}{T_0(x) + 0.088914T_2(x)}$$

$r_{T_{2,2}}(x_i)$	$f(x_i)$	x_i	i
0.00000000	0.00000000	0.00	0
0.09093843	0.09983342	0.10	1
0.18028797	0.19866933	0.20	2
0.26808992	0.29552021	0.30	3
0.35438412	0.38941834	0.40	4

.13 أ. $e^x = e^{M \ln\sqrt{10}+s} = e^{M \ln\sqrt{10}}e^s = e^{\ln 10^{\frac{M}{2}}}e^s = 10^{\frac{M}{2}}e^s$

ب. $e^s \approx \left(1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{120}s^3\right) / \left(1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 - \frac{1}{120}s^3\right)$ مع $|\text{error}| \le 3.75 \times 10^{-7}$

ج. ضع $M = \text{round}(0.8685889638x),\ s = x - M/(0.8685889638)$ و $\hat{f} = \left(1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{120}s^3\right) / \left(1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 - \frac{1}{120}s^3\right)$

وبذلك $f = (3.16227766)^M \hat{f}$.

مجموعة التمارين 5.8 (صفحة 531)

.1 $S_2(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x$

.3 $S_3(x) = 3.676078 - 3.676078\cos x + 1.470431\cos 2x - 0.7352156\cos 3x + 3.676078\sin x - 2.940862\sin 2x$

.5 $S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin kx$

.7 كثيرات حدود المربعات الصغرى المثلثية هي:

أ. $S_2(x) = \cos 2x$

ب. $S_2(x) = 0$

ج. $S_3(x) = 1.566453 + 0.5886815\cos x - 0.2700642\cos 2x + 0.2175679\cos 3x + 0.8341640\sin x - 0.3097866\sin 2x$

د. $S_3(x) = -\ 2.046326 + 3.883872\cos x - 2.320482\cos 2x + 0.7310818\cos 3x$

.9 كثيرة حدود المربعات الصغرى المثلثية هي:

$$S_3(x) = -\ 0.4968929 + 0.2391965\cos x + 1.515393\cos 2x + 0.2391965\cos 3x - 1.150649\sin x$$

مع خطأ $E(S_3) = 7.271197$

.11 كثيرات حدود المربعات الصغرى المثلثية مع أخطائها هي:

أ. $S_3(x) = -\ 0.08676065 - 1.446416\cos\pi(x-3) - 1.617554\cos 2\pi(x-3) + 3.980729\cos 3\pi(x-3) - 2.154320$ $\sin\pi(x-3) + 3.907451\sin 2\pi(x-3)$ مع خطأ $E(S_3) = 210.90453$

ب. $S_3(x) = -\ 0.0867607 - 1.446416\cos\pi(x-3) - 1.617554\cos 2\pi(x-3) + 3.980729\cos 3\pi(x-3) - 2.354088$ $\cos 4\pi(x-3) - 2.154320\sin\pi(x-3) + 3.907451\sin 2\pi(x-3) - 1.166181\sin 3\pi(x-3)$ مع خطأ $E(S_4) = 169.4943$

.13 ليكن $f(-x) = -\ f(x)$ التكامل $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ في ضوء تبديل المتغير $t = -x$ يحول إلى

$$-\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt = -\int_0^a f(x)\,dx$$

ولذلك فإن $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$

مجموعة التمارين 6.8 (صفحة 543)

1. كثيرات حدود الاستكمال الداخلي المثلثية هي:

أ. $S_2(x) = -12.33701 + 4.934802\cos x - 2.467401\cos 2x + 4.934802\sin x$

ب. $S_2(x) = -6.168503 + 9.869604\cos x - 3.701102\cos 2x + 4.934802\sin x$

ج. $S_2(x) = 1.570796 - 1.570796\cos x$

د. $S_2(x) = -0.5 - 0.5\cos 2x + \sin x$

3. تعطي خوارزمية فورييه التحويلية السريعة كثيرات حدود الاستكمال الداخلي المثلثية الآتية:

أ. $S_4(x) = -11.10331 + 2.467401\cos x - 2.467401\cos 2x + 2.467401\cos 3x - 1.233701\cos 4x + 5.956833\sin x - 2.467401\sin 2x + 1.022030\sin 3x$

ب. $S_4(x) = 1.570796 - 1.340759\cos x - 0.2300378\cos 3x$

ج. $S_4(x) = -0.1264264 + 0.2602724\cos x - 0.3011140\cos 2x + 1.121372\cos 3x + 0.04589648\cos 4x - 0.1022190\sin x + 0.2754062\sin 2x - 2.052955\sin 3x$

د. $S_4(x) = -0.1526819 + 0.04754278\cos x + 0.6862114\cos 2x - 1.216913\cos 3x + 1.176143\cos 4x - 0.8179387\sin x + 0.1802450\sin 2x + 0.2753402\sin 3x$

5.

	التقريب	الحقيقي
أ.	−69.76415	−62.01255
ب.	9.869602	9.869604
ج.	−0.7943605	−0.2739383
د.	−0.9593287	−0.9557781

7. إن عناصر b_j جميعها أصفار. وعناصر a_j هي كما يلي:

$a_0 = -4.0008033$	$a_1 = 3.7906715$	$a_2 = -2.2230259$	$a_3 = 0.6258042$
$a_4 = -0.3030271$	$a_5 = 0.1813613$	$a_6 = -0.1216231$	$a_7 = 0.0876136$
$a_8 = -0.0663172$	$a_9 = 0.0520612$	$a_{10} = -0.0420333$	$a_{11} = 0.0347040$
$a_{12} = -0.0291807$	$a_{13} = 0.0249129$	$a_{14} = -0.0215458$	$a_{15} = 0.0188421$
$a_{16} = -0.0166380$	$a_{17} = 0.0148174$	$a_{18} = -0.0132962$	$a_{19} = 0.0120123$
$a_{20} = -0.0109189$	$a_{21} = 0.0099801$	$a_{22} = -0.0091683$	$a_{23} = 0.0084617$
$a_{24} = -0.0078430$	$a_{25} = 0.0072984$	$a_{26} = -0.0068167$	$a_{27} = 0.0063887$
$a_{28} = -0.0060069$	$a_{29} = 0.0056650$	$a_{30} = -0.0053578$	$a_{31} = 0.0050810$
$a_{32} = -0.0048308$	$a_{33} = 0.0046040$	$a_{34} = -0.0043981$	$a_{35} = 0.0042107$
$a_{36} = -0.0040398$	$a_{37} = 0.0038837$	$a_{38} = -0.0037409$	$a_{39} = 0.0036102$
$a_{40} = -0.0034903$	$a_{41} = 0.0033803$	$a_{42} = -0.0032793$	$a_{43} = 0.0031866$
$a_{44} = -0.0031015$	$a_{45} = 0.0030233$	$a_{46} = -0.0029516$	$a_{47} = 0.0028858$
$a_{48} = -0.0028256$	$a_{49} = 0.0027705$	$a_{50} = -0.0027203$	$a_{51} = 0.0026747$
$a_{52} = -0.0026333$	$a_{53} = 0.0025960$	$a_{54} = -0.0025626$	$a_{55} = 0.0025328$
$a_{56} = -0.0025066$	$a_{57} = 0.0024837$	$a_{58} = -0.0024642$	$a_{59} = 0.0024478$
$a_{60} = -0.0024345$	$a_{61} = 0.0024242$	$a_{62} = -0.0024169$	$a_{63} = 0.0024125$

مجموعة التمارين 1.9 (صفحة 555)

1. أ. القيم المميزة والمتجهات المميزة المقترنة بها هي $\lambda_1 = 2, \mathbf{v}^{(1)} = (1, 0, 0)^t; \lambda_2 = 1, \mathbf{v}^{(2)} = (0, 2, 1)^t$ $\lambda_3 = -1, \mathbf{v}^{(3)} = (-1, 1, 1)^t$ المجموعة مستقلة خطيًّا.

ب. القيم المميزة والمتجهات المميزة المقترنة بها هي $\lambda_1 = 2, \mathbf{v}^{(1)} = (0, 1, 0)^t; \lambda_2 = 3, \mathbf{v}^{(2)} = (1, 0, 1)^t$ $\lambda_3 = 1, \mathbf{v}^{(3)} = (1, 0, -1)^t$ المجموعة مستقلة خطيًّا.

ج. القيم المميزة والمتجهات المميزة المقترنة بها هي $\lambda_1 = 1, \mathbf{v}^{(1)} = (0, -1, 1)^t; \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}, \mathbf{v}^{(2)} = (\sqrt{2}, 1, 1)^t$ $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}, \mathbf{v}^{(3)} = (-\sqrt{2}, 1, 1)^t$ المجموعة مستقلة خطيًّا.

د. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ مع $x^{(1)} = x^{(2)} = (1, 0, 0)^t$ و$\lambda_3 = 3$ مع $x^{(3)} = (0, 1, 1)^t$

3. أ. المصفوفة في (1ب) موجبة التحديد.

ب. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

5. أ. القيم المميزة الثلاث هي ضمن $\{\lambda | |\lambda| \le 2\} \cup \{\lambda | |\lambda - 2| \le 2\}$.

ب. القيم المميزة الثلاث هي ضمن $R_1 = \{\lambda | |\lambda - 4| \le 2\}$.

ج. القيم المميزة الحقيقية الثلاث تحقق $0 \le \lambda \le 6$.

د. القيم المميزة الحقيقية الثلاث تحقق $1.25 \le \lambda \le 8.25$.

7. المتجهات غير مستقلة خطيًّا؛ لأن $-2\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

9. إذا كان $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$، فإن لكل j بحيث $1 \le j \le k$، يكون لدينا $c_1\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

لكن التعامدية تعطي $c_i\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_i = 0$ عند $i \ne j$ ولذلك فإن $c_j\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_j = 0$. وبما أن $\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_j \ne 0$، يجب أن يكون $c_j = 0$.

11. بما أن $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ مستقلة خطيًّا في $\mathbb{R}^n$، يوجد الأعداد $c_1, \ldots, c_n$ بحيث $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$

لذلك لأي k و $1 \le k \le n$ يكون $\mathbf{v}_k^t\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_k^t\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_k^t\mathbf{v}_n = c_k\mathbf{v}_k^t\mathbf{v}_k = c_k$

13. أ. القيم المميزة هي $\lambda_1 = 5.307857563, \lambda_2 = -0.4213112993, \lambda_3 = -0.1365462647$ مع المتجهات المميزة المقترنة بها

$(0.59020967, 0.51643129, 0.62044441)^t$, $(0.77264234, -0.13876278, -0.61949069)^t$, $(0.23382978, -0.84501102, 0.48091581)^t$

على التوالي.

ب. A غير موجبة محددة خلال $\lambda_2 < 0$ و $\lambda_3 < 0$

مجموعة التمارين 2.9 (صفحة 571)

1. القيم المميزة والمتجهات المميزة التقريبية هي:

أ. $\mu^{(3)} = 3.666667, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (0.9772727, 0.9318182, 1)^t$

ب. $\mu^{(3)} = 2.000000, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (1, 1, 0.5)^t$

ج. $\mu^{(3)} = 5.000000, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-0.2578947, 1, -0.2842105)^t$

د. $\mu^{(3)} = 5.038462, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (1, 0.2213741, 0.3893130, 0.4045802)^t$

3. القيم المميزة والمتجهات المميزة التقريبية هي:

أ. $\mu^{(3)} = 1.027730, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-0.1889082, 1, -0.7833622)^t$

ب. $\mu^{(3)} = -0.4166667, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (1, -0.75, -0.6666667)^t$

ج. $\mu^{(3)} = 17.64493, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-0.3805794, -0.09079132, 1)^t$

د. $\mu^{(3)} = 1.378684, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-0.3690277, -0.2522880, 0.2077438, 1)^t$

5. القيم المميزة والمتجهات المميزة التقريبية هي:

أ. $\mu^{(3)} = 3.959538, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (0.5816124, 0.5545606, 0.5951383)^t$

ب. $\mu^{(3)} = 2.0000000, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-0.6666667, -0.6666667, -0.3333333)^t$

ج. $\mu^{(3)} = 7.189567, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (0.5995308, 0.7367472, 0.3126762)^t$

د. $\mu^{(3)} = 6.037037, \quad \mathbf{x}^{(3)} = (0.5073714, 0.4878571, -0.6634857, -0.2536857)^t$

7. القيم المميزة والمتجهات المميزة التقريبية هي:

أ. $\lambda_1 \approx \mu^{(9)} = 3.999908, \quad \mathbf{x}^{(9)} = (0.9999943, 0.9999828, 1)^t$

ب. $\lambda_1 \approx \mu^{(13)} = 2.414214, \quad \mathbf{x}^{(13)} = (1, 0.7071429, 0.7070707)^t$

ج. $\lambda_1 \approx \mu^{(9)} = 5.124749, \quad \mathbf{x}^{(9)} = (-0.2424476, 1, -0.3199733)^t$

د. $\lambda_1 \approx \mu^{(24)} = 5.235861, \quad \mathbf{x}^{(24)} = (1, 0.6178361, 0.1181667, 0.4999220)^t$

9. أ. $\mu^{(9)} = 1.00001523$ مع $\mathbf{x}^{(9)} = (-0.19999391, 1, -0.79999087)^t$

ب. $\mu^{(12)} = -0.41421356$ مع $\mathbf{x}^{(12)} = (1, -0.70709184, -0.707121720)^t$

ج. لم تتقارب الطريقة في 25 تكرارًا. وعلى أي حال فالتقارب يحصل مع $\mu^{(42)} = 1.63663642$
و $\mathbf{x}^{(42)} = (-0.57068151, 0.3633658, 1)^t$

د. $\mu^{(9)} = 1.38195929$ مع $\mathbf{x}^{(9)} = (-0.38194003, -0.23610068, 0.23601909, 1)^t$

11. القيم المميزة والمتجهات المميزة التقريبية هي:

أ. $\mu^{(8)} = 4.0000000, \quad \mathbf{x}^{(8)} = (0.5773547, 0.5773282, 0.5773679)^t$

ب. $\mu^{(13)} = 2.414214, \quad \mathbf{x}^{(13)} = (-0.7071068, -0.5000255, -0.4999745)^t$

ج. $\mu^{(16)} = 7.223663, \quad \mathbf{x}^{(16)} = (0.6247845, 0.7204271, 0.3010466)^t$

د. $\mu^{(20)} = 7.086130, \quad \mathbf{x}^{(20)} = (0.3325999, 0.2671862, -0.7590108, -0.4918246)^t$

13. القيم المميزة والمتجهات المميزة التقريبية هي:

أ. $\lambda_2 \approx \mu^{(1)} = 1.000000, \quad \mathbf{x}^{(1)} = (-2.999908, 2.999908, 0)^t$

ب. $\lambda_2 \approx \mu^{(1)} = 1.000000, \quad \mathbf{x}^{(1)} = (0, -1.414214, 1.414214)^t$

ج. $\lambda_2 \approx \mu^{(6)} = 1.636734, \quad \mathbf{x}^{(6)} = (1.783218, -1.135350, -3.124733)^t$

د. $\lambda_2 \approx \mu^{(10)} = 3.618177, \quad \mathbf{x}^{(10)} = (0.7236390, -1.170573, 1.170675, -0.2763374)^t$

15. القيم المميزة والمتجهات المميزة التقريبية هي:

أ. $\mu^{(8)} = 4.000001, \quad \mathbf{x}^{(8)} = (0.9999773, 0.99993134, 1)^t$

ب. الطريقة لاتتحقق لأنها مقسومة على صفر

ج. $\mu^{(7)} = 5.124890, \quad \mathbf{x}^{(7)} = (-0.2425938, 1, -0.3196351)^t$

د. $\mu^{(15)} = 5.236112, \quad \mathbf{x}^{(15)} = (1, 0.6125369, 0.1217216, 0.4978318)^t$

17. القيم المميزة والمتجهات المميزة التقريبية هي:

أ. $\mu^{(2)} = 1.000000, \quad \mathbf{x}^{(2)} = (0.1542373, -0.7715828, 0.6171474)^t$

ب. $\mu^{(13)} = 1.000000, \quad \mathbf{x}^{(13)} = (0.00007432, -0.7070723, 0.7071413)^t$

ج. $\mu^{(14)} = 4.961699, \quad \mathbf{x}^{(14)} = (-0.4814472, 0.05180473, 0.8749428)^t$

د. $\mu^{(17)} = 4.428007, \quad \mathbf{x}^{(17)} = (0.7194230, 0.4231908, 0.1153589, 0.5385466)^t$

19. أ. لدينا $|\lambda| \leq 6$ للقيم المميزة λ جميعها.

ب. القيمة المميزة التقريبية هي $\mu^{(133)} = 0.69766854$ مع المتجه المميز التقريبي $\mathbf{x}^{(133)} = (1, 0.7166727, 0.2568099, 0.04601217)^t$

ج. كثيرة حدود الخاصية هي $P(\lambda) = \lambda^4 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{16}$ مع القيم المميزة

$$\lambda_1 = 0.6976684972,\ \lambda_2 = -0.2301775942 + 0.56965884i,\ \lambda_3 = -0.2301775942 - 0.56965884i,\ \lambda_4 = -0.237313308.$$

د. إن مجتمع الخنافس يجب أن يصل إلى الصفر؛ لأن **A** متقاربة.

21. باستخدام طريقة معكوس القوة مع $x^{(0)} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)^t$ و $q = 0$ نحصل على النتائج الآتية:

أ. $\mu^{(49)} = 1.0201926$, so $\rho(A^{-1}) \approx 1/\mu^{(49)} = 0.9802071$

ب. $\mu^{(30)} = 1.0404568$, so $\rho(A^{-1}) \approx 1/\mu^{(30)} = 0.9611163$

ج. $\mu^{(22)} = 1.0606974$, so $\rho(A^{-1}) \approx 1/\mu^{(22)} = 0.9427760$ تبدو الطريقة مستقرة لكل α في $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

23. بإيجاد $A^{-1}B$ واستخدام طريقة القوة مع $x^{(0)} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)^t$ نحصل على النتائج الآتية:

أ. نصف القطر الطيفي هو $\mu^{(46)} = 0.9800021$ تقريبًا.

ب. نصف القطر الطيفي هو $\mu^{(25)} = 0.9603543$ تقريبًا.

ج. نصف القطر الطيفي هو $\mu^{(18)} = 0.9410754$ تقريبًا.

مجموعة التمارين 3.9 (صفحة 581)

1. تنتج طريقة هاوسهولدر Householder المصفوفات الثلاثية الأقطار الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 12.00000 & -10.77033 & 0.0 \\ 10.77033 & 3.862069 & 5.344828 \\ 0.0 & 5.344828 & 7.137931 \end{bmatrix}$

ب. $\begin{bmatrix} 2.0000000 & 1.414214 & 0.0 \\ 1.414214 & 1.000000 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 3.0 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1.0000000 & -1.414214 & 0.0 \\ -1.414214 & 1.000000 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.000000 \end{bmatrix}$

د. $\begin{bmatrix} 4.750000 & -2.263846 & 0.0 \\ -2.263846 & 4.475610 & -1.219512 \\ 0.0 & -1.219512 & 5.024390 \end{bmatrix}$

3. تنتج طريقة هاوسهولدر Householder المصفوفات الثلاثية الأقطار الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2.0000000 & 2.8284271 & 1.4142136 \\ -2.8284271 & 1.0000000 & 2.0000000 \\ 0.0000000 & 2.0000000 & 3.0000000 \end{bmatrix}$

ب. $\begin{bmatrix} -1.0000000 & -3.0655513 & 0.0000000 \\ -3.6055513 & -0.23076923 & 3.1538462 \\ 0.0000000 & 0.15384615 & 2.2307692 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 5.0000000 & 4.9497475 & -1.4320780 & -1.5649769 \\ -1.4142136 & -2.0000000 & -2.4855515 & 1.8226448 \\ 0.0000000 & -5.4313902 & -1.4237288 & -2.6486542 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.5939865 & 5.4237288 \end{bmatrix}$

د. $\begin{bmatrix} 4.0000000 & 1.7320508 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 1.7320508 & 2.3333333 & 0.23570226 & 0.40824829 \\ 0.0000000 & -0.47140452 & 4.6666667 & -0.57735027 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 5.0000000 \end{bmatrix}$

مجموعة التمارين 4.9 (صفحة 591)

1. تنتج تكراران لخوارزمية QR المصفوفات الآتية:

أ. $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.6939977 & -0.3759745 & 0.0 \\ -0.3759745 & 1.892417 & -0.03039696 \\ 0.0 & -0.03039696 & 3.413585 \end{bmatrix}$

ب. $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 4.535466 & 1.212648 & 0.0 \\ 1.212648 & 3.533242 & 3.83 \times 10^{-7} \\ 0.0 & 3.83 \times 10^{-7} & -0.06870782 \end{bmatrix}$

ج. $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 4.679567 & -0.2969009 & 0.0 \\ -2.969009 & 3.052484 & -1.207346 \times 10^{-5} \\ 0.0 & -1.207346 \times 10^{-5} & 1.267949 \end{bmatrix}$

د. $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.3862092 & 0.4423226 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4423226 & 1.787694 & -0.3567744 & 0.0 \\ 0.0 & -0.3567744 & 3.080815 & 3.116382 \times 10^{-5} \\ 0.0 & 0.0 & 3.116382 \times 10^{-5} & 4.745281 \end{bmatrix}$

هـ. $A^{(3)} = \begin{bmatrix} -2.826365 & 1.130297 & 0.0 & 0.0 \\ 1.130297 & -2.429647 & -0.1734156 & 0.0 \\ 0.0 & -0.1734156 & 0.8172086 & 1.863997 \times 10^{-9} \\ 0.0 & 0.0 & 1.863997 \times 10^{-9} & 3.438803 \end{bmatrix}$

و. $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.2763388 & 0.1454371 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1454371 & 0.4543713 & 0.1020836 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1020836 & 1.174446 & -4.36 \times 10^{-5} \\ 0.0 & 0.0 & -4.36 \times 10^{-5} & 0.9948441 \end{bmatrix}$

3. للمصفوفات في التمرين (1) القيم المميزة الآتية، وهي دقيقة ضمن 10^{-5}:

أ. 3.414214, 2.000000, 0.58578644

ب. −0.06870782, 5.346462, 2.722246

ج. 1.267949, 4.732051, 3.000000

د. 4.745281, 3.177283, 1.822717, 0.2547188

هـ. 3.438803, 0.8275517, −1.488068, −3.778287

و. 0.9948440, 1.189091, 0.5238224, 0.1922421

5. للمصفوفات في التمرين (1) المتجهات المميزة الآتية، وهي دقيقة ضمن 10^{-5}:

أ. $(-0.7071067, 1, -0.7071067)^t, (1, 0, -1)^t, (0.7071068, 1, 0.7071068)^t$

ب. $(0.1741299, -0.5343539, 1)^t, (0.4261735, 1, 0.4601443)^t, (1, -0.2777544, -0.3225491)^t$

ج. $(0.2679492, 0.7320508, 1)^t, (1, -0.7320508, 0.2679492)^t, (1, 1, -1)^t$

د. $(-0.08029447, -0.3007254, 0.7452812, 1)^t, (0.4592880, 1, -0.7179949, 0.8727118)^t, (0.8727118, 0.7179949, 1 -0.4592880)^t (1, -0.7452812, -0.3007254, 0.08029447)^t$

هـ. $(-0.01289861, -0.07015299, 0.4388026, 1)^t, (-0.1018060, -0.2878618, 1, -0.4603102)^t, (1, 0.5119322, 0.2259932 -0.05035423)^t (-0.5623391, 1, 0.2159474, -0.03185871)^t$

و. $(-0.1520150, -0.3008950, -0.05155956, 1)^t, (0.3627966, 1, 0.7459807, 0.3945081)^t, (1, 0.09528962, -0.6907921 0.1450703)^t, (0.8029403, -0.9884448, 1, -0.1237995)^t$

7. أ. لتكن $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ و $y = Px$. أثبت أن $\|x\|_2 = \|y\|_2$. استخدم العلاقة $x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}$ حيث $r = \|x\|_2$ و $\alpha = \tan^{-1}(x_2/x_1)$، وكذلك $y_1 + iy_2 = re^{i(\alpha+\theta)}$.

ب. دع $x = (1, 0)^t$ و $\theta = \pi/4$.

9. لتكن $C = RQ$، حيث R مصفوفة مثلثية عليا و Q مصفوفة Hessenberg العليا. لذلك فإن $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} r_{ik}q_{kj}$. وبما أن R مصفوفة مثلثية عليا، فإن $r_{ik} = 0$ إذا كان $k < i$. لذلك فإن $c_{ij} = \sum_{k=i}^{n} r_{ik}q_{kj}$. وبما أن Q مصفوفة Hessenberg، فإن $q_{kj} = 0$، إذا كان $k > j + 1$. لذلك فإن $c_{ij} = \sum_{k=i}^{j+1} r_{ik}q_{kj}$. سيكون المجموع صفرًا إذا كانت $i > j + 1$. ولذلك فإن $c_{ij} = 0$ إذا كانت $i \geq j + 2$. وهذا يعني أن C مصفوفة Hessenberg العليا.

13. أ. ضمن 10^{-5}، القيم المميزة هي $2.618034, 3.618034, 1.381966, 0.3819660$

ب. بدلالة p و ρ فإن القيم المميزة هي $-65.45085p/\rho, -90.45085p/\rho, -34.54915p/\rho, -9.549150p/\rho$

15. القيم المميزة الحقيقية هي كما يلي:

أ. عندما $\alpha = \frac{1}{4}$ يكون لدينا $0.97974649, 0.92062677, 0.82743037, 0.70770751, 0.57115742, 0.42884258, 0.29229249, 0.17256963, 0.07937323, 0.02025351$

ب. عندما $\alpha = \frac{1}{2}$ يكون لدينا $0.95949297, 0.84125353, 0.65486073, 0.41541501, 0.14231484, -0.14231484, -0.41541501, -0.65486073, -0.84125353, -0.95949297$

ج. عندما $\alpha = \frac{3}{4}$ يكون لدينا $0.93923946, 0.76188030, 0.48229110, 0.12312252, -0.28652774, -0.71347226, -1.12312252, -1.48229110, -1.76188030, -1.93923946$. تبدو الطريقة مستقرة عند $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

مجموعة التمارين 1.10 (صفحة 605)

1. استخدم النظرية (5.10).

3. استخدم النظرية (5.10) لكل واحدة من المشتقات الجزئية.

5. أ. مع $x^{(0)} = (0, 0)^t$ وحد سماح 10^{-5}، يكون لدينا $x^{(13)} = (0.9999973, 0.9999973)^t$

ب. مع $x^{(0)} = (0, 0)^t$ وحد سماح 10^{-5}، يكون لدينا $x^{(11)} = (0.9999984, 0.9999991)^t$

7. أ. مع $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ يكون لدينا $x^{(5)} = (5.0000000, 0.0000000, -0.5235988)^t$

ب. مع $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ يكون لدينا $x^{(9)} = (1.0364011, 1.0857072, 0.93119113)^t$

ج. مع $x^{(0)} = (0, 0, 0.5)^t$ يكون لدينا $x^{(5)} = (0.00000000, 0.09999999, 1.0000000)^t$

د. مع $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ يكون لدينا $x^{(5)} = (0.49814471, -0.19960600, -0.52882595)^t$

9. أ. مع $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ يكون لدينا $x^{(3)} = (0.5000000, 0, -0.5235988)^t$

ب. مع $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ يكون لدينا $x^{(4)} = (1.036400, 1.085707, 0.9311914)^t$

ج. مع $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ يكون لدينا $x^{(3)} = (0, 0.1000000, 1.0000000)^t$

د. مع $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ يكون لدينا $x^{(4)} = (0.4981447, -0.1996059, -0.5288260)^t$

11. نحصل على حل مستقر عندما $x_1 = 8000$ و $x_2 = 4000$

مجموعة التمارين 2.10 (صفحة 613)

1. أ. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.4958936, 1.983423)^t$

ب. $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.5131616, -0.01837622)^t$

ج. $\mathbf{x}^{(2)} = (-23.942626, 7.6086797)^t$

د. لا يمكن حساب $\mathbf{x}^{(1)}$؛ لأن $J(0)$ منفردة.

3. أ. $(0.5, 0.2)^t$ and $(1.1, 6.1)^t$

ب. $(-0.35, 0.05)^t, (0.2, -0.45)^t, (0.4, -0.5)^t$ and $(1, -0.3)^t$

ج. $(-1, 3.5)^t, (2.5, 4)^t$

د. $(0.11, 0.27)^t$

5. أ. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (0.5, 2)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5, 2)^t$ ومع $\mathbf{x}^{(0)} = (1.1, 6.1)$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(3)} = (1.0967197, 6.0409329)^t$

ب. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (-0.35, 0.05)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(3)} = (-0.37369822, 0.05626649)^t$

مع $\mathbf{x}^{(0)} = (0.2, -0.45)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(4)} = (0.14783924, -0.43617762)^t$

مع $\mathbf{x}^{(0)} = (0.4, -0.5)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(3)} = (0.40809566, -0.49262939)^t$

ومع $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -0.3)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(4)} = (1.0330715, -0.27996184)^t$

ج. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 3.5)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(1)} = (-1, 3.5)^t$ ومع $\mathbf{x}^{(0)} = (2.5, 4)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(3)} = (2.546947, 3.984998)^t$

د. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (0.11, 0.27)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(6)} = (0.1212419, 0.2711051)^t$

7. أ. $\mathrm{x}^{(5)} = (0.5000000, 0.8660254)^t$

ب. $\mathrm{x}^{(6)} = (1.772454, 1.772454)^t$

ج. $\mathrm{x}^{(5)} = (-1.456043, -1.664230, 0.4224934)^t$

د. $\mathrm{x}^{(4)} = (0.4981447, -0.1996059, -0.5288260)^t$

9. مع $\mathrm{x}^{(0)} = (1, 1-1)^t$ و $TOL = 10^{-6}$ يكون لدينا $\mathrm{x}^{(20)} = (0.5, 9.5\times 10^{-7}, -0.5235988)^t$.

11. عندما يكون البعد n هو 1، فإن $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ دالة $f(\mathrm{x}) = f_1(\mathrm{x})$ بعنصر (مكون) واحد، وإن للمتجه x عنصرًا (مكونًا) واحدًا $x_1 = x$.
في هذه الحالة، فإن مصفوفة جاكوبيان Jacobian، $J(\mathrm{x})$ تتقلص إلى مصفوفة $[\partial f_1/\partial x_1(\mathrm{x})] = f'(\mathrm{x}) = f'(x)$ بعنصر واحد 1×1.
وبذلك فإن معادلة المتجه $\mathrm{x}^{(k)} = \mathrm{x}^{(k-1)} - J(\mathrm{x}^{(k-1)})^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{x}^{(k-1)})$ تصبح معادلة الثابت $x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})^{-1} f(x_{k-1}) = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

13. مع $\theta_i^{(0)} = 1$ عند كل $i = 1, 2, \ldots, 20$ نحصل على النتائج الآتية:

i	1	2	3	4	5	6
$\theta_i^{(5)}$	0.14062	0.19954	0.24522	0.28413	0.31878	0.35045

i	7	8	9	10	11	12	13
$\theta_i^{(5)}$	0.37990	0.40763	0.43398	0.45920	0.48348	0.50697	0.52980

i	14	15	16	17	18	19	20
$\theta_i^{(5)}$	0.55205	0.57382	0.59516	0.61615	0.63683	0.65726	0.67746

مجموعة التمارين 3.10 (صفحة 622)

1. أ. $\mathrm{x}^{(2)} = (0.4777920, 1.927557)^t$

ب. $\mathrm{x}^{(2)} = (-0.3250070, -0.1386967)^t$

ج. $\mathrm{x}^{(2)} = (0\ 52293721\ \ 0\ 82434906)^t$

د. $\mathrm{x}^{(2)} = (1\ 77949990\ \ 1\ 74339606)^t$

3. أ. مع $\mathrm{x}^{(0)} = (0, 0)^t$ يكون لدينا $\mathrm{x}^{(8)} = (0.5, 2)^t$

ب. مع $\mathrm{x}^{(0)} = (0, 0)^t$ يكون لدينا $\mathrm{x}^{(9)} = (-0.3736982, 0.05626649)^t$

ج. $\mathrm{x}^{(9)} = (0.5, 0.8660254)^t$

د. $\mathrm{x}^{(8)} = (1.772454, 1.772454)^t$

5. أ. مع $\mathrm{x}^{(0)} = (2.5, 4)^t$ يكون لدينا $\mathrm{x}^{(3)} = (2.546947, 3.984998)^t$

ب. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (0.11, 0.27)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(4)} = (0.1212419, 0.2711052)^t$

ج. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(3)} = (1.036401, 1.085707, 0.9311914)^t$

د. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 1)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(8)} = (0.9, -1, 0.5)^t$ ومع $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, -1)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(8)} = (0.5, 1, -0.5)^t$

7. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(56)} = (0.5000591, 0.01057235, -0.5224818)^t$.

9. لتكن λ قيمة مميزة لـ $M = (I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)$ مع متجه مميز $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. لذلك $\lambda\mathbf{x} = M\mathbf{x} = (I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\mathbf{v}^t\mathbf{x})\mathbf{u}$ ومن ثم فإن $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}$. وإذا كان $\lambda = 1$ فإن $\mathbf{v}^t\mathbf{x} = 0$. ولذلك فإن $\lambda = 1$ عبارة عن قيمة مميزة لـ M مع مضروب $(n-1)$ ومتجهات مميزة $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}$ حيث $\mathbf{v}^t\mathbf{x}^{(j)} = 0$ عند $j = 1, \ldots, n-1$. مفترضين أن $\lambda \neq 1$ يؤدي إلى أن $\mathbf{x}$ و $\mathbf{u}$ متوازيان. افترض أن $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u}$ سيكون $(\lambda - 1)\alpha\mathbf{u} = (\mathbf{v}^t(\alpha\mathbf{u}))\mathbf{u}$ وبذلك $\alpha(\lambda - 1)\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v}^t\mathbf{u})\mathbf{u}$، الذي يؤدي إلى كون $\lambda - 1 = \mathbf{v}^t\mathbf{u}$ أو $\lambda = 1 + \mathbf{v}^t\mathbf{u}$. لذلك فإن لـ M قيمًا مميزة $\lambda_i, 1 \le i \le n$ حيث $\lambda_i = 1$ عند $i = 1, \ldots, n-1$ و $\lambda_n = 1 + \mathbf{v}^t\mathbf{u}$. ولكون $\det M = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$، يكون لدينا $\det M = 1 + \mathbf{v}^t\mathbf{u}$.

11. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (0.75, 1.25)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(4)} = (0.7501948, 1.184712)^t$. ولذلك فإن $a = 0.7501948, b = 1.184712$ وإن الخطأ هو 19.796.

مجموعة التمارين 4.10 (صفحة 630)

1. أ. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(11)} = (0.4943541, 1.948040)^t$

ب. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(2)} = (0.4970073, 0.8644143)^t$

ج. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(1)} = (1.736083, 1.804428)^t$

د. مع $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$ يكون لدينا $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.3610092, 0.05788368)^t$

3. أ. $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5, 2)^t$ ب. $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5, 0.8660254)^t$

ج. $\mathbf{x}^{(4)} = (1.772454, 1.772454)^t$ د. $\mathbf{x}^{(3)} = (-0.3736982, 0.05626649)^t$

5. أ. $\mathbf{x}^{(3)} = (1.036400, 1.085707, 0.9311914)^t$ ب. $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5, 1, -0.5)^t$

ج. $\mathbf{x}^{(5)} = (-1.456043, -1.664230, 0.4224934)^t$ د. $\mathbf{x}^{(6)} = (0.0000000, 0.10000001, 1.0000000)^t$

مجموعة التمارين 5.10 (صفحة 673)

1. أ. $(3, -2.25)^t$ ب. $(0.42105263, 2.6184211)^t$ ج. $(2.173110, -1.3627731)^t$

3. إن استخدام $\mathbf{x}(0) = 0$ في الفقرات كلها يعطي:

أ. $(0.44006047, 1.8279835)^t$ ب. $(-0.41342613, 0.096669468)^t$

ج. $(0.49858909, 0.24999091, -0.52067978)^t$ د. $(6.1935484, 18.532258, -21.725806)^t$

5. أ. مع $\mathbf{x}(0) = (-1, 3.5)^t$ تكون النتيجة $(-1, 3.5)^t$

ومع $\mathbf{x}(0) = (2.5, 4)^t$ تكون النتيجة $(-1, 3.5)^t$

ب. مع $\mathbf{x}(0) = (0.11, 0.27)^t$ تكون النتيجة $(0.12124195, 0.27110516)^t$

ج. مع $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 1)^t$ تكون النتيجة $(1.03640047, 1.08570655, 0.93119144)^t$

د. مع $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 1)^t$ تكون النتيجة $(0.90016074, -1.00238008, 0.496610937)^t$

ومع $\mathbf{x}(0) = (1, 1, -1)^t$ تكون النتيجة $(0.50104035, 1.00238008, -0.49661093)^t$

7. أ. مع $\mathbf{x}(0) = (-1, 3.5)^t$ تكون النتيجة $(-1, 3.5)^t$ ومع $\mathbf{x}(0) = (2.5, 4)^t$ تكون النتيجة $(2.5469465, 3.9849975)^t$

ب. مع $\mathbf{x}(0) = (0.11, 0.27)^t$ تكون النتيجة $(0.12124191, 0.27110516)^t$

ج. مع $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 1)^t$ تكون النتيجة $(1.03640047, 1.08570655, 0.93119144)^t$

د. مع $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 1)^t$ تكون النتيجة $(0.900015964, -1.00021826, 0.49968944)^t$

ومع $\mathbf{x}(0) = (1, 1, -1)^t$ تكون النتيجة $(0.5009653, 1.00021826, -0.49968944)^t$

9. $(0.50024553, 0.078230039, -0.52156996)^t$

11. لكل λ يكون لدينا $0 = G(\lambda, \mathrm{x}(\lambda)) = F(\mathrm{x}(\lambda)) - e^{-\lambda}F(\mathrm{x}(0))$

لذلك $0 = \dfrac{\partial F(\mathrm{x}(\lambda))}{\partial \mathrm{x}}\dfrac{d\mathrm{x}}{d\lambda} + e^{-\lambda}F(\mathrm{x}(0)) = J(\mathrm{x}(\lambda))\,\mathrm{x}'(\lambda) + e^{-\lambda}F(\mathrm{x}(0))$ و $J(\mathrm{x}(\lambda))\,\mathrm{x}'(\lambda) = -e^{-\lambda}F(\mathrm{x}(0)) = -F(\mathrm{x}(0))$

وعليه فإن

$$\mathrm{x}'(\lambda) = -J(\mathrm{x}(\lambda))^{-1}F(\mathrm{x}(0))$$

ومع $N = 1$، يكون لدينا $h = 1$، لذلك فإن

$$\mathrm{x}(1) = \mathrm{x}(0) - J(\mathrm{x}(0))^{-1}F(\mathrm{x}(0))$$

وعلى أي حال فإن طريقة نيوتن تعطي

$$\mathrm{x}^{(1)} = \mathrm{x}^{(0)} - J(\mathrm{x}^{(0)})^{-1}F(\mathrm{x}^{(0)})$$

ولأن $\mathrm{x}(0) = \mathrm{x}^{(0)}$، يكون لدينا $\mathrm{x}(1) = \mathrm{x}^{(1)}$

مجموعة التمارين 1.11 (صفحة 648)

1. تعطي خوارزمية القذف الخطي Linear Shooting Algorithm النتائج في الجداول الآتية:

أ.

$y(x_i)$	w_{1i}	x_i	i
0.82402714	0.82432432	0.5	1

ب.

$y(x_i)$	w_{1i}	x_i	i
0.3936767	0.3937095	0.25	1
0.8240271	0.8240948	0.50	2
1.337086	1.337160	0.75	3

3. تعطي خوارزمية القذف الخطي Linear Shooting Algorithm النتائج في الجداول الآتية:

أ.

$y(x_i)$	w_{1i}	x_i	i
0.7831923	0.7833204	0.3	3
0.6022801	0.6023521	0.6	6
0.8568760	0.8568906	0.9	9

ب.

$y(x_i)$	w_{1i}	x_i	i
0.1676243	0.1676179	1.25	5
0.4581935	0.4581901	1.50	10
0.6077740	0.6077718	1.75	15

ج.

$y(x_i)$	w_{1i}	x_i	i
−0.5185728	−0.5185754	0.3	3
−0.2195247	−0.2195271	0.6	6
−0.0406570	−0.0406577	0.9	9

د.

$y(x_i)$	w_{1i}	x_i	i
0.06553420	0.0655336	1.3	3
0.07745947	0.0774590	1.6	6
0.03056208	0.0305619	1.9	9

5. تعطي خوارزمية القذف الخطي Linear Shooting Algorithm مع $h = 0.05$ النتائج الآتية:

w_{1i}	x_i	i
0.04990547	0.3	6
0.00673795	0.5	10
0.00033755	0.8	16

تعطي خوارزمية القذف الخطي Linear Shooting Algorithm مع $h = 0.1$ النتائج الآتية:

w_{1i}	x_i	i
0.05273437	0.3	3
0.00741571	0.5	5
0.00038976	0.8	8

7. أ. الكامن التقريبي هو $u(3) \approx 36.66702$ مستخدمين $h = 0.1$.
ب. الكامن الحقيقي هو $u(3) = 36.66667$.

9. أ. لا توجد حلول إذا كانت b عددًا صحيحًا مضاعفًا π، وإن $B \neq 0$.
ب. يوجد حل وحيد متى كانت b ليست عددًا صحيحًا مضاعفًا π.
ج. هناك عدد لانهائي من الحلول إذا كانت b عددًا صحيحًا مضاعفًا π، وأن $B = 0$.

مجموعة التمارين 2.11 (صفحة 655)

1. تعطي خوارزمية القذف اللاخطي $w_1 = 0.405505 \approx \ln 1.5 = 0.405465$

3. تعطي خوارزمية القذف اللاخطي النتائج في الجداول الآتية:

أ.

i	x_i	w_{1i}	w_{2i}
0	1.00000000	0.50000000	−0.24999645
1	1.20000000	0.45454784	−0.20660805
2	1.40000000	0.41667074	−0.17360737
3	1.60000000	0.38462082	−0.14792494
4	1.80000000	0.35714950	−0.12754660
5	2.00000000	0.33334113	−0.11110631

التقارب في 3 تكرارات $t = -0.24999645$

ب.

i	x_i	w_{1i}	w_{2i}
0	1.00000000	2.00000000	0.00037561
1	1.20000000	2.03368970	0.30438685
2	1.40000000	2.11465981	0.48837177
3	1.60000000	2.22530062	0.60800801
4	1.80000000	2.35575016	0.68995503
5	2.00000000	2.50001814	0.74803626

التقارب في 7 تكرارات $t = 0.00037560915$

ج.

i	x_i	w_{1i}	w_{2i}
0	2.00000000	1.19314718	0.24999064
1	2.20000000	1.24300222	0.24792509
2	2.40000000	1.29213370	0.24304604
3	2.60000000	1.34012348	0.23667511
4	2.80000000	1.38675666	0.22957777
5	3.00000000	1.43193699	0.22220426

التقارب في 3 تكرارات $t = 0.24999064$

د.

i	x_i	w_{1i}	w_{2i}
0	1.00000000	0.0000000	1.00003300
1	1.10000000	0.12685765	1.55599879
2	1.20000000	0.31505131	2.22764352
3	1.30000000	0.57641412	3.02019435
4	1.40000000	0.92328031	3.93845898
5	1.50000000	1.36844649	4.98688802
6	1.60000000	1.92513857	6.16962437
7	1.70000000	2.60698306	7.49054305
8	1.80000000	3.42798193	8.95328379
9	1.90000000	4.40249050	10.56127800
10	2.00000000	5.54519780	12.31777134

التقارب في 8 تكرارات $t = 1.0000330$

5. أ. عدّل الخوارزمية (2.11) بحسب الآتي:

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/N$ $k = 2;$ $TK1 = (\beta - \alpha)/(b-a)$
2	ضع $w_{1,0} = \alpha$ $w_{2,0} = TK1$
3	عند $i = 1, \ldots, N$ نفذ الخطوتين 4 و 5.
4	ضع $x = a + (i-1)h$

5	ضع $k_{1,1} = hw_{2,i-1}$; $k_{1,2} = hf(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})$; $k_{2,1} = h(w_{2,i-1} + k_{1,2}/2)$; $k_{2,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + k_{1,1}/2, w_{2,i-1} + k_{1,2}/2)$; $k_{3,1} = h(w_{2,i-1} + k_{2,2}/2)$; $k_{3,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + k_{2,1}/2, w_{2,i-1} + k_{2,2}/2)$; $k_{4,1} = h(w_{2,i-1} + k_{3,2}/2)$; $k_{4,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + k_{3,1}, w_{2,i-1} + k_{3,2})$; $w_{1,i} = w_{1,i-1} + (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})/6$; $w_{2,i} = w_{2,i-1} + (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})/6$.
6	ضع $TK2 = TK1 + (\beta - w_{1,N})/(b - a)$
7	ما دام $(k \leq M)$ فنفذ الخطوات 8 − 15.
8	ضع $w_{2,0} = TK2$; $HOLD = w_{1,N}$.
9	عند $i = 1,\ldots,N$ نفذ الخطوتين 10 و 11.
10	(مماثل لما في الخطوة 4.)
11	(مماثل لما في الخطوة 5.)
12	إذا كان $\|w_{1,N} - \beta\| \leq TOL$ فنفذ الخطوتين 13 و 14.
13	عند $i = 0,\ldots,N$ ضع $x = a + ih$ المخرجات $(x, w_{1,i}, w_{2,i})$
14	توقف.
15	ضع $TK = TK2 - (w_{1,N} - \beta)(TK2 - TK1)/(w_{1,N} - HOLD)$; $TK1 = TK2$; $TK2 = TK$; $k = k + 1$.
16	المخرجات (تم تجاوز أكبر عدد من التكرارات.) توقف.

ب. في 3 تكرارات يكون لدينا

(أ3) 3 التكرارات:

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
1	1.2	0.45453896	0.45454545
2	1.4	0.41665348	0.41666667
3	1.6	0.38459538	0.38461538
4	1.8	0.35711592	0.35714286

(ج3) 3 التكرارات:

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
1	2.2	1.24299575	1.24300281
2	2.4	1.29211897	1.29213540
3	2.6	1.34009800	1.34012683
4	2.8	1.38671706	1.38676227

مجموعة التمارين 3.11 (صفحة 661)

1. تعطي خوارزمية الفرق المنتهي الخطي النتائج الآتية :

أ.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
1	0.5	0.83333333	0.82402714

ب.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
1	0.25	0.39512472	0.39367669
2	0.5	0.82653061	0.82402714
3	0.75	1.33956916	1.33708613

ج. $$\frac{4(0.82653061) - 0.83333333}{3} = 0.82426304$$

3. تعطي خوارزمية الفرق المنتهي الخطي النتائج في الجداول الآتية:

أ.

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
2	0.2	1.018096	1.0221404
5	0.5	0.5942743	0.59713617
7	0.7	0.6514520	0.65290384

ب.

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
5	1.25	0.16797186	0.16762427
10	1.50	0.45842388	0.45819349
15	1.75	0.60787334	0.60777401

ج.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
3	0.3	−0.5183084	−0.5185728
6	0.6	−0.2192657	−0.2195247
9	0.9	−0.0405748	−0.04065697

د.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
3	1.3	0.0654387	0.0655342
6	1.6	0.0773936	0.0774595
9	1.9	0.0305465	0.0305621

5. تعطي خوارزمية الفرق المنتهي الخطي النتائج في الجداول الآتية:

i	x_i	$w_i(h = 0.1)$
3	0.3	0.05572807
6	0.6	0.00310518
9	0.9	0.00016516

i	x_i	$w_i(h = 0.05)$
6	0.3	0.05132396
12	0.6	0.00263406
18	0.9	0.00013340

7. أ. الإزاحات التقريبية مبينة في الجدول الآتي:

i	x_i	w_{1i}
5	30	0.0102808
10	60	0.0144277
15	90	0.0102808

ب. نعم

ج. نعم؛ أعظم إزاحة تظهر عند $x = 60$. الحل الصحيح هو ضمن حد السماح، لكن التقريب ليس كذلك.

مجموعة التمارين 4.11 (صفحة 667)

1. تعطي خوارزمية الفرق المنتهي اللاخطي Nonlinear Finite-Difference Algorithm النتائج الآتية:

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
1	1.5	0.4067967	0.4054651

3. تعطي خوارزمية الفرق المنتهي اللاخطي Nonlinear Finite-Difference Algorithm النتائج في الجداول الآتية:

أ.

i	x_i	w_i
0	1.00000000	0.50000000
1	1.20000000	0.45458862
2	1.40000000	0.41672067
3	1.60000000	0.38466137
4	1.80000000	0.35716943
5	2.00000000	0.33333333

التقارب في تكرارين

ب.

i	x_i	w_i
0	1.00000000	2.00000000
1	1.20000000	2.03402730
2	1.40000000	2.11487319
3	1.60000000	2.22536304
4	1.80000000	2.35572844
5	2.00000000	2.50000000

التقارب في 3 تكرارات

ج.

i	x_i	w_i
0	2.0	1.19314718
1	2.2	1.24305499
2	2.4	1.29220221
3	2.6	1.34018566
4	2.8	1.38679780
5	3.0	1.43194562

التقارب في تكرارين

د.

i	x_i	w_i
0	1.00000000	0.00000000
1	1.20000000	0.12489059
2	1.40000000	0.31108664
3	1.60000000	0.57051196
4	1.80000000	0.91563623
5	2.00000000	1.35943651
6	1.20000000	1.91536814
7	1.40000000	2.59734258
8	1.60000000	3.41971133
9	1.80000000	4.39725498
10	2.00000000	5.54517744

التقارب في 4 تكرارات

5. b.

عند (4أ)

x_i	$w_i(h = 0.2)$	$w_i(h = 0.1)$	$w_i(h = 0.05)$	$EXT_{1,i}$	$EXT_{2,i}$	$EXT_{3,i}$
1.2	0.45458862	0.45455753	0.45454935	0.45454717	0.45454662	0.45454659
1.4	0.41672067	0.41668202	0.41667179	0.41666914	0.41666838	0.41666833
1.6	0.38466137	0.38462855	0.38461984	0.38461761	0.38461694	0.38461689
1.8	0.35716943	0.35715045	0.35714542	0.35714412	0.35714374	0.35714372

عند (4أ)

x_i	$w_i(h = 0.2)$	$w_i(h = 0.1)$	$w_i(h = 0.05)$	$EXT_{1,i}$	$EXT_{2,i}$	$EXT_{3,i}$
1.2	2.0340273	2.0335158	2.0333796	2.0333453	2.0333342	2.0333334
1.4	2.1148732	2.1144386	2.1143243	2.1142937	2.1142863	2.1142858
1.6	2.2253630	2.2250937	2.2250236	2.2250039	2.2250003	2.2250000
1.8	2.3557284	2.3556001	2.3555668	2.3555573	2.3555556	2.3355556

7. إن مصفوفة جاكوبيان Jacobian $J = (a_{i,j})$ ثلاثية الأقطار مع العناصر:

$$a_{1,1} = 2 + h^2 f_y\left(x_1, w_1, \frac{1}{2h}(w_2 - \alpha)\right)$$

$$a_{1,2} = -1 + \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_1, w_1, \frac{1}{2h}(w_2 - \alpha)\right)$$

$$a_{i,i-1} = -1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1})\right) \quad \text{لكل} \quad 2 \le i \le N-1$$

$$a_{i,i} = 2 + h^2 f_y\left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1})\right) \quad \text{لكل} \quad 2 \le i \le N-1$$

$$a_{i,i+1} = -1 + \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1})\right) \quad \text{لكل} \quad 2 \le i \le N-1$$

$$a_{N,N-1} = -1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_N, w_N, \frac{1}{2h}(\beta - w_{N-1})\right)$$

$$a_{N,N} = 2 + h^2 f_y\left(x_N, w_N, \frac{1}{2h}(\beta - w_{N-1})\right)$$

لذلك فإن $|a_{i,i}| \ge 2 + h^2\delta$, عند $i = 1, \ldots, N$. ولأن $|f_{y'}(x, y, y')| \le L$ و $h < 2/L$، فإن

$$\left|\frac{h}{2} f_{y'}(x, y, y')\right| \le \frac{hL}{2} < 1$$

ومن ثم فإن

$$|a_{1,2}| = \left|-1 + \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_1, w_1, \frac{1}{2h}(w_2 - \alpha)\right)\right| < 2 < |a_{1,1}|,$$

$$\begin{aligned}|a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| &= -a_{i,i-1} - a_{i,i+1}\\ &= 1 + \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1})\right) + 1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1})\right)\\ &= 2 \le |a_{i,i}|,\end{aligned}$$

و

$$|a_{N,N-1}| = -a_{N,N-1} = 1 + \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_N, w_N, \frac{1}{2h}(\beta - w_{N-1})\right) < 2 < |a_{N,N}|$$

واستنادًا إلى النظرية (29.6)، المصفوفة J غير منفردة.

مجموعة التمارين 5.11 (صفحة 682)

1. تعطي الخوارزمية الخطية الجزئية Piecewise Linear Algorithm $\phi(x) = -0.07713274\phi_1(x) - 0.07442678\phi_2(x)$ القيم الحقيقية هي $y(x_1) = -0.07988545$ و $y(x_2) = -0.07712903$

3. تعطي الخوارزمية الخطية الجزئية Piecewise Linear Algorithm النتائج في الجداول الآتية:

أ.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
3	0.3	− 0.212333	− 0.21
6	0.6	− 0.241333	− 0.24
9	0.9	− 0.090333	− 0.09

ب.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
3	0.3	0.1815138	0.1814273
6	0.6	0.1805502	0.1804753
9	0.9	0.05936468	0.05934303

أ.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
3	0.3	− 0.2100000	− 0.21
6	0.6	− 0.2400000	− 0.24
9	0.9	− 0.0900000	− 0.09

ب.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
3	0.3	0.1814269	0.1814273
6	0.6	0.1804753	0.1804754
9	0.9	0.05934321	0.05934303

5. تعطي خوارزمية الأخدود التكعيبي Cubic Spline Algorithm النتائج في الجداول الآتية:

أ.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
3	0.3	− 0.2100000	− 0.21
6	0.6	− 0.2400000	− 0.24
9	0.9	− 0.0900000	− 0.09

ب.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
3	0.3	0.1814269	0.1814273
6	0.6	0.1804753	0.1804754
9	0.9	0.05934321	0.05934303

ج.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
5	0.25	− 0.3585639	− 0.3585641
10	0.50	− 0.5347779	− 0.5347803
15	0.75	− 0.4509109	− 0.4509614

د.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
5	0.25	− 0.1845191	− 0.1845204
10	0.50	− 0.2735833	− 0.2735857
15	0.75	− 0.2284186	− 0.2284204

7.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
3	0.3	1.0408182	1.0408182
6	0.6	1.1065307	1.1065306
9	0.9	1.3065697	1.3065697

9. يعطي التبديل في المتغير $w = (x - a)/(b - a)$ مسألة القيمة الحدية

$$-\frac{d}{dw}(p((b-a)w+a)y') + (b-a)^2 q((b-a)w+a)y = (b-a)^2 f((b-a)w+a)$$

حيث $0 < w < 1,\ y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta$، لذلك يمكن استخدام التمرين (6).

13. عند $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{n+1})^t$ و $\phi(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i\phi_i(x)$، يكون لدينا $\mathbf{c}^t A\mathbf{c} = \int_0^1 p(x)[\phi'(x)]^2 + q(x)[\phi(x)]^2\, dx$ ولكن $p(x) > 0$ و $q(x)[\phi(x)]^2 \geq 0$، لذلك فإن $\mathbf{c}^t A\mathbf{c} \geq 0$ ، ومن الممكن أن تكون صفرًا عند $x \neq 0$ فقط إذا كانت $\phi'(x) \equiv 0$ على [0, 1]. وعلى أي حال فإن $\{\phi'_0, \phi'_1, \ldots, \phi'_{n+1}\}$ مستقلة خطيًّا، ومن ثم فإن $\phi'(x) \neq 0$ على [0, 1]، و $\mathbf{c}^t A\mathbf{c} = 0$ إذا وفقط إذا كانت $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

مجموعة التمارين 1.12 (صفحة 698)

1. تعطي خوارزمية معادلة بواسون للفرق المنتهي Poisson Equation Finite-Difference النتائج الآتية:

i	j	x_i	y_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, y_j)$
1	1	0.5	0.5	0.0	0
1	2	0.5	1.0	0.25	0.25
1	3	0.5	1.5	1.0	1

3. تعطي خوارزمية معادلة بواسون للفرق المنتهي Poisson Equation Finite-Difference النتائج الآتية:

تتطلب 30 تكرارًا.

أ.

$u(x_i, y_j)$	$w_{i,j}$	y_j	x_i	j	i
0.16	0.1599988	0.4	0.4	2	2
0.32	0.3199988	0.8	0.4	4	2
0.32	0.3199995	0.4	0.8	2	4
0.64	0.6399996	0.8	0.8	4	4

تتطلب 29 تكرارًا.

ب.

$u(x_i, y_j)$	$w_{i,j}$	y_j	x_i	j	i
0.2938926	0.2951855	0.3141593	1.256637	1	2
0.1816356	0.1830822	0.9424778	1.256637	3	2
−0.7694209	−0.7721948	0.3141593	2.513274	1	4
−0.4755283	−0.4785169	0.9424778	2.513274	3	4

تتطلب 126 تكرارًا.

ج.

$u(x_i, y_j)$	$w_{i,j}$	y_j	x_i	j	i
1.2712492	1.2714468	0.3	0.8	3	4
1.7506725	1.7509414	0.7	0.8	7	4
1.6160744	1.6167917	0.3	1.6	3	8
3.0648542	3.0659184	0.7	1.6	7	8

تتطلب 127 تكرارًا.

د.

$u(x_i, y_j)$	$w_{i,j}$	y_j	x_i	j	i
0.5250861	0.5251533	1.2	1.2	2	2
1.3189712	1.3190830	1.4	1.4	4	4
2.4064186	2.4065150	1.6	1.6	6	6
3.8088576	3.8088995	1.8	1.8	8	8

7. تعطي القوة التقريبية عند بعض النقاط الاعتيادية النتائج الآتية:

$w_{i,j}$	y_j	x_i	j	i
88	0.4	0.1	4	1
66	0.1	0.2	1	2
66	0.2	0.4	2	4

مجموعة التمارين 2.12 (صفحة 710)

1. إن خوارزمية الفرق التراجعي لمعادلة الحرارة Heat Equation Backward-Difference تعطي النتائج الآتية:

$u(x_i, t_j)$	w_{ij}	t_j	x_i	j	i
0.652037	0.632952	0.05	0.5	1	1
0.883937	0.895129	0.05	1.0	1	2
0.625037	0.632952	0.05	1.5	1	3
0.552493	0.566574	0.1	0.5	2	1
0.781344	0.801256	0.1	1.0	2	2
0.552493	0.566574	0.1	1.5	2	3

3. إن خوارزمية Crank–Nicolson تعطي النتائج الآتية:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}
1	1	0.5	0.05	0.628848
2	1	1.0	0.05	0.889326
3	1	1.5	0.05	0.628848
1	2	0.5	0.1	0.559251
2	2	1.0	0.1	0.790901
3	2	1.5	0.1	0.559252

5. إن خوارزمية الفرق التتابعي Forward-Difference تعطي النتائج الآتية:

أ. عند $h = 0.4$ و $k = 0.1$:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	5	0.8	0.5	3.035630	0
3	5	1.2	0.5	−3.035630	0
4	5	1.6	0.5	1.876122	0

عند $h = 0.4$ و $k = 0.05$:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	10	0.8	0.5	0	0
3	10	1.2	0.5	0	0
4	10	1.6	0.5	0	0

ب. عند $h = \frac{\pi}{10}$ و $k = 0.05$:

i	j	x_i	t_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, t_j)$
3	10	0.94247780	0.5	0.4864823	0.4906936
6	10	1.88495559	0.5	0.5718943	0.5768449
9	10	2.82743339	0.5	0.1858197	0.1874283

7. أ. عند $h = 0.4$ و $k = 0.1$:

i	j	x_i	t_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, t_j)$
2	5	0.8	0.5	−0.00258	0
3	5	1.2	0.5	0.00258	0
4	5	1.6	0.5	−0.00159	0

عند $h = 0.4$ و $k = 0.05$:

i	j	x_i	t_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, t_j)$
2	10	0.8	0.5	-4.93×10^{-4}	0
3	10	1.2	0.5	4.93×10^{-4}	0
4	10	1.6	0.5	-3.05×10^{-4}	0

b. عند $h = \frac{\pi}{10}$ و $k = 0.05$:

$u(x_i, t_j)$	$w_{i,j}$	t_j	x_i	j	i
0.4906936	0.4986092	0.5	0.94247780	10	3
0.5768449	0.5861503	0.5	1.88495559	10	6
0.1874283	0.1904518	0.5	2.82743339	10	9

9. إن خوارزمية Crank–Nicolson تعطي النتائج الآتية:

أ. عند $h = 0.4$ و $k = 0.1$:

$u(x_i, t_j)$	w_{ij}	t_j	x_i	j	i
0	8.2×10^{-7}	0.5	0.8	5	2
0	-8.2×10^{-7}	0.5	1.2	5	3
0	5.1×10^{-7}	0.5	1.6	5	4

عند $h = 0.4$ و $k = 0.05$

$u(x_i, t_j)$	w_{ij}	t_j	x_i	j	i
0	-2.6×10^{-6}	0.5	0.8	10	2
0	2.6×10^{-6}	0.5	1.2	10	3
0	-1.6×10^{-6}	0.5	1.6	10	4

ب. عند $h = \frac{\pi}{10}$ و $k = 0.05$

$u(x_i, t_j)$	w_{ij}	t_j	x_i	j	i
0.4906936	0.4926589	0.5	0.94247780	10	3
0.5768449	0.5791553	0.5	1.88495559	10	6
0.1874283	0.1881790	0.5	2.82743339	10	9

11. أ. يؤدي استخدام $h = 0.4$ و $k = 0.1$ إلى نتائج بلا معنى. وإن استخدام $h = 0.4$ و $k = 0.05$ مرة أخرى يقدم أجوبة بلا معنى. وبوضع $h = 0.4$ و $k = 0.005$ ينتج الآتي:

w_{ij}	t_j	x_i	j	i
−165.405	0.5	0.4	100	1
267.613	0.5	0.8	100	2
−267.613	0.5	1.2	100	3
165.405	0.5	1.6	100	4

ب.

$w(x_{ij})$	t_j	x_i	j	i
0.46783396	0.5	0.94247780	10	3
0.54995267	0.5	1.8849556	10	6
0.17871220	0.5	2.8274334	10	9

13. لدينا $a_{11}v_1^{(i)} + a_{12}v_2^{(i)} = (1-2\lambda)\sin\frac{i\pi}{m} + \lambda\sin\frac{2\pi i}{m}$

و

$$\mu_i v_1^{(i)} = \left[1 - 4\lambda\left(\sin\frac{i\pi}{2m}\right)^2\right]\sin\frac{i\pi}{m} = \left[1 - 4\lambda\left(\sin\frac{i\pi}{2m}\right)^2\right]\left(2\sin\frac{i\pi}{2m}\cos\frac{i\pi}{2m}\right)$$

$$= 2\sin\frac{i\pi}{2m}\cos\frac{i\pi}{2m} - 8\lambda\left(\sin\frac{i\pi}{2m}\right)^3\cos\frac{i\pi}{2m}$$

وعلى أي حال،

$$(1-2\lambda)\sin\frac{i\pi}{m}+\lambda\sin\frac{2\pi i}{m}=2(1-2\lambda)\sin\frac{i\pi}{2m}\cos\frac{i\pi}{2m}+2\lambda\sin\frac{i\pi}{m}\cos\frac{i\pi}{m}$$
$$=2(1-2\lambda)\sin\frac{i\pi}{2m}\cos\frac{i\pi}{2m}$$
$$+2\lambda\left[2\sin\frac{i\pi}{2m}\cos\frac{i\pi}{2m}\right]\left[1-2\left(\sin\frac{i\pi}{2m}\right)^2\right]$$
$$=2\sin\frac{i\pi}{2m}\cos\frac{i\pi}{2m}-8\lambda\cos\frac{i\pi}{2m}\left[\sin\frac{i\pi}{2m}\right]^3$$

ولذلك فإن $a_{11}v_1^{(i)}+a_{12}v_2^{(i)}=\mu_i v_1^{(i)}$ والأكثر من ذلك

$$a_{j,j-1}v_{j-1}^{(i)}+a_{j,j}v_j^{(i)}+a_{j,j+1}v_{j+1}^{(i)}=\lambda\sin\frac{i(j-1)\pi}{m}+(1-2\lambda)\sin\frac{ij\pi}{m}+\lambda\sin\frac{i(j+1)\pi}{m}$$
$$=\lambda\left(\sin\frac{ij\pi}{m}\cos\frac{i\pi}{m}-\sin\frac{i\pi}{m}\cos\frac{ij\pi}{m}\right)+(1-2\lambda)\sin\frac{ij\pi}{m}$$
$$+\lambda\left(\sin\frac{ij\pi}{m}\cos\frac{i\pi}{m}+\sin\frac{i\pi}{m}\cos\frac{ij\pi}{m}\right)$$

$$=\sin\frac{ij\pi}{m}-2\lambda\sin\frac{ij\pi}{m}+2\lambda\sin\frac{ij\pi}{m}\cos\frac{i\pi}{m}$$
$$=\sin\frac{ij\pi}{m}+2\lambda\sin\frac{ij\pi}{m}\left(\cos\frac{i\pi}{m}-1\right)$$

و

$$\mu_i v_j^{(i)}=\left[1-4\lambda\left(\sin\frac{i\pi}{2m}\right)^2\right]\sin\frac{ij\pi}{m}=\left[1-4\lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{i\pi}{m}\right)\right]\sin\frac{ij\pi}{m}$$
$$=\left[1+2\lambda\left(\cos\frac{i\pi}{m}-1\right)\right]\sin\frac{ij\pi}{m}$$

وبذلك فإن

$$a_{j,j-1}v_{j-1}^{(i)}+a_{j,j}v_j^{(i)}+a_{j,j+1}v_j^{(i)}=\mu_i v_j^{(i)}$$

وبالمثل، فإن

$$a_{m-2,m-1}v_{m-2}^{(i)}+a_{m-1,m-1}v_{m-1}^{(i)}=\mu_i v_{m-1}^{(i)}$$

ولذلك فإن

$$A\mathbf{v}^{(i)}=\mu_i\mathbf{v}^{(i)}$$

15. لتعديل الخوارزمية (2.12)، غيّر الآتي:

الخطوة 7: ضع

$$t=jk;$$
$$z_1=(w_1+kF(h))/l_1$$

الخطوة 8: عند $i = 2,\ldots,\ m-1$ ضع

$$z_i = (w_i + kF(ih) + \lambda z_{i-1})/l_i$$

لتعديل الخوارزمية (3.12)، غيّر الآتي:

الخطوة 7: ضع

$$t = jk$$
$$z_1 = \left[(1-\lambda)w_1 + \frac{\lambda}{2}w_2 + kF(h)\right]\Big/ l_1$$

الخطوة 8: عند $i = 2,\ldots,\ m-1$ ضع

$$z_i = \left[(1-\lambda)w_i + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1}) + kF(ih)\right]\Big/ l_i$$

17 . لتعديل الخوارزمية (2.12)، غيّر الآتي:

الخطوة 7: ضع

$$t = jk$$
$$w_0 = \phi(t)$$
$$z_1 = (w_1 + \lambda w_0)/l_1$$
$$w_m = \psi(t)$$

الخطوة 8: عند $i = 2,\ldots,m-2$ ضع

$$z_i = (w_i + \lambda z_{i-1})/l_i$$

ضع $z_{m-1} = (w_{m-1} + \lambda w_m + \lambda z_{m-2})/l_{m-1}$

الخطوة 11: المخرجات (t)

عند $i = 0,\ldots,\ m$ ضع

$$x = ih$$

المخرجات (x, w_i)

لتعديل الخوارزمية (3.12)، غيّر الآتي:

الخطوة 1: ضع

$$h = l/m$$
$$k = T/N$$
$$\lambda = \alpha^2 k/h^2$$
$$w_m = \psi(0)$$
$$w_0 = \phi(0)$$

الخطوة 7: ضع

$$t = jk;$$
$$z_1 = \left[(1-\lambda)w_1 + \tfrac{\lambda}{2}w_2 + \tfrac{\lambda}{2}{}_0 + \tfrac{\lambda}{2}\phi(t)\right]/l_1$$
$$w_0 = \phi(t)$$

الخطوة 8: عند $i = 2,\ldots,\ m-2$ ضع

$$z_i = \left[(1-\lambda)w_i + \tfrac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1})\right]/l_i$$

ضع

$$z_{m-1} = \left[(1-\lambda)w_{m-1} + \tfrac{\lambda}{2}(w_m + w_{m-2} + z_{m-2} + \psi(t))\right]/l_{m-1}$$
$$w_m = \psi(t)$$

الخطوة 11: المخرجات (t) عند $i = 0, \ldots, m$، ضع

$$x = ih$$

المخرجات (x, w_i)

19. تقريب درجة الحرارة عند بعض النقاط الاعتيادية معطى في الجدول:

i	j	r_i	t_j	$w_{i,j}$
1	20	0.6	10	137.6753
2	20	0.7	10	245.9678
3	20	0.8	10	340.2862
4	20	0.9	10	424.1537

الإجهاد هو $I = 1242.537$ تقريبًا.

مجموعة التمارين 3.12 (صفحة 719)

1. إن خوارزمية الفرق المنتهي لمعادلة الموجة تعطي النتائج الآتية:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	4	0.25	1.0	−0.7071068	−0.7071068
3	4	0.50	1.0	−1.0000000	−1.0000000
4	4	0.75	1.0	−0.7071068	−0.7071068

3. إن خوارزمية الفرق المنتهي لمعادلة الموجة مع $h = \frac{\pi}{10}$ و $k = 0.05$ تعطي النتائج الآتية:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	10	$\pi/5$	0.5	0.5163933	0.5158301
5	10	$\pi/2$	0.5	0.8785407	0.8775826
8	10	$4\pi/5$	0.5	0.5163933	0.5158301

إن خوارزمية الفرق المنتهي لمعادلة الموجة مع $h = \frac{\pi}{20}$ و $k = 0.1$ تعطي النتائج الآتية:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}
4	5	$\pi/5$	0.5	0.5159163
10	5	$\pi/2$	0.5	0.8777292
16	5	$4\pi/5$	0.5	0.5159163

إن خوارزمية الفرق المنتهي لمعادلة الموجة مع $h = \frac{\pi}{20}$ و $k = 0.05$ تعطي النتائج الآتية:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}
4	10	$\pi/5$	0.5	0.5159602
10	10	$\pi/2$	0.5	0.8778039
16	10	$4\pi/5$	0.5	0.5159602

5. إن خوارزمية الفرق المنتهي لمعادلة الموجة تعطي النتائج الآتية:

$u(x_i, t_j)$	w_{ij}	t_j	x_i	j	i
0.61061587	0.6729902	0.3	0.2	3	2
0	0	0.3	0.5	3	5
−0.61061587	−0.6729902	0.3	0.8	3	8

7. أ. ضغط الهواء للأنبوب المفتوح هو $p(0.5, 0.5) \approx 0.9$ و $p(0.5, 1.0) \approx 2.7$.

ب. ضغط الهواء للأنبوب المغلق هو $p(0.5, 0.5) \approx 0.9$ و $p(0.5, 1.0) \approx 0.9187927$.

مجموعة التمارين 4.12

1. مع $E_1 = (0.25, 0.75)$, $E_2 = (0, 1)$, $E_3 = (0.5, 0.5)$, $E_4 = (0, 0.5)$ فإن دوال الأساس هي:

$$\phi_1(x, y) = \begin{cases} 4x & \text{on } T_1 \\ -2 + 4y & \text{on } T_2 \end{cases}$$

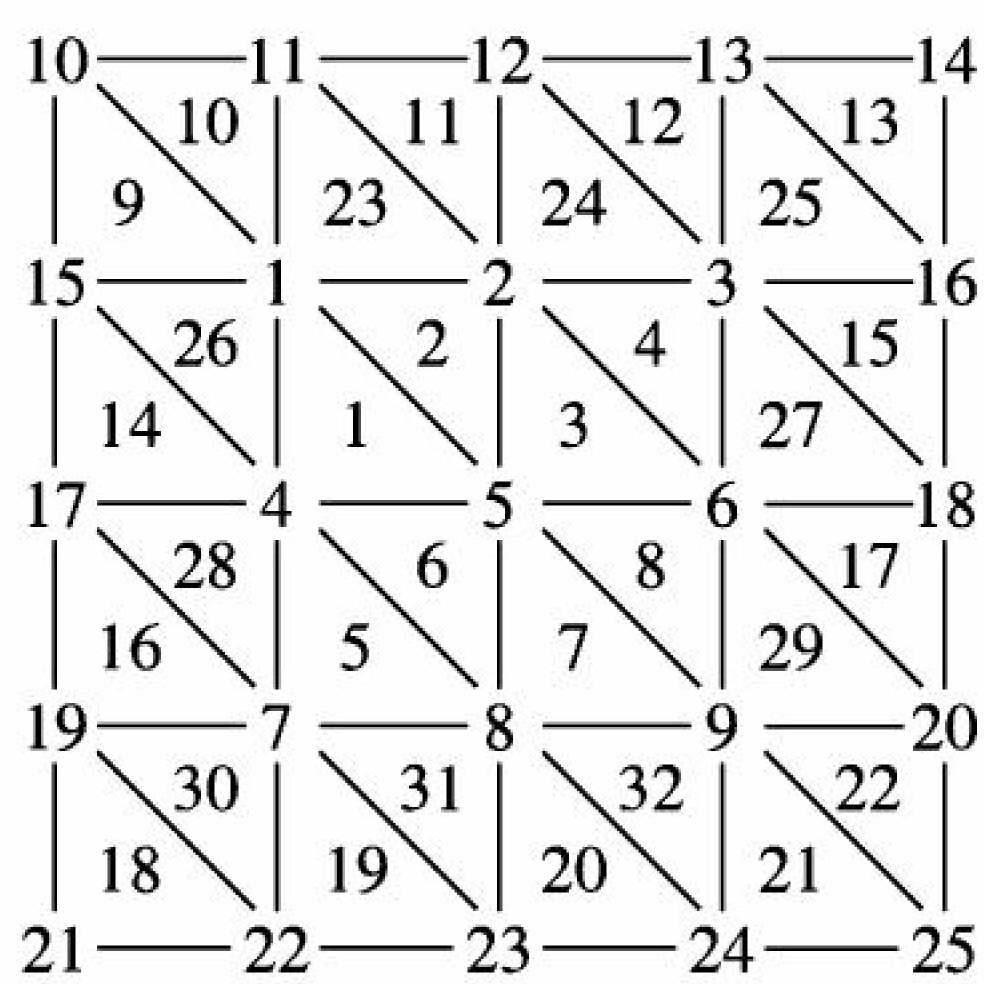
$$\phi_2(x, y) = \begin{cases} -1 - 2x + 2y & \text{on } T_1 \\ 0 & \text{on } T_2 \end{cases}$$

$$\phi_3(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{on } T_1 \\ 1 + 2x - 2y & \text{on } T_2 \end{cases}$$

$$\phi_4(x, y) = \begin{cases} 2 - 2x - 2y & \text{on } T_1 \\ 2 - 2x - 2y & \text{on } T_2 \end{cases}$$

وإن $\gamma_1 = 0.323825$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1.0000$, and $\gamma_4 = 0$.

3. إن خوارزمية العنصر المنتهي Finite-Element مع $K = 8$, $N = 8$, $M = 32$, $n = 9$, $m = 25$, $NL = 0$ تعطي النتائج الآتية، حيث إن الترميز كما هو مبين في المخطط:



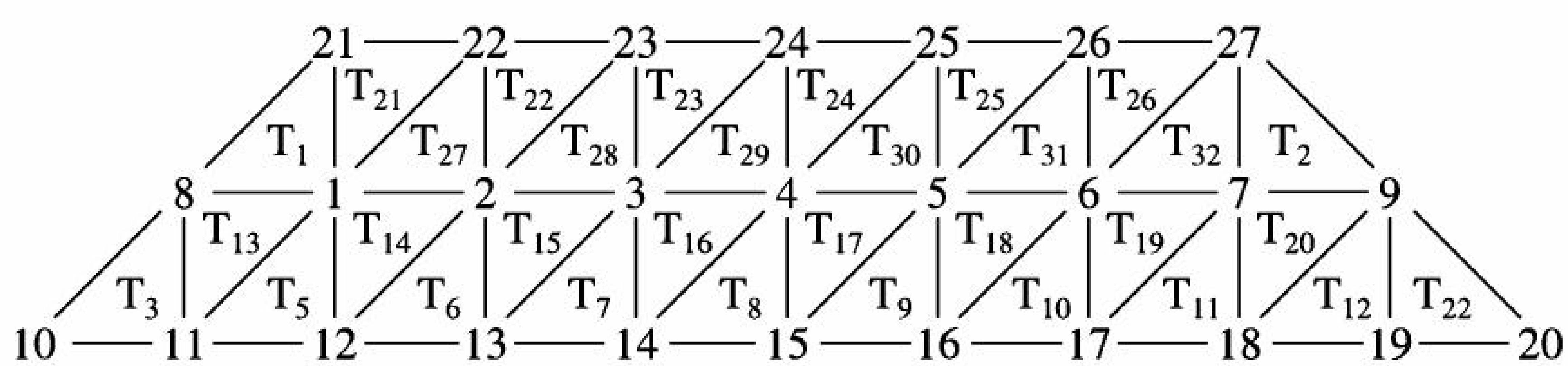
;

$$\gamma_1 = 0.511023$$
$$\gamma_2 = 0.720476$$
$$\gamma_3 = 0.507899$$
$$\gamma_4 = 0.720476$$
$$\gamma_5 = 1.01885$$
$$\gamma_6 = 0.720476$$
$$\gamma_7 = 0.507896$$
$$\gamma_8 = 0.720476$$
$$\gamma_9 = 0.511023$$

$\gamma_i = 0$ لكل $10 \le i \le 25$

$$u(0.125, 0.125) \approx 0.614187$$
$$u(0.125, 0.25) \approx 0.690343$$
$$u(0.25, 0.125) \approx 0.690343$$
$$u(0.25, 0.25) \approx 0.720476$$

5. إن خوارزمية العنصر المنتهي Finite-Element مع $K = 0, N = 12, M = 32, n = 20, m = 27, NL = 14$ تعطي النتائج الآتية، حيث إن الترميز كما هو مبين في المخطط:



$\gamma_1 = 21.40335$	$\gamma_8 = 24.19855$	$\gamma_{15} = 20.23334$	$\gamma_{22} = 15$
$\gamma_2 = 19.87372$	$\gamma_9 = 24.16799$	$\gamma_{16} = 20.50056$	$\gamma_{23} = 15$
$\gamma_3 = 19.10019$	$\gamma_{10} = 27.55237$	$\gamma_{17} = 21.35070$	$\gamma_{24} = 15$
$\gamma_4 = 18.85895$	$\gamma_{11} = 25.11508$	$\gamma_{18} = 22.84663$	$\gamma_{25} = 15$
$\gamma_5 = 19.08533$	$\gamma_{12} = 22.92824$	$\gamma_{19} = 24.98178$	$\gamma_{26} = 15$
$\gamma_6 = 19.84115$	$\gamma_{13} = 21.39741$	$\gamma_{20} = 27.41907$	$\gamma_{27} = 15$
$\gamma_7 = 21.34694$	$\gamma_{14} = 20.52179$	$\gamma_{21} = 15$	

$$u(1, 0) \approx 22.92824$$
$$u(4, 0) \approx 22.84663$$
$$u\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 18.85895$$

Index الفهرس

- Newton, Isaac, 4, 10, 63, 64, 106, 119 نيوتن، إسحق
- معادلة نيوتن للفرق المقسوم الإرجاعي
  Newton backward divided-difference formula, 123
- Newton backward-difference formula, 123 معادلة نيوتن للفرق الإرجاعي
- Newton forward-difference formula, 123 معادلة نيوتن للفرق الأمامي
- معادلة نيوتن للفرق المقسوم الاستكمالي
  Newton interpolatory divided-difference formula, 121

تولي وزارة التعليم العالي في المملكة العربية السعودية اهتماماً بالغاً بتنمية المجتمع؛ حيث تسعى جاهدة إلى توفير بيئة محفزة على الابتكار، قادرة على الإسهام في التحول إلى مجتمع المعرفة، وتعزيز التنمية المستدامة.

ويأتي مشروع وزارة التعليم العالي لترجمة الكتب المتخصصة في مرحلته الثانية ضمن سلسلة من مختلف التخصصات العلمية، يتم فيها ترجمة نخبة من المقررات الجامعية العالمية، من قِبل فرق أكاديمية متخصصة؛ إسهاماً في تلبية احتياجات الطلاب والباحثين في جميع فروع المعرفة، والعلوم الحديثة على وجه الخصوص، وفق قائمة أولويات واضحة للاحتياجات الراهنة والمستقبلية. وتعد المرحلة الثانية استكمالاً للمرحلة الأولى التي ركزت على (ترجمة كتب التطوير الأكاديمي)، فتناولت تطوير العملية التعليمية، وتطوير النظام الإداري، وصدر منها أكثر من (٦٢) كتاباً.

وتعتمد الوزارة كثيراً من المعايير المحكّمة في اختيار الكتب للترجمة؛ من بينها أن تكون الكتب قد حازت قبولاً وانتشاراً في المؤسسات الجامعية ذات الشهرة العالمية، إضافة إلى إثرائها المحتوى العربي؛ كونها مراجع أساسية تخدم مختلف التخصصات، ويُراعى فيها أن تتلاءم مع ما يُدرَّس في جامعاتنا؛ لتكون متاحة للطلبة والباحثين في جامعات المملكة العربية السعودية خاصة، وفي العالم العربي عامة، وترفد الطلاب بمراجع لا غنى عنها في المعرفة، وتسهم في تعزيز التواصل الحضاري والثقافي ونقل المعرفة.

وزير التعليم العالي

د. خالد بن محمد العنقري

ISBN:978-603-503-506-4

9 786035 03506 4

موضوع الكتاب: التحليل العددي